Clase 17:

Integrales de segunda especie e integrales mixtas

CDIVV - 2023 - 2sem

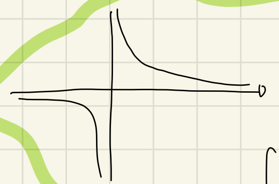
Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Integrales impropias de segunda especie

$f: (a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua

pero no necesariamente acotada.



$f: (0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = 1/x$

$\int_0^1 f(x)$

$$F(x) = \int_x^b f(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(x) = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,dx = \begin{cases} L < +\infty & \text{es convergente} \\ \pm\infty & \text{es divergente} \\ \nexists & \text{oscila} \end{cases}$$

$f: [a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua pero no acotada.

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

$$\int_a^b f(x) = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,dt$$

Análogo.

Ejemplo: $\frac{1}{x^\alpha}$ en $(0,1]$

$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ es una integral impropia de segunda especie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 t^{-\alpha}\,dt$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \log t \Big|_x^1 & \alpha = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Bigg|_x^1 & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\log 1 - \log x\right) & \alpha = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{-\alpha+1} - \dfrac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} \log t \Big|_x^1 & \alpha = 1 \\ \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_x^1 & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\log x & \alpha = 1 \\ \dfrac{1 - x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

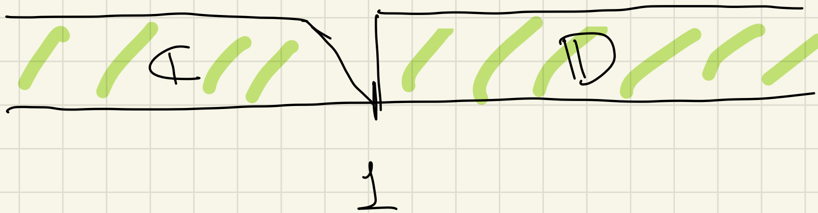
$$\lim_{x \to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ \dfrac{1}{-\alpha+1} & \alpha < 1 \\ +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

$$x^{-\alpha+1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$$

$$-\alpha + 1 > 0 \qquad 1 > \alpha$$

$$x^{-\alpha+1} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty \qquad 1 < \alpha$$

$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,dt \qquad \text{converge si } 1 > \alpha \qquad \text{diverge si } \alpha \geq 1$$



Ejemplo: Clasificar

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x - \operatorname{sen} x}}\,dx$$

Integral impropia de segunda especie

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + r_3(x)$$

$$\frac{r_3(x)}{x^3} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$$\operatorname{sen} x \underset{x \to 0}{\sim} x - \frac{x^3}{3!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x - \operatorname{sen} x}} \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{x^3}{3!}}} = \sqrt{3!}\, \frac{1}{\sqrt{x^3}} \qquad \frac{1}{x^{3/2}}$$

El desarrollo de Taylor de f en a

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

$$+ \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Ejercicio: $f(x) = \operatorname{sen}(x)$

$a = 0 \qquad n = 3$

$\frac{1}{\sqrt{x - \operatorname{sen} x}}$ se comporta como $\frac{1}{x^{3/2}}$

$$\alpha > 3/2$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x - \operatorname{sen} x}} \quad \text{diverge.}$$

Ejemplo: Sea $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ $\quad f$ es una funcion continua tal que $f(0) = 1$

Clasificar

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{F(x)}}\,dx$$

El desarrollo de Taylor de $F(x)$ en $x = 0$

$$F(x) = F(0) + F'(0)\,x + r_1(x)$$

$$= 0 + f(0)\,x + r_1(x)$$

TFC

$$= x + r_1(x)$$

$$\frac{F(x)}{x} = 1 + \frac{r_1(x)}{x} \longrightarrow 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x} = 1 \qquad \underset{x\to 0}{F(x) \sim x}$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{F(x)}}}{1/\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \cdot \sqrt{x} = \sqrt{\frac{x}{F(x)}} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{F(x)}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

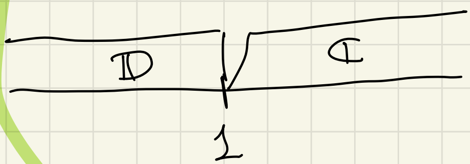
$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{F(x)}}dx$ se comporta como $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

que ya sabemos que converge.
por ser la armónica con $\alpha = 1/2 < 1$

Armónica

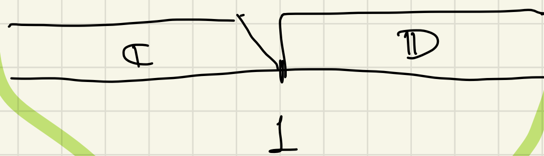
Integral impropia de primera especie

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}$$



Integral impropia de segunda especie

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}$$



Integrales mixtas

Una integral mixta es una integral impropia con varios puntos problemáticos

Para estudiar una integral mixta la escribimos como sumas de integrales de primera o segunda especie y esta converge si cada sumando converge.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

converge $\iff \alpha < 1$

converge $\iff \alpha > 1$

Nunca converge. (es divergente. es $f(x) \geq 0$)

Ejercicio: Clasificar

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}\,\sqrt{|2-x|}}$$

$$\| $$

$$\int_0^1 \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{|2-x|}} + \int_1^2 \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{|2-x|}} + \int_2^3 \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{|2-x|}} + \int_3^{+\infty} \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{x}\,\sqrt{|2-x|}}$$

N

$$\frac{1}{\sqrt{x}\,\sqrt{2}}$$

Ejercicio: Clasificar $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(x^2)\,dx$

integral impropia de primera especie

$$F(x) = \int_1^x \operatorname{sen}(t^2)\,dt = \frac{-\cos t^2}{2t}\Bigg|_1^x - \int_1^x \frac{\cos t^2}{2t^2}\,dt$$

partes

$$\operatorname{sen}(t^2) = \underbrace{2t\ \operatorname{sen} t^2}_{f'} \cdot \underbrace{\frac{1}{2t}}_{g}$$

$$\int_1^x f'g = fg\Big|_1^x - \int_1^x fg'$$

$$f(t) = -\cos t^2$$

$$g(t) = \frac{1}{2t}$$

$$g'(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t}\right)' = \frac{1}{2}\left(t^{-1}\right)'$$

$$= \frac{-1}{2}\,t^{-2}$$

$$= -\frac{1}{2t^2}$$

$$= \frac{-\cos x^2}{2x} + \frac{\cos 1}{2} - \int_1^x \frac{\cos t^2}{2t^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{\cos x^2}{2x} = 0$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos(t^2)}{2t^2}\, dt$$ es absolutamente convergente

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos(t^2)}{2t^2} \right|$$

$$\left| \frac{\cos(t^2)}{2t^2} \right| \leq \frac{1}{2t^2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^2}$$ es convergente

y por lo tanto $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t^2}{2t^2}\,dt$ es convergente.

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \operatorname{sen}(t^2)\,dt \text{ es convergente}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2-1} = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2-1} + \int_0^1 \frac{1}{x^2-1}$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x-1)}\,dx$$

$= P$

$x+1=z$

ω

$$\int_0^1 \frac{1}{z(z-2)}\,dz = -\int_0^1 \frac{1}{z(2-z)}\,dz$$

$$\sim \frac{1}{z}$$