Clase 15:

Integrales impropias

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Integrales impropias

Serie: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales.

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

La serie es el límite $n\to+\infty$ de la sucesión $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i}$$

- converge si es finito
- divergente si es infinito
- oscile si no existe

Integral impropia:

Sea $f:[a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ función integrable

$F:[a,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

La integral impropia es

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} F(x) = \int_a^{+\infty} f(t)\,dt}$$

y lo denotamos

Si el límite es finito decimos que la integral converge.

Si el límite es infinito decimos que la integral diverge

Si el límite no existe decimos que la integral oscila

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \qquad \alpha \in \mathbb{R}}$$

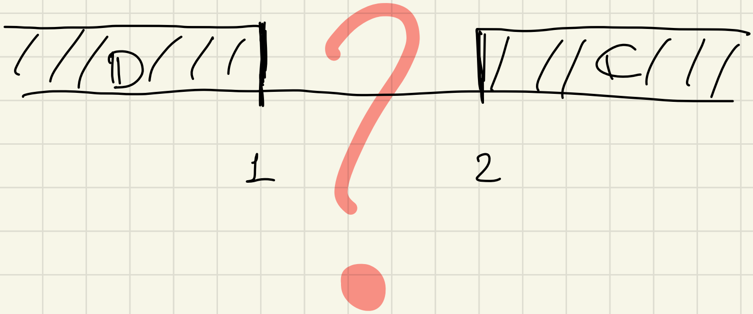
- $\alpha = 2$ $\quad \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n(n+1)}$ telescópica convergente

- $\alpha = 1$ $\quad \frac{1}{n} \sim \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ telescópica divergente

- $\alpha \geq 2$ $\quad 0 \leq \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2}$ $\Rightarrow$ criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

- $\alpha \leq 1$ $\quad n^\alpha \leq n \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^\alpha}$

$\Rightarrow$ criterio de comparación $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge



Ejemplo: $f : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \qquad F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\, dt$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\, dt .$$

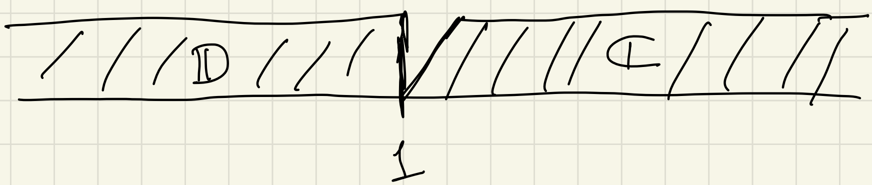
$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\, dt = \begin{cases} \log(t) \Big|_1^x & \alpha = 1 \\ \dfrac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Bigg|_1^x & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \log(x) & \alpha = 1 \\ \dfrac{x^{-\alpha+1} - 1}{-\alpha+1} & \alpha \neq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha}}\, dt = \lim_{x \to +\infty} F(x) = \begin{cases} +\infty & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

$\alpha \neq 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{-\alpha+1}\left(x^{-\alpha+1} - 1\right) = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ +\infty & \alpha < 1 \end{cases}$$

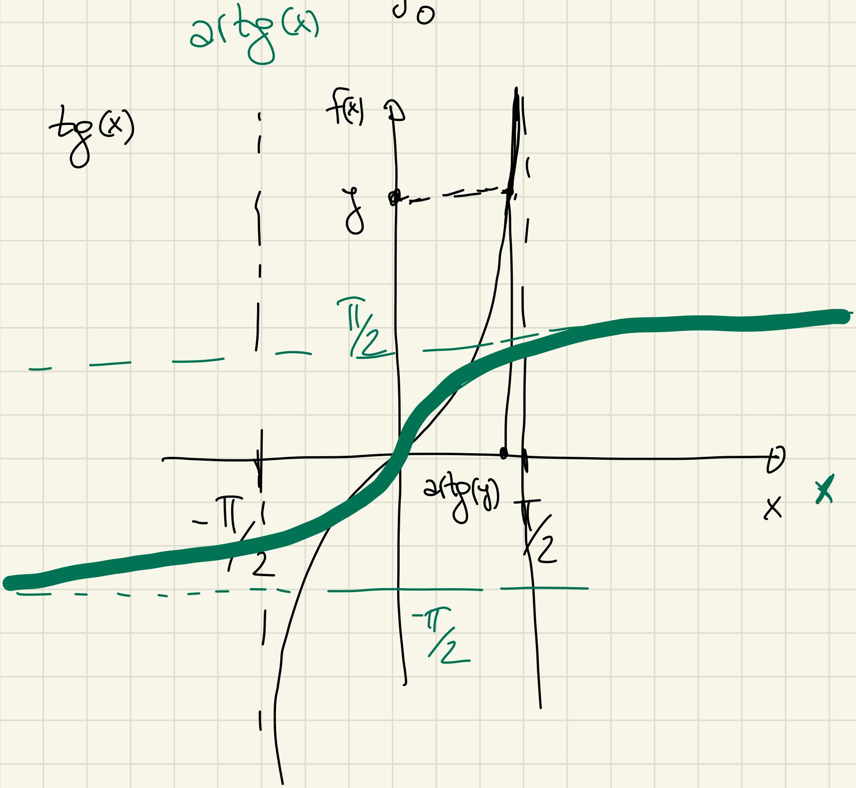


2) $$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{x \to +\infty} \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt \overset{*}{=}$$

$$F(x) = \int_0^{x} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{arctg}(t)\Big|_0^{x} = \operatorname{arctg}(x)$$

$$\stackrel{*}{=} \lim_{x \to +\infty} \operatorname{artg}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}$$



3)
$$\int_0^{+\infty} \cos(x)\, dx = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \cos t\, dt$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen} x \nexists \text{ oscila}$$

Proposición: $f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$\int_a^{+\infty} f(t)$ converge y $\int_a^{+\infty} g(t)$ converge

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} \alpha f(t) + \beta g(t) \quad \text{converge}$$

$$= \alpha \int_a^{+\infty} f(t)\,dt + \beta \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$$

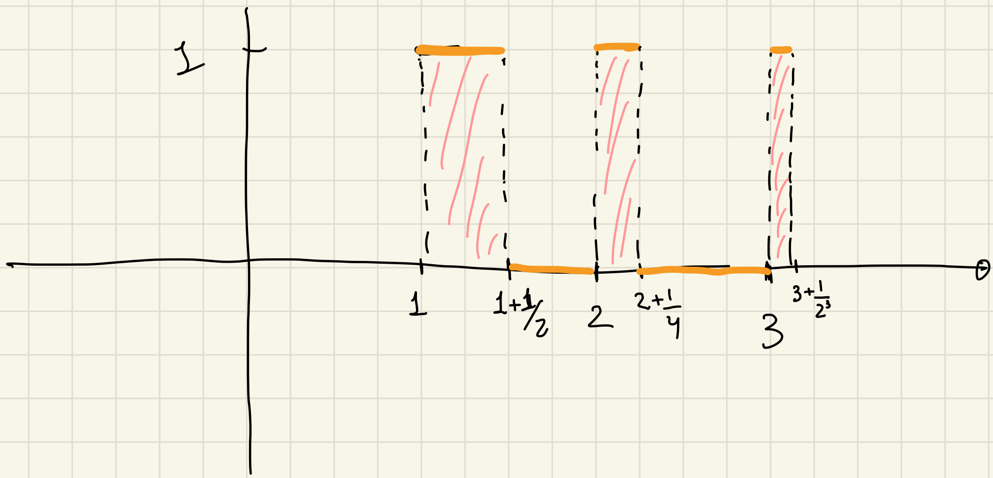
Ejercicio:

$$\left.\begin{array}{l} \int_a^{+\infty} f(t)\,dt \quad \text{converge} \\ f : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L \end{array}\right\} \Rightarrow L = 0$$

Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [n, n + \frac{1}{2^n}] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$

Probar que $\int_1^{+\infty} f(x)$ es convergente,

sin embargo $\lim_{x\to+\infty} f(x) \nexists$



Proposición: $f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

Si f, g continuas tales que

$$0 \leq f(t) \leq g(t) \quad \forall t \geq a .$$

$\Rightarrow$ a) Si $\int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ converge

$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge

b) Si $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ diverge $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(t)\,dt$ diverge

Ejemplo:

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log(x)} = \lim_{x\to+\infty} \int_2^{x} \frac{1}{\log(t)}\,dt$$

$$\log(x) < x \qquad \forall\ x \geq 2$$

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{\log(x)}$$

$\Rightarrow$ $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\log(x)}$ diverge

criterio de comparacion

Proposición: Si f y g son funciones

$f, g : [a, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ $\quad f(t) \geq 0 \quad g(t) \geq 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L > 0$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t) \text{ y } \int_a^{+\infty} g(t)$$

son de la misma clase

Ejemplo: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\, dx$ converge

$$\frac{\sqrt{x}}{x^2+1} \sim \frac{x^{1/2}}{x^2} = \frac{1}{x^{-1/2} \cdot x^2} = \frac{1}{x^{-1/2+2}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

$\boxed{\text{Teorema:}}$ Criterio Serie-Integral.

Sea $f : [2, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ monótona decreciente ($2 \in \mathbb{N}$)

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [2, +\infty)$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=2}^{+\infty} f(n) \quad y \quad \int_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$$

son de la misma clase.