Clase 14:

Series:

Criterio de la raíz -
Series alternadas

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Criterio de equivalentes.

$\sum a_n$ y $\sum b_n$ series de términos positivos

a) • Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L > 0 \Rightarrow$ las dos series convergen o divergen.

b) • Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \Rightarrow$ • $\sum b_n$ converge $\Rightarrow \sum a_n$ converge

• $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow \sum b_n$ diverge

Criterio del cociente

criterio de D'Alambert

$\sum a_n$ serie de términos positivos

tal que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$

$\Rightarrow$

• Si $L < 1 \Rightarrow \sum a_n$ converge

• Si $L > 1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

• Clasificar $\sum \frac{2^n}{n!}$ ✓

converge porque es equivalente a $\frac{1}{n(n+1)}$ y es convergente

• Aplicar el criterio a $\sum \frac{1}{n}$ y $\sum \frac{1}{n^2}$

diverge porque $1/n$ es equivalente a $\log(1+\frac{1}{n})$ y $\sum \log(1+\frac{1}{n})$ diverge

Recordar que $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ y $\sum \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$

son series telescópicas

$$\boxed{a_n \text{ es equivalente a } b_n \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1}$$

Si aplicamos criterio del cociente a

$\sum \frac{1}{n}$ ó $\sum \frac{1}{n^2}$ nos da.

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{1/n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{1/n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$$

El criterio del cociente no clasifica

$\sum \frac{1}{n}$ ni $\sum \frac{1}{n^2}$

Criterio de la raiz o de Cauchy.

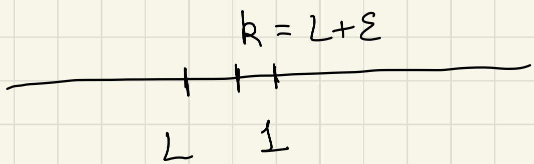
Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Entonces

- Si $L<1 \Rightarrow \sum a_n$ converge
- Si $L>1 \Rightarrow \sum a_n$ diverge.

Dem: • Si $L<1$



$\exists\ L<k<1$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

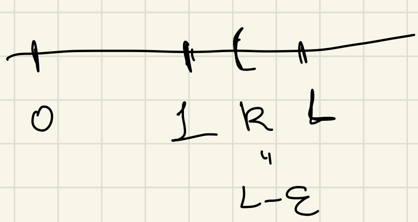
$$\sqrt[n]{a_n} < k < 1 \quad \forall\, n \geq n_0$$

$\Rightarrow a_n < k^n$. Como $k<1$, $\sum k^n$ es una serie geométrica convergente

$\Rightarrow$ $\sum a_n$ es convergente.

criterio comparacion

- Si $L > 1$



$\exists\, k > 1$ y n_0 tq

$$\sqrt[n]{a_n} > k \quad \forall\, n \geq n_0$$

$$a_n > k^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$$

$\Rightarrow \sum a_n$ no converge

$\Rightarrow \sum a_n$ diverge.

a_n sucesión de términos positivos

Ejemplos:

1) Clasificar $\sum \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$

Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{\log n}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \sum \left(\frac{\log n}{n}\right)^n \text{ es convergente.}$$

$0 < 1$
criterio
de la
raíz

2) Clasificar $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/n}}{2^{n/n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{5/n}}{2}$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^{5/n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\log n^{5/n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{5\,\text{Log}\, n}{n}} = 1 \qquad \frac{5\,\text{Log}\, n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{2^n}$$

converge

criterio de la raiz

Flint Hill Serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \operatorname{sen}^2(n)}$$

No se sabe si converge o diverge

Series alternadas.

Veamos que pase con $\sum a_n$ en donde el signo de a_n varié.

Def: $\sum a_n$ es absolutamente convergente

$\iff$

$\sum |a_n|$ es convergente.

Teorema: Si $\sum a_n$ es absolutamente convergente

$\Rightarrow \sum a_n$ es convergente.

Dem:

Sea $a_n = a_n^+ - a_n^-$

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si } a_n < 0 \end{cases} \qquad a_n^- = \begin{cases} 0 & \text{si } a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{si } a_n < 0 \end{cases}$$

a_n^+ y a_n^- son sucesiones de términos positivos

$$|a_n| = a_n^+ + a_n^-$$

Si $\sum |a_n|$ converge

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq a_n^+ \leq a_n \\ 0 \leq a_n^- \leq a_n \end{array}\right\} \Rightarrow \sum a_n^+ \text{ y } \sum a_n^- \text{ convergen}$$

$$\Rightarrow \sum a_n^+ - a_n^- \text{ converge.}$$

$$\parallel$$

$$\sum a_n$$

~~$(\not\Leftarrow)$~~ Vemos un ejemplo al final

Ejemplo

1) $\sum \frac{sen(n)}{n^2}$ **no** es una serie de términos positivos

porque el signo de $sen(n)$ varía

$\sum \left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$ es de términos positivos

$$\left.\begin{array}{l}\left|\frac{sen(n)}{n^2}\right| \leq \frac{|sen(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \\ \sum \frac{1}{n^2} \text{ converge}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

criterio de comparación

$\Rightarrow \sum \left|\frac{sen(n)}{n^2}\right|$ converge.

$\Rightarrow \sum \frac{sen\, n}{n^2}$ converge absolutamente

$$\Rightarrow \sum \frac{\operatorname{sen} n}{n^2} \text{ converge.}$$

Teorema.

Series alternadas $\quad (-1)^n a_n$

Proposición (Criterio de Leibnitz)

Si a_n es una sucesión monótona decreciente que tiende a cero

$$\Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ es convergente.}$$

Ejemplo: $\quad \sum (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$

$a_n = \frac{1}{n}$ es monótona decreciente

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{criterio} \\ \text{de Leibnitz}}}{\Rightarrow} \sum (-1)^n \frac{1}{n} \text{ es convergente}$$

$\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ NO es absolutamente convergente.

$$\sum \left| (-1)^n \frac{1}{n} \right| = \sum \frac{1}{n}$$ y sabemos que esta serie diverge.

Este ejemplo es una muesta de que

convergente $\not\Rightarrow$ absolutamente convergente