Clase 11:

Completitud - Series

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Todo conjunto infinito y acotado $A \subseteq \mathbb{R}$ tiene (al menos) un punto de acumulación

Dem: Sea A un conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}$.

$$A \subseteq [a_0, b_0] = I_0$$

Nos construimos

$$\ldots \subseteq I_n \subseteq I_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq I_1 \subseteq I_0$$

Una sucesión de intervalos encajados que verificas que cada uno de ellos tiene infinitos elementos de A

$$I_k = [a_k, b_k]$$

La longitud de I_k es $b_k - a_k = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$

$$\downarrow_{k \to +\infty}$$

$$0$$

$$L = \bigcap_{k=0}^{\infty} I_k$$

<u>L es punto de acumulación de A:</u>

$$\left(\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \ \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a \in A \cap E^*(L, \varepsilon) \right)$$

Sea $\varepsilon > 0$, tomamos $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{b_0 - a_0}{2^N} < \varepsilon \qquad L \in I_{N+1} \subseteq E(L, \varepsilon).$$

I_{N+1} tiene infinitos elementos de A, en particular existe alguno $\neq L$, es decir existe $a \in A \cap E^*(L, \varepsilon)$.

Obs:

- $\{2\}$ es acotado y es finito y no tiene puntos de acumulación
- $\mathbb{N}$ es infinito pero no es acotado y no tiene puntos de acumulación

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

Toda sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ acotada tiene una subsucesión convergente.

Dem: Sea $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ el recorrido de la sucesión

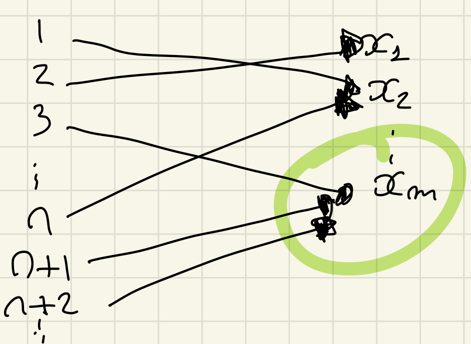
$$\left(\begin{array}{l} \text{Ej: si } a_n = (-1)^n \Rightarrow A = \{-1, 1\}. \\ \qquad a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n} \dots\} \end{array} \right)$$

Como la sucesión está acotada $\Rightarrow$ A es un conjunto acotado.

¿es A es infinito? no sabemos.

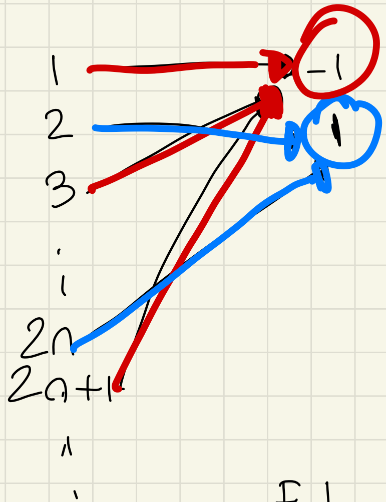
Caso 1 Si A es finito $A = \{x_1, \dots, x_m\}$

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow A \subseteq \mathbb{R}$$
$$k \longrightarrow x_{n_k}$$



Va a existir un x_j pa el cual llega una cantidad infinita de flechas.

De lo contrario tendríamos que los números naturales son finitos



$(-1)^n = a_n$

Tomamos

$k \longrightarrow n_k \longrightarrow a_{n_k} = x_j$

estrictamente creciente

Entonces la subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión convergente a x_j

Caso 2 Si A es infinito

A infinito y acotado $\overset{TBW}{\Longrightarrow}$ existe un punto de acumulación L

Nos construimos una subsucesión de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, $\exists\, a \in E^{*}(L, \frac{1}{k}) \cap A$

Llamamos a_{n_k} a ese elemento.

Queremos ver que $\{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a L

Por construcción $|a_{n_k} - L| < \frac{1}{k}$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = L$$

$\{a_{n_k}\}$ es una subsucesión convergente a L.

$$a_n = \overbrace{\left((-1)^n + 1\right)}^{\text{acotada}} \overbrace{\frac{1}{n}}^{0} \qquad a_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$$ tiene una subsucesión convergente.

$$a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n}$$

que converge a 1

Sucesiones de Cauchy

Def: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}, \mathbb{Q}$ es una sucesión de Cauchy $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \quad \forall n, m \geq n_0$$

Teorema:

Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente $\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

¿$\Leftarrow$?

Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.
$\Rightarrow$ $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente

(Se prueba usando el axioma de completitud de $\mathbb{R}$)

Si $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{Q}$

no podemos garantizar la convergencia de esa sucesión

Ya que $\mathbb{Q}$ no es completo.

Ejemplo:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es de Cauchy ✓

converge en $\mathbb{R}$ ✓

no converge en $\mathbb{Q}$ ✗

Series

Ejercicio: ¿Qué es la paradoja de Zenón?

Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Definimos otra sucesión

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$a_n = \frac{1}{2^n} \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Suma parcial n-ésima de $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Si $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión convergente, decimos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$ es una serie convergente.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, es la sucesión de somas parciales de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Si la sucesión de sumas parciales $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ converge decimos que la serie converge si diverge decimos que la serie diverge y si oscila decimos que la serie oscila.

<u>Ejemplo</u> Sea $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $a_n = q^n$

$q \in \mathbb{R}^+$

serie geométrica

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} q^i$$

¿ $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente?

$$S_n = 1 + q + \dots + q^n$$

$$S_{n+1} = 1 + q + \dots + q^{n+1} = 1 + q S_n$$

$$1 + q S_n - S_n = q^{n+1}$$

$$\Rightarrow S_n(q-1) = q^{n+1} - 1$$

$$S_n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

$q \neq 1$

$q < 1$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{\underbrace{q^{n+1}}_{\substack{0 \\ n \to +\infty}} - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q-1}$$

$q = 1/2$

$$= \frac{1}{1-q}$$

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1}{1 - 1/2} = 2}$$

$$\boxed{\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_n}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$$

sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

sucesión de sumas parciales de la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$