Clase 2:

Exponencial compleja.

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Números complejos $\mathbb{C}$ vs Números reales $\mathbb{R}$.

Cuerpo totalmente ordenado.

$(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

$a+bi$ notación binómica

$r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ notación polar.

$$(a+bi)+(c+di) = a+c+(b+d)i$$

$$(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bic + bdi^2$$

$$= (ac-bd) + (ad+bc)i$$

$i^2 = -1$

Cuerpo algebraicamente cerrado.

Teorema fundamental del Álgebra:

$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad a_i \in \mathbb{C}$

entonces P tiene n raíces contadas con su multiplicidad

- x^2+1 es un polinomio con coeficientes reales que no tiene raices reales.

$\mathbb{R}$ es un cuerpo que <u>no</u> es algebraicamente cerrado.

- x^2+1 es un polinomio tiene 2 raices complejas que son i y $-i$

Proposición: Si $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ con $a_i \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ es raiz de $P(x)$ entonces $\overline{z}$ tambien es raiz de $P(x)$

Dem: $$P(\overline{z}) = a_n \overline{z}^n + \dots + a_1 \overline{z} + a_0$$
$$= \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0}$$
$$\underset{\text{propiedades}}{=} \overline{P(z)} = 0$$

z es raiz de P

$\Rightarrow$ $\overline{z}$ es raiz de P

$ax^2+bx+c=0$ tiene raíces

$$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

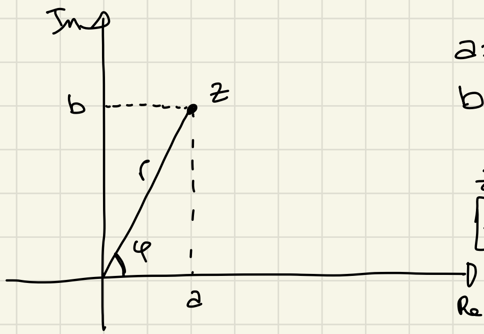
Notación binomica

$z = a+bi$

vs

Notación polar

$z = re^{i\varphi}$



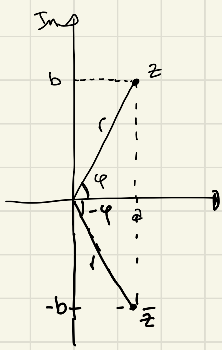
$a = r\cos\varphi$

$b = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$z = r\cos\varphi + i\,r\,\mathrm{sen}\,\varphi$

$$\boxed{z = r\,(\underbrace{\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi}_{e^{i\varphi}})}$$

Conjugado



$z = a+bi$

$\bar{z} = a-bi$

$z = re^{i\varphi}$

$\bar{z} = re^{-i\varphi}$

Exponencial compleja.

La exponencial compleja es una función $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ que extiende a la función exponencial en $\mathbb{R}$.

Def: $z = a + bi$

$$e^z \sim \boxed{f(z) = e^a(\cos b + i\operatorname{sen} b)}$$

Si z tiene parte imaginaria nula, es decir, $b = 0$

$$f(z) = f(a) = e^a(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$$
$$= e^a(1 + i \cdot 0)$$
$$= e^a$$

$$f(a) = e^a$$

Esta función extiende a $\mathbb{C}$ la función exponencial en $\mathbb{R}$.

Proposición: $e^{z+w} = e^{z} \cdot e^{w}$

Dem: $z = a+bi \qquad w = c+di$

$$e^{z+w} = e^{a+c} \cdot \left(\cos(b+d) + i\,\mathrm{sen}(b+d)\right)$$

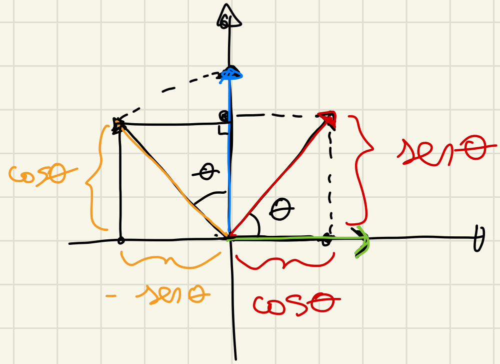
$$z+w = (a+c) + (b+d)i$$

$$= e^{a} \cdot e^{c} \left(\cos(b+d) + i\,\mathrm{sen}(b+d)\right)$$

$$e^{z} \cdot e^{w} = \underbrace{e^{a}\left(\cos b + i\,\mathrm{sen}\, b\right)}_{e^{z}} \cdot \underbrace{e^{c}\left(\cos d + i\,\mathrm{sen}\, d\right)}_{e^{w}}$$

$$= e^{a} \cdot e^{c} \left(\overbrace{\cos b \cdot \cos d - \mathrm{sen}\, b\, \mathrm{sen}\, d}^{\cos(b+d)} + i \underbrace{\left(\mathrm{sen}\, b \cos d + \cos b\, \mathrm{sen}\, d\right)}_{\mathrm{sen}(b+d)} \right)$$

$$\Rightarrow \; e^{z+w} = e^{z} \cdot e^{w}$$



$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$R_\theta(v) = M_\theta \cdot v$$

$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$M_{\theta+\varphi} = M_\theta \cdot M_\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+\varphi) & -\operatorname{sen}(\theta+\varphi) \\ \operatorname{sen}(\theta+\varphi) & \cos(\theta+\varphi) \end{pmatrix} = M_\theta \, M_\varphi$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi & \cancel{\theta} \\ \operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \cos\theta\operatorname{sen}\varphi & \cancel{\theta} \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$$e^{\pi i} = e^{0+\pi i} = e^{0}\cdot(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$$

$$= 1(-1 + i\cdot 0)$$

$$\boxed{e^{\pi i} = -1}$$

$$z = a+bi$$

$$e^{z} = e^{a}\cdot\underbrace{(\cos b + i\operatorname{sen} b)}_{e^{ib}}$$

$$\boxed{e^{a+bi} = e^{a}\cdot e^{ib}}$$

Ejemplo: • $e^{i\pi/2} = \left(\cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2\right)$

$= 0 + i \cdot 1 = i$

• $\sqrt{2}\, e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos \pi/4 + i \operatorname{sen} \pi/4\right).$

$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= 1 + i$

Observación

$z = r e^{i\theta}$

$w = s e^{i\varphi}$

$zw = r e^{i\theta} \cdot s e^{i\varphi}$

$= rs\, e^{i\theta} e^{i\varphi}$

$= rs\, e^{i(\theta+\varphi)}$

Ejemplo: Hallar todos los $z \in \mathbb{C}$ que verifiquen que $z^2 = \bar{z}$

$\hookrightarrow z^3 = z \cdot z^2 = z\bar{z} = |z|^2$

$1 = |z|^2$

$z = re^{\theta i}$ tal que.

$$\left.\begin{aligned} z^2 &= r^2 e^{2\theta i} \\ \bar{z} &= r e^{-\theta i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\underline{\underline{z \neq 0}}$

- $r^2 = r > 0$
- $2\theta = -\theta + 2k\pi$

$\underline{\underline{z = 0}}$ ✓

Si $z = 0$ $\quad 0^2 = \bar{0}$ ✓

Si $z \neq 0$ • $r^2 = r \Rightarrow r^2 - r = 0$

$r \neq 0 \qquad r(r-1) = 0$

$\Rightarrow r - 1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{r = 1}$

- $2\theta = -\theta + \underline{2k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$3\theta = 2k\pi \qquad \theta = \dfrac{2k\pi}{3}$

$r = 1$

$\theta = 0$ $\quad k = 0$

$\theta = \frac{2}{3}\pi$ $\quad k = 1$

$\theta = \frac{4}{3}\pi$ $\quad k = 2$

$z = 0$

$z = 1$

$z = e^{\frac{2}{3}\pi i}$

$z = e^{\frac{4}{3}\pi i}$