Ecuaciones diferenciales. Una introducción para el curso de Cálculo I y II.

Eleonora Catsigeras *

23 de julio de 2007

Notas para el curso de Cálculo II de la Facultad de Ingeniería.

1. Definición y ejemplos de ecuación diferencial.

Una *ecuación diferencial ordinaria* es una igualdad en que:

* La incógnita es una función **desconocida** $y = f(x)$ definida y derivable hasta orden k para todo $x \in \mathbb{R}$ o para todo x en un intervalo abierto de reales. (El objetivo es hallar esa función; la incógnita es ESA FUNCIÓN DESCONOCIDA, la incógnita de una ecuación diferencial no es un número real, sino una función).

* Aparece en la ecuación alguna de las derivadas de la función desconocida $y = f(x)$: la derivada primera $y' = f'(x)$, y/o la derivada segunda $y'' = f''(x)$, hasta la derivada de orden k de $f(x)$.

Se llama ecuación diferencial de orden 1 si la única derivada de la función desconocida que aparece es la derivada primera. Se llama ecuación diferencial de orden 2, si la derivada de mayor orden que aparece de la función desconocida es 2. Se llama ecuación diferencial de orden 3, si la derivada de mayor orden que aparece de la función desconocida es 3. Y así sucesivamente. Por ejemplo:

$y'' + y''' + e^x y = 4\cos x$ es una ecuación diferencial de orden 3 (no importa que no aparezca la derivada primera, así como tampoco importaría que no aparezca la derivada segunda. Es de orden 3 porque la derivada de mayor orden que aparece de la función desconocida es de orden 3).

Ejemplo 1.1. $f' = (\cos x)f$, o lo que es lo mismo $y' = (\cos x)y$ es una ecuación diferencial de primer orden.

La función incógnita es $y = f(x)$ que verifica la igualdad para todo x en un intervalo de reales (el intervalo de reales puede ser un segmento abierto, una semirrecta abierta, o todo el eje real). Se llama solución de la ecuación diferencial, y es desconocida. Debe tener derivadas hasta el orden en que aparezca en la ecuación diferencial, por lo tanto en particular es CONTINUA Y DERIVABLE UNA VEZ POR LO MENOS en el intervalo donde verifica la ecuación diferencial.

* Instituto de Matemática y Estadística Rafael Laguardia (IMERL), Fac. Ingenieria. Universidad de la República. Uruguay. Address: Herrera y Reissig 565. Montevideo. Uruguay.

La ecuación diferencial del ejemplo 1.1 tiene como solución: $y = e^{\operatorname{sen} x}$, pues para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $(e^{\operatorname{sen} x})' = (\cos x)(e^{\operatorname{sen} x})$; es decir: en la ecuación diferencial dada $y' = (\cos x)y$, si se sustituye y por la solución $y = e^{\operatorname{sen} x}$, entonces la igualdad dada se convierte en una identidad para todo $x \in \mathbb{R}$.

Esa sustitución de la solución (en donde aparece f o en donde aparece y en la ecuación diferencial escribir la función solución), que convierte la ecuación dada en una identidad para todo $x \in \mathbb{R}$, se llama "verificación"de la ecuación diferencial.

En estas notas veremos cómo resolver (encontrar todas las funciones soluciones) algunas ecuaciones diferenciales muy particulares (y muy pocas) de primer y segundo orden. Siempre que uno aplique métodos de resolución de una ecuación diferencial, después de encontrar la o las funciones solución (puede haber más de una función solución, incluso infinitas funciones soluciones), es conveniente verificar que la función solución efectivamente lo sea; es decir que verifica la ecuación diferencial, sustituyendo la función solución en la ecuación dada y comprobando que la transforma en una identidad PARA TODO $x \in \mathbb{R}$ (o por lo menos para todo x en algún intervalo abierto del eje real.)

Otra solución de la ecuación diferencial del ejemplo 1.1 es la función: $y = 0$ constante, función idénticamente nula (verifíquese que es solución pues $0 \equiv (\cos x) \cdot 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$). Otra solución es la función $y = 5e^{\operatorname{sen} x}$ (verifíquese que es solución). Otra solución es la función $y = Ce^{\operatorname{sen} x}$ (verifíquese que es solución), donde C es una constante real arbitraria (independiente de x). Por lo tanto la ecuación diferencial dada al principio tiene infinitas soluciones, una para cada valor de la constante C.

Ejemplo 1.2.

$$y'' - 2y' + y = 3$$

es una ecuación diferencial de segundo orden. Verificar que la función $y = 3 + C_1 e^t + C_2 t e^t$, definida para todo $t \in \mathbb{R}$, es solución. En esa solución C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias, independientes de t. Existen por lo tanto infinitas soluciones de la ecuación diferencial de este ejemplo, una para cada pareja de valores reales que se asigne a las constantes C_1 y C_2.

2. Ecuación diferencial de primer orden de variables separadas.

Definición 2.1. Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden se llama de *variables separadas* si es de la forma:

$$y' = A(y)B(x)$$

donde $A(y)$ es una función dada (conocida), que depende solo de y continua para todo y en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, y $B(x)$ es una función dada (conocida) que depende solo de x, continua para todo x en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$.

Ejemplo: $y' = (\operatorname{sen} x)(1 + y^2)$ es de variables separadas, donde $A(y) = 1 + y^2$ y $B(x) = \operatorname{sen} x$.

Ejemplo: $y' = \operatorname{sen}(x + y)$ no es de variables separadas. El segundo miembro de la igualdad no se puede escribir como producto de dos funciones, una que dependa solo de y y otra que dependa solo de x.

2.2. Solución de la ecuación de variables separadas.

1er. caso) Si existe algún (os) valores reales α tales que $A(\alpha) = 0$ entonces la función (es) $y(x) = \alpha$ constante, independiente de x, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, es solución de la ecuación diferencial $y' = A(y)B(x)$. En efecto, sustituyendo $y(x) = \alpha$, $\Rightarrow$ $y'(x) = 0$, en la ecuación diferencial dada, resulta: $0 = A(\alpha)B(x)$, lo cual es una identidad para todo $x \in \mathbb{R}$ porque $A(\alpha) = 0$.

2do caso) Si buscamos las restantes soluciones $y(x)$ tales que $A(y(x)) \neq 0$, entonces, dividiendo la ecuación diferencial dada entre $A(y)$ se obtiene:

$$\frac{y'(x)}{A(y(x))} = B(x)$$

Primitivando respecto de x (atención las dos funciones que son iguales, para mantener la igualdad, tienen que ser primitivadas respecto a **la misma variable** x, y no una respecto de x y la otra respecto de y, por ejemplo).

$$\int \frac{y'(x)}{A(y(x))}\, dx = C + \int B(x)\, dx$$

donde C es una constante real arbitraria.

En la primera primitiva hacemos el cambio de variable $y = y(x)$ (aunque no conozcamos esa función, porque es justamente la función solución que estamos buscando, podemos hacer en forma abstracta el cambio de variables $y = y(x)$ aplicando las reglas de cambio de variables en las primitivas: $dy = y'(x)\, dx$). Resulta:

$$\int \frac{dy}{A(y)} = C + \int B(x)\, dx \qquad (1)$$

Como las funciones $A(y)$ y $B(x)$ son dadas al dar la ecuación diferencial, calculando las primitivas de (1), se obtienen funciones conocidas:

$$P(y) = C + Q(x) \qquad (2)$$

donde C es una constante real arbitraria, $P(y)$ es una primitiva respecto de y de la función continua $1/A(y)$, siendo $A(y)$ la función continua dada, y $Q(x)$ es una primitiva de la función continua dada $B(x)$. De (2) se despeja y en función de x, obteniéndose así la solución $y = y(x)$ buscada. Normalmente para cada valor de la constante real arbitraria C se obtendrá una o más soluciones $y = y(x)$ de la misma ecuación diferencial dada.

Ejemplo 2.3. Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial:

$$y' = (\cos x)y$$

Aquí nuestra función $A(y) = y$ y $B(x) = \cos x$ Primero hallemos las raíces de la función $A(y) = y$. Es solamente $y = 0$. Por lo tanto $y = 0$ constante, independiente de x, definida para todo $x \in \mathbb{R}$, es una solución de la ecuación diferencial dada.

Ahora hallemos las otras soluciones diferentes de la anterior. Pasando dividiendo y en la ecuación diferencial dada, y primitivando respecto de x, resulta:

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)}\, dx = C + \int \cos x\; dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = C + \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; \log|y| = C + \operatorname{sen} x$$

Despejando $|y|$ y llamando $k_1 = e^C$, resulta k_1 constante real arbitraria POSITIVA:

$$|y| = k_1 e^{\operatorname{sen} x} \quad \Rightarrow \quad y = \pm k_1 e^{\operatorname{sen} x}$$

Pero si k_1 es una constante real arbitraria positiva, entonces $\pm k_1$ es una constante real arbitraria no nula (positiva o negativa). La llamo k. Tengo $y = ke^{\operatorname{sen} x}$ donde k es una constante arbitraria no nula. Agregando la solución $y \equiv 0$ que encontré al principio, puedo escribirla como $0 \cdot e^{\operatorname{sen} x}$. Por lo tanto todas las soluciones de la ecuación diferencial dada son:

$$y = ke^{\operatorname{sen} x} \; \forall x, \in \mathbb{R}$$

donde k es una constante real arbitraria independiente de x.

Ejemplo 2.4. Resolver

$$y' = (1 + y^2)3x^2$$

Aquí nuestra función $A(y) = 1 + y^2$ y nuestra función $B(x) = 3x^2$ (También podría haber tomado $A(y) = 3(1 + y^2);\ B(x) = x^2$.)

La función $A(y) = 1 + y^2$ no se anula nunca, entonces no hay soluciones de la forma $y =$ constante.

Dividiendo la ecuación dada entre $A(y)$ y primitivando ambos miembros respecto de x (ambos respecto de la misma variable x) se obtiene:

$$\int \frac{y'(x)}{1 + (y(x))^2}\, dx = \int 3x^2\, dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{1 + y^2} = C + x^3$$

donde C es una constante arbitraria. Luego:

$$\operatorname{arc\,tg} y = C + x^3 \quad \Rightarrow \quad y = \operatorname{tg}(C + x^3)$$

donde C es una constante arbitraria real. ¿Cuál es el intervalo de definición de las x en cada una de las soluciones? Por ejemplo para $C = 0$, la solución $y = \operatorname{tg}(x^3)$ está definida en el intervalo $(-\sqrt[3]{\pi/2}, \sqrt[3]{\pi/2})$, o en el intervalo $(\sqrt[3]{\pi/2}, \sqrt[3]{3\pi/2})$, o en el intervalo $(\sqrt[3]{3\pi/2}, \sqrt[3]{5\pi/2})$, etc. Por convención, en cada uno de esos intervalos como dominio de la función solución $y = \operatorname{tg}(x^3)$, se dice que la solución es diferente. Hay así infinitas soluciones que responden a la misma fórmula $y = \operatorname{tg}(x^3)$, una en cada uno de esos intervalos en el eje real. Por convención NO se llama solución a una función cuyo dominio no sea un solo intervalo (por ejemplo no es solución la función $y = \operatorname{tg}(x^3)$ definida en la unión de dos o más intervalos abiertos disjuntos como los descriptos más arriba).

3. Solución de ecuación diferencial con condiciones o datos iniciales.

Hemos visto que por lo general, existen infinitas soluciones a una misma ecuación diferencial. Sin embargo si se dan "datos iniciales.ªpropiados, por lo general existe una y solo una función solución de la ecuación diferencial que cumple esos datos iniciales. En una ecuación diferencial de primer orden, se llama dato inicial a una condición del tipo:

$$y(x_0) = y_0$$

donde x_0 e y_0 son valores reales dados (DATOS).

En una ecuación diferencial de segundo orden se llaman datos iniciales a dos condiciones del tipo:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = u_0$$

donde x_0, y_0 y u_0 son números reales dados (DATOS).

Para determinar cuál es la solución que verifica los datos iniciales, hallamos primero todas las soluciones. Al conjunto de todas las soluciones se la llama solución general. La solución general depende normalmente de una constante arbitraria real si la ecuación diferencial es de primer orden, y de dos constantes arbitrarias reales si la ecuación es de segundo orden. Después sustituímos las condiciones iniciales dadas en la solución general, y despejamos el valor o los valores de esas constantes. La solución de la ecuación que cumple los datos inciales dados es la que se obtiene dando ese valor o valores a las constantes que antes eran arbitrarias.

Ejemplo 3.1. Sabiendo que todas las soluciones de la ecuación diferencial $y' = (\cos x)y$ son de la forma $y(x) = Ce^{\operatorname{sen} x}$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ hallar la única solución que cumple el siguiente dato inicial:

$$y(0) = 3$$

Sustituyendo $x = 0$, $y(0) = 3$ en la solución general $y(x) = Ce^{\operatorname{sen} x}$, resulta: $3 = Ce^{\operatorname{sen} 0} = C$. Por lo tanto la solución buscada que cumple el dato inicial dado es

$$y(x) = 3e^{\operatorname{sen} x} \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Importante: Obsérvese que como la ecuación es de primer orden, los datos iniciales fueron UNA SOLA CONDICIÓN del tipo $y(x_0) = y_0$, dando el valor real y_0 que resulta de evaluar la función solución desconocida en un punto dado x_0 del eje real.

Ejemplo 3.2. Sabiendo que todas las soluciones de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 3$ son de la forma

$$y(x) = 3 + C_1 e^x + C_2 x e^x \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias, hallar la única solución que cumple con los datos iniciales $y(0) = 4$, $y'(0) = 5$.

Importante: Obsérvese que como la ecuación es de segundo orden, los datos iniciales fueron DOS CONDICIONES, del tipo $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = u_0$, dando los valores reales y_0 y u_0 que resultan de evaluar la función solución desconocida y su derivada primera en un punto dado x_0 del eje real.

Sustituyendo $y(0) = 4$ en la solución general $y(x) = 3 + C_1 e^x + C_2 x e^x \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}$ resulta:

$$4 = 3 + C_1$$

Derivando la solución general se tiene $y'(x) = C_1 e^x + (C_2 x + C_2)e^x$. Sustituyendo en esta última igualdad $y'(0) = 5$, se deduce:

$$5 = C_1 + C_2$$

Entonces tenemos el sistema de ecuaciones algebraicas con dos incógnitas C_1 y C_2 siguiente:

$$4 = 3 + C_1, \quad 5 = C_1 + C_2$$

Tiene como única solución $C_1 = 1, C_2 = 4$. Luego, la única función solución de la ecuación diferencial dada que cumple con los datos iniciales dados es:

$$y(x) = 3 + e^x + 4xe^x \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

4. Ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea.

Definición 4.1. Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea a una ecuación del tipo:

$$y' + a(x)y = 0$$

donde $a(x)$ es una función dada, conocida, definida y continua para todo $x \in \mathbb{R}$.

Nota 4.2. La ecuación diferencial anterior es de variables separadas, ya que es:

$$y' = -a(x) \cdot y$$

Por lo tanto, se resuelve como se vio en la sección que corresponde a las ecuaciones diferenciales de variables separadas.

Teorema 4.3. *Si la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea $y' = by$ tiene coeficiente b igual a una constante real independiente de x, entonces su solución general es:*

$$y(x) = Ce^{bx} \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

donde C es una constante real arbitraria.

Demostración:

$$y' = by \ \ \Rightarrow \ \ y \equiv 0 \text{ ó } \int \frac{y'(x)}{y(x)} = \int b\, dx \ \ \Rightarrow \ \ \int \frac{dy}{y} = C + bx, \ \ \Rightarrow \ \ \log|y| = C + bx \ \ \Rightarrow$$

$$|y| = e^C e^{bx} \ \ \Rightarrow \ \ y = \pm e^C e^{bx}$$

Llamando $k = \pm e^C$ o $k = 0$ en el caso de la solución $y \equiv 0$, se obtiene, como solución general:

$$y = ke^{bx} \ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

donde k es una constante real arbitraria. $\square$

5. Ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea, método de variación de constante.

Definición 5.1. Se llama ecuación diferencial lineal de primer orden no homogénea a una ecuación del tipo:

$$y' + a(x)y = r(x)$$

donde $a(x)$ y $r(x)$ son funciones dadas, conocidas, definidas y continuas para todo $x \in \mathbb{R}$, tal que $r(x)$ no es idénticamente nula. (Si $r(x)$ fuera idénticamente nula sería la ecuación diferencial lineal de primer orden homogénea, vista en la sección anterior.)

Importante: Obsérvese que en el miembro a la derecha de la ecuación diferencial no homogénea está la función $r(x)$ que es INDEPENDIENTE DE y.

Procedimiento de resolución de la ecuación diferencial lineal no homogénea.

5.2. Para resolver la ecuación diferencial lineal no homogénea usaremos el siguiente procedimiento:

1) Hallar la solución general (todas las soluciones) $y_H(x)$ de la ecuación lineal homogénea correspondiente, es decir de de la misma ecuación diferencial pero sustituyendo $r(x)$ por la función idénticamente nula. Cómo hallar $y_H(x)$ fue explicado en la sección anterior de estas notas. Se obtiene la solución general $y_H(x)$ que depende de UNA constante C arbitraria real.

2) Hallar una solución particular (una sola cualquiera, pero una sola) $y_P(x)$ de la ecuación diferencial dada no homogénea. Cómo hallar $y_P(x)$ se explicará al final de esta sección, usando el "método de variación de la constante".

3) Sumar la solución general de la homogénea $y_H(x)$ (todas las soluciones de la ecuación diferencial homogénea halladas en el paso 1, que depende de una constante C arbitraria real) más la solución particular $y_P(x)$ de la no homogénea (UNA SOLA SOLUCIÓN PARTICULAR), hallada en el paso 2.

Nos estaremos basando en el siguiente teorema:

Teorema 5.3. *La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la solución general de la ecuación homogénea asociada, más una (y solo una, cualquiera pero solo una) solución particular de la ecuación diferencial dada no homogénea.*

Demostración: Sean las siguientes ecuaciones diferenciales: (NH) es la no homogénea dada, y (H) es la homogénea asociada a la dada:

$$y' + a(x)y = r(x) \qquad (NH)$$

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (H)$$

Sea $y_H(x)$ la solución general de (H) (es decir todas las soluciones de (H); dependiendo de una constante arbitraria C).

Sea $y_P(x)$ una solución particular de (NH) (es decir una y solo una, cualquiera pero solo una, solución de (NH). Después veremos cómo se encuentra).

Hay que probar las siguientes dos afirmaciones:

(A) Llamando $y(x)$ a la suma $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$ se cumple $y(x)$ es una solución de (NH).

(B) Toda solución $y(x)$ de (NH), es igual a $y_H(x) + y_P(x)$ para alguna solución $y_H(x)$ de la homogénea.

Prueba de (A): Sabemos que $y'_H(x) + a(x)y_H(x) = 0$. Además $y'_P(x) + a(x)y_P(x) = r(x)$. Sumando miembro a miembro ambas igualdades anteriores, y sabiendo que $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, se obtiene: $y'(x) + a(x)y(x) = r(x)$ con lo cual queda probado que $y(x)$ es una solución de (NH) como queríamos probar en la afirmación (A).

Prueba de (B): Tomemos cualquier solución $y(x)$ de (NH) y una solución particular $y_P(x)$ también de (NH). Se cumple: $y'(x) + a(x)y(x) = r(x), \quad y'_P(x) + a(x)y_P(x) = r(x)$. Restando miembro a miembro ambas igualdades anteriores, obtenemos:

$$(y(x) - y_P(x))' + a(x)(y(x) - y_P(x)) = 0$$

Por lo tanto la función $y(x) - y_P(x)$ es solución de la ecuación diferencial homogénea, y está incluida por eso en alguna de las funciones $y_H(x)$, es decir $y(x) - y_P(x) = y_H(x)$, de donde $y(x) = y_H(x) + y_P(x)$, como queríamos probar en la afirmación (B). $\square$

5.4. Método de variación de constante.

Para hallar una solución particular $y_P(x)$ de la ecuación diferencial(NH) no homogénea dada, probaremos con una función de cierto tipo, como se describe:

Paso I) En la solución general $y_H(x)$ de la ecuación diferencial homogénea asociada (H)(que tendrá que haber sido resuelta antes de aplicar este método), aparece una constante arbitraria C real.

Paso II) **Tomaremos $y_P(x)$ igual a $y_H(x)$ pero donde dice C pondremos una función desconocida $C(x)$,** (haciendo "variar" lo que antes era constante C, haciéndolo depender ahora de x). Habrá que determinar la función desconocida $C(x)$, escribiendo una función genérica $C(x)$ en vez de C, llamando ahora $y_P(x)$ en vez de $y_H(x)$ a lo que se obtiene.

Paso III) Sustituyendo $y_P(x)$ en la ecuación diferencial (NH) no homogénea dada, haciendo que la verifique, se despeja y encuentra $C(x)$. De todas las posibles funciones $C(x)$ que se despejen (en general son infinitas), habrá que elegir UNA SOLA (cualquiera, pero una sola). Es un teorema que no demostraremos, que existen alguna e infinitas $C(x)$.

Paso IV) La función $C(x)$ hallada en el paso anterior se sustituye dentro de la expresión de $y_P(x)$ para obtener la solución particular buscada de la ecuación diferencial no homogénea.

Ejemplo 5.5. Resolver $y' = (\cos x)y + \cos x \qquad (NH)$.

La ecuación homogénea asociada es $y' - (\cos x)y = 0 \qquad (H)$.

La función $r(x)$ que hace que la ecuación dada sea no homogénea, es $r(x) = \cos x$.

1) Resolvemos la ecuación homogénea (H), como fue descrito en el ejemplo 2.3. Obtenemos $y_H = Ce^{\operatorname{sen} x} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$, donde C es una constante arbitraria real.

2) Hallaremos una solución particular $y_P(x)$ de la ecuación diferencial dada no homogénea (NH), usando el método de variación de constante.

3) Una vez hallada $y_P(x)$ tendremos la solución general de (NH) como:

$$y(x) = Ce^{\operatorname{sen} x} + y_P(x)$$

donde C es una constante real arbitraria, independiente de x.

Ejecutemos ahora con detalle el punto 2) aplicando el método de variación de constante: el paso I) es lo realizado en el punto 1) y en el ejemplo 2.3: resolver la ecuación asociada homogénea para obtener $y_H = Ce^{\operatorname{sen} x}$.

Ahora el paso II): Escribimos $y_P(x)$ en forma genérica, igual que $y_H(x)$ pero sustituyendo C por una función desconocida $C(x)$:

$$y_P(x) = C(x)e^{\operatorname{sen} x}$$

Ahora el paso III): sustituimos esta $y_P(x)$ en la ecuación dada no homogénea (NH):

$$(C(x)e^{\operatorname{sen} x})' = (\cos x)(C(x)e^{\operatorname{sen} x}) + \cos x$$

$$(C'(x) + C(x)\cos x)e^{\operatorname{sen} x} = C(x)(\cos x)e^{\operatorname{sen} x} + \cos x$$

$$C'(x) = e^{-\operatorname{sen} x}\cos x \;\Rightarrow\; C(x) = \int e^{-\operatorname{sen} x}\cos x\, dx = (\int e^{-u}\, du)|_{u=\operatorname{sen} x} = -e^{-u} + k|_{u=\operatorname{sen} x} = -e^{-\operatorname{sen} x} + k$$

Elegimos una sola de estas $C(x)$, para lo cual elegimos por ejemplo $k = 0$:

$$C(x) = -e^{-\operatorname{sen} x} \quad \Rightarrow \quad \text{(Paso IV): } y_P(x) = -e^{-\operatorname{sen} x}e^{\operatorname{sen} x} = -1$$

En nuestro caso quedó la solución particular $y_P(x)$ constante igual a -1.

Veamos, para corroborar que no hubo error al aplicar el procedimiento, si efectivamente la función constante igual a -1 verifica la ecuación diferencial dada no homogénea (NH) $y' = (\cos x)y + \cos x$: $y_P(x) = -1 \Rightarrow \ y'_P(x) = 0 \Rightarrow \ 0 = (\cos x)(-1) + \cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Efectivamente $y_P(x) = -1$ verifica la ecuación dada.

Nota: Si uno a simple vista o probando como sea, descubre una solución particular $y_P(x)$ de la ecuación lineal no homogénea dada, puede usar esta como solución particular en el punto 2) de nuestro procedimiento, sin necesidad de aplicar el método de variación de constante.

Conclusión del ejemplo 5.5: La solución general de la ecuación diferencial no homogénea dada en (NH) es

$$y(x) = Ce^{\operatorname{sen} x} - 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

donde C es una constante arbitraria real.

Ejemplo 5.6. Hallar la solución de la ecuación diferencial $y' = (\cos x)y + \cos x$ con el dato inicial $y(0) = 4$. En el ejemplo anterior hallamos la solución general de esa ecuación diferencial: $y(x) = Ce^{\operatorname{sen} x} - 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$. Ahora imponemos que se cumpla el dato inicial para determinar el valor de la constante real C, evaluando la solución general en $x = 0$:

$4 = Ce^{\operatorname{sen} 0} - 1 = C - 1 \ \ \Rightarrow \ \ C = 5 \ \ \Rightarrow \ \ y(x) = 5e^{\operatorname{sen} x} - 1.$

6. Ecuación diferencial lineal de segundo orden a coeficientes constantes y homogénea.

Definición 6.1. Una ecuación diferencial de segundo orden se llama lineal a coeficientes constantes y homogénea si es:

$$y'' + ay' + by = 0$$

donde a y b son constantes dadas independientes de x y de y.

Teorema 6.2. Estructura vectorial de las soluciones de la ecuación lineal homogénea:
Todas las funciones soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden homogénea forman UN ESPACIO VECTORIAL DE DIMENSIÓN DOS.

Es fácil comprobar que si $y_1(x)$ e $y_2(x)$, definidas para todo $x \in \mathbb{R}$, son soluciones de $y'' + ay' + by = 0$, entonces cualquier combinación lineal de ellas $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ también es solución. Por lo tanto el conjunto de las funciones soluciones forman un subespacio vectorial del espacio vectorial de todas las funciones $f(x)$ reales de una variable real $x \in \mathbb{R}$. No demostraremos que ese subespacio tiene dimensión dos, pero lo usaremos del siguiente modo:

Corolario 6.3. *Si dos funciones solución $y_1(x)$ e $y_2(x)$ de la ecuación diferencial $y''+ay'+by = 0$* **son linealmente independientes,** *entonces forman una base del espacio vectorial de todas las soluciones. Por lo tanto el espacio de soluciones está generado por y_1 e y_2, es decir, las solución general es:*

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias.

Por lo tanto, para hallar la solución general de la ecuación lineal homogénea de segundo grado, **basta hallar dos soluciones particulares que sean linealmente independientes.** Es lo que haremos a continuación:

6.4. Soluciones exponenciales. Buscaremos soluciones $y(x) = e^{\lambda x}$, donde λ es una constante real a determinar, que sean solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$.

Sustituyendo en la ecuación diferencial $y(x) = e^{\lambda x}$, $y'(x) = \lambda e^{\lambda x}$, $y''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$, se obtiene:

$$(\lambda^2 + a\lambda + b)e^{\lambda x} \equiv 0, \;\; \Leftrightarrow \;\; \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \;\; \Leftrightarrow$$

λ es raíz de la siguiente ecuación algebraica de segundo grado, llamada **ecuación característica**, que es una ecuación algebraica de segundo grado:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Conclusión: $y(x) = e^{\lambda x}$ **para** $x \in \mathbb{R}$ **es solución de la ecuación diferencial** $y'' + ay' + by = 0$ **si y solo si el número** λ **es raíz de la ecuación característica** $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$**.** Por lo tanto hallando las raíces reales de la ecuación característica (si existen) se hallan todas las soluciones exponenciales de la ecuación diferencial lineal homogénea.

Ejemplo 6.5. Hallar todas las soluciones exponenciales, si existe alguna, de las siguientes ecuaciones:
A) $y'' - 5y' + 6y = 0$
B) $y'' + 2y' + y = 0$
C) $y'' + 2y + 2y = 0$

A) La ecuación característica de A) es $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ que tiene dos raíces reales $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$. Por lo tanto la ecuación diferencial lineal dada en A) tiene dos soluciones exponenciales que son $y_1(x) = e^{3x}$ e $y_2(x) = e^{2x}$. Las dos funciones exponenciales $y_1(x)$ e $y_2(x)$ con exponentes reales distintos son linealmente independientes (lo cual se verifica aplicando la definición de independencia lineal), por lo tanto, USANDO EL COROLARIO 6.3, la solución general de la ecuación diferencial A) es:

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias.

B) La ecuación característica de B) es $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ que tiene una sola raíz real doble $\lambda_0 = -1$. Por lo tanto la ecuación diferencial lineal dada en B) tiene una sola solución exponencial que es $y_1(x) = e^{-x}$. No podemos hallar todavía la solución general de la ecuación diferencial B) porque para ello es necesario disponer de dos soluciones linealmente independientes y aplicar el corolario 6.3, y tenemos por ahora una sola solución $y = e^{-x}$.

C) La ecuación característica de C) es $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ que tiene dos raíces complejas conjugadas no reales $1 \pm i$. Por lo tanto la ecuación diferencial lineal dada en C) NO tiene solución exponencial de la forma $y(x) = e^{\lambda x}$ con λ real. No podemos hallar todavía ninguna solución de la ecuación diferencial C).

6.6. Procedimiento para hallar la solución general de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden a coeficientes constantes:

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (H)$$

Primero encontramos las raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ discutiendo según tres casos:

Caso A) La ecuación característica tiene dos raíces reales diferentes λ_1 y λ_2. Esto sucede cuando el discriminante es positivo: $\Delta = a^2 - 4b > 0$. Así como se vio en el ejemplo 6.5 parte A):

La solución general de la ecuación diferencial (H) $y'' + ay' + by = 0$, en este caso A), es

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias, y λ_1 y λ_2 son las dos raíces reales distintas de la ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Caso B) La ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tiene una raíz real doble λ_0. Esto sucede cuando el discriminante es nulo: $\Delta = a^2 - 4b = 0$. Y la raíz es $\lambda_0 = -a/2$.

Caso C) La ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tiene dos raíces complejas conjugadas no reales $\alpha \pm i\beta$. Esto sucede cuando el discriminante es negativo: $\Delta = a^2 - 4b < 0$.

Solución general en el caso B) cuando la ecuación característica tiene una sola raíz real (doble). Sabemos que una solución de la ecuación diferencial (H) es la exponencial $y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$ donde $\lambda_0 = -a/2$ es la única raíz real de la ecuación característica. Probemos que otra solución es $y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$. En efecto, se tiene $y_2' = (1 + \lambda_0 x)e^{\lambda_0 x}$, $y_2'' = (2\lambda_0 + \lambda_0^2 x)e^{\lambda_0 x}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial (H). $y'' + ay' + by = 0$ se obtiene

$$[2\lambda_0 + \lambda_0^2 x + a(1 + \lambda_0 x) + bx]e^{\lambda_0 x} \equiv 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\lambda_0 + a + x(\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b) \equiv 0 \quad (2)$$

Por un lado sabemos que λ_0 es raíz de la ecuación característica, entonces $\lambda_0^2 + a\lambda_0 + b = 0$, y por otro lado sabemos que $\lambda_0 = -a/2$, entonces $2\lambda_0 + a = 0$. Por lo tant, en (2) queda la identidad $0 = 0$, y la función $y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$ usada verifica la ecuación diferencial, como queríamos probar.

Entonces tenemos dos soluciones de la ecuación diferencial dada (H), cuando la ecuación característica tiene una única raíz real λ_0 doble: $y_1(x) = e^{\lambda_0 x}$, $y_2(x) = xe^{\lambda_0 x}$. Aplicando la definición de independencia lineal es fácil probar que estas dos funciones solución son linealmente independientes. Usando el corolario 6.3 deducimos lo siguiente:

La solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$, en este caso B), es

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias, y λ_0 es la única raíz real (doble) de la ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Solución general en el caso C) cuando la ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ tiene dos raíces complejas conjugadas no reales $\alpha \pm i\beta$, donde α y β son reales y $\beta > 0$.

Probemos que una solución es $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ y que otra solución es $y_2(x) = e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$.

En efecto, basta probar que la función compleja $y_1(x) + iy_2(x) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x))$ verifica la ecuación diferencial (H): $y'' + ay' + by = 0$, pues si así es, entonces separando su parte real $y_1(x)$ de su parte imaginaria $y_2(x)$, ambas deben verificar la ecuación diferencial (H). Se tiene

$$y_1(x) + iy_2(x) = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x))$$

$$(y_1 + iy_2)' = ((\alpha + i\beta)\cos(\beta x) + (\alpha + i\beta)i\operatorname{sen}(\beta x))\ e^{\alpha x} = (\alpha + i\beta)(\cos(\beta x) + i\operatorname{sen}(\beta x))e^{\alpha x}$$

$$(y_1 + iy_2)'' = (\alpha + i\beta)^2(\cos(\beta x) + i\,\mathrm{sen}(\beta x))e^{\alpha x}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial (H): $y'' + ay' + by = 0$, escribiendo $y_1(x) + iy_2(x)$ en vez de y, se obtiene

$$[(\alpha + i\beta)^2 + a(\alpha + i\beta) + b](\cos(\beta x) + i\,\mathrm{sen}(\beta x))e^{\alpha x} \equiv 0 \quad (3)$$

Sabemos que $\alpha + i\beta$ es raíz de la ecuación característica, entonces $(\alpha+i\beta)^2 + a(\alpha+i\beta)+b = 0$, y por lo tanto en (3) queda la identidad $0 = 0$. Hemos probado que las funciones $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $y_2(x) == e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$ verifican la ecuación diferencial, como queríamos demostrar.

Entonces tenemos dos soluciones de la ecuación diferencial dada (H), cuando la ecuación característica tiene dos raíces complejas conjugadas no reales: $y_1(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$ e $y_2(x) = e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$. Aplicando la definición de independencia lineal es fácil probar que estas dos funciones solución son linealmente independientes. Usando el corolario 6.3 deducimos lo siguiente:

La solución de la ecuación diferencial $y'' + ay' + by = 0$, en este caso C), es

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\,\mathrm{sen}(\beta x)$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias, y $\alpha \pm i\beta$ son las dos raíces complejas conjugadas no reales de la ecuación característica $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Ejemplo 6.7. Hallar la solución general de la ecuación diferencial B) $y'' + 2y' + y = 0$ del párrafo 6.5; y la solución general de la ecuación diferencial C) $y'' + 2y' + 2y = 0$ del mismo párrafo.

Por lo visto en el párrafo 6.5 la ecuación característica de la ecuación diferencial B) tiene una raíz real única, doble $\lambda_0 = -1$. Por lo tanto la solución general de B) es

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias reales.

En cambio, la ecuación característica de la ecuación diferencial C) del ejemplo 6.5 no tiene raíces reales, sino un par de raíces complejas conjugadas no reales $1 \pm i$. Entonces la solución general de C) es

$$y(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x)$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias reales.

Ejemplo 6.8. Hallar la solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' + 2y = 0 \qquad (H)$$

con los datos inciales $y(0) = 2;\ y'(0) = 5$.

Nota importante: Como ya fue observado en la sección 2, para las ecuaciones diferenciales de segundo orden, los datos iniciales que determinan una única solución son normalmente DOS condiciones: $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = u_0$, donde x_0, y_0, u_0 son valores reales DADOS.

En el ejemplo 6.7 encontramos la solución general

$$y(x) = e^x(C_1\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x) \qquad (4)$$

de la ecuación diferencial (H), donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias. Habrá que determinar los valores de este par de constantes, imponiendo que se cumpla $y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$. Sustituyendo $x = 0$ e $y(0) = 2$ en la igualdad (4) queda:

$$2 = C_1$$

Derivando (4) respecto de x y sustituyendo después $x = 0$ e $y'(0) = 5$ queda:

$$y'(x) = e^x((C_2 + C_1)\cos x + (C_2 - C_1)\operatorname{sen} x), \quad 5 = C_2 + C_1$$

Resulta entonces el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas para determinar las constantes C_1 y C_2:

$$2 = C_1, \quad 5 = C_2 + C_1 \qquad \Rightarrow \qquad C_1 = 2,\ C_2 = 3$$

Entonces la solución buscada de la ecuación diferencial (H) que cumple los datos iniciales es:

$$y(x) = e^x(2\cos x + 3\operatorname{sen} x)$$

7. Ecuación diferencial lineal de segundo orden a coeficientes constantes no homogénea. Método de selección.

Definición 7.1. Una ecuación diferencial de segundo orden se llama lineal a coeficientes constantes y no homogénea si es:

$$y'' + ay' + by = r(x)$$

donde a y b son constantes dadas independientes de x y de y, y $r(x)$ es una función dada (conocida), continua para todo $x \in \mathbb{R}$ y no idénticamente nula. (Si fuera $r(x) \equiv 0$ entonces la ecuación es homogénea tal como fue definido en 6.1).

7.2. Procedimiento de resolución de la ecuación diferencial lineal no homogénea de segundo grado a coeficientes constantes.

Usaremos el siguiente procedimiento:

1) Hallar la solución general (todas las soluciones) $y_H(x)$ de la ecuación lineal homogénea correspondiente, es decir de de la misma ecuación diferencial pero sustituyendo $r(x)$ por la función idénticamente nula. Cómo hallar $y_H(x)$ fue explicado en la sección anterior de estas notas. Se obtiene la solución general $y_H(x)$ que depende de DOS constantes C_1 y C_2 arbitrarias reales.

2) Hallar una solución particular (una sola cualquiera, pero una sola) $y_P(x)$ de la ecuación diferencial dada no homogénea. Cómo hallar $y_P(x)$ se explicará al final de esta sección, usando el "método de selección".

3) Sumar la solución general de la homogénea $y_H(x)$ (todas las soluciones de la ecuación diferencial homogénea halladas en el paso 1, que depende de las dos constantes C_1 y C_2 arbitrarias reales) más la solución particular $y_P(x)$ de la no homogénea (UNA SOLA SOLUCIÓN PARTICULAR), hallada en el paso 2.

Nos estaremos basando en el siguiente teorema:

Teorema 7.3. *La solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea es igual a la solución general de la ecuación homogénea asociada, más una (y solo una, cualquiera pero solo una) solución particular de la ecuación diferencial dada no homogénea.*

Demostración: Se reproduce la misma demostración del teorema 5.3, pero usando la ecuación lineal de segundo orden en vez de la de primer orden.

7.4. Método de selección.

Para hallar una solución particular $y_P(x)$ de la ecuación diferencial(NH) no homogénea dada:

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (NH)$$

probaremos con una función de cierto tipo, como se describe a continuación:

Paso I) Resolver la ecuación diferencial homogénea asociada (H)

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (H)$$

tal como se explicó en la sección anterior. Para ello primero hay que encontrar todas las raíces, reales o complejas, de la ecuación característica

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Paso II)

Supondremos como hipótesis que la función dada $r(x)$ en el término a la derecha de la ecuación diferencial no homogénea (NH) es

$$r(x) = e^{px}(A(x)\cos(qx) + B(x)\,\mathrm{sen}(qx))$$

donde $A(x)$, $B(x)$ son polinomios en x dados con coeficientes reales (cualquiera de estos dos polinomios $A(x)$ y $B(x)$ puede ser de grado 0, es decir constante real, e incluso idénticamente nulo), y p y q son constantes reales dadas (cualquiera de ellas puede ser 0). Estas constantes y polinomios son conocidos al dar $r(x)$, que es un dato de la ecuación diferencial que se pide resolver. Observar que el coeficiente q dentro del seno es el MISMO que el que está dentro del coseno.

Por ejemplo: si $r(x) = 3$ constante, entonces $r(x) = e^{0x}(3\cos(0x) + 0\,\mathrm{sen}(0x))$, es decir la función constante 3 cumple la hipótesis estipulada tomando $p = 0,\ q = 0,\ A = 3,\ B = 0$.

Si $r(x) = e^{-x}$ entonces $r(x) = e^{-x}(\cos(0x) + 0\,\mathrm{sen}(0x))$, es decir, la función e^{-x} cumple la hipótesis estipulada tomando $p = -1, q = 0, A = 1, B = 0$.

Si $r(x) = 5\,\mathrm{sen}(2x)$, entonces $r(x) = e^{0x}(0\cos(2x) + 5\,\mathrm{sen}(2x))$, es decir la función $5\,\mathrm{sen}(2x)$ cumple la hipótesis estipulada tomando $p = 0,\ q = 2,\ A = 0,\ B = 5$.

Si $r(x) = x^3+7x+1$, entonces $r(x) = e^{0x}((x^3+7x+1)\cos(0x)+0\,\mathrm{sen}(0x))$, es decir, la función $x^3 + 7x + 1$ cumple la hipótesis estipulada tomando $p = 0,\ \ q = 0,\ \ A = x^3 + 7x + 1,\ \ B = 0$.

Si la función $r(x)$ dada en el segundo miembro de la igualdad de la ecuación diferencial (NH) no cumple con la hipótesis estipulada, entonces no se puede aplicar el método de selección que estamos desarrollando.

PASO III) Tomaremos $y_P(x)$ igual a la función seleccionada en cada uno de los casos estudiados a continuación:

1er caso) Si $p \pm iq$ no son raíces de la ecuación característica, entonces

$$y_P(x) = e^{px}(\tilde{A}(x)\cos(qx) + \tilde{B}(x)\,\mathrm{sen}(qx))$$

donde p y q son las MISMAS constantes conocidas, que están en la función $r(x)$ dada, y $\tilde{A}(x)$ y $\tilde{B}(x)$ son polinomios de coeficientes indeterminados reales, **ambos de grado igual al mayor**

de los grados de los polinomios $A(x)$ **y** $B(x)$ **dados.** Los coeficientes reales indeterminados de los polinomios $\tilde{A}(x)$ y $\tilde{B}(x)$ NO SON ARBITRARIOS; son desconocidos, pero a determinar exactamente en el paso IV).

2do. caso) Si $p \pm iq$ son raíces simples (no dobles) de la ecuación característica (esto sucede siempre que $q > 0$ y $p + iq$ sea raíz, y también sucede si $q = 0$ y p es raíz real simple de la ecuación característica), entonces

$$y_P(x) = xe^{px}(\tilde{A}(x)\cos(qx) + \tilde{B}(x)\operatorname{sen}(qx))$$

donde p y q son las MISMAS constantes conocidas, que están en la función $r(x)$ dada, y $\tilde{A}(x)$ y $\tilde{B}(x)$ son polinomios de coeficientes indeterminados reales, **ambos de grado igual al mayor de los grados de los polinomios** $A(x)$ **y** $B(x)$ **dados.** Los coeficientes reales indeterminados de los polinomios $\tilde{A}(x)$ y $\tilde{B}(x)$ NO SON ARBITRARIOS; son desconocidos, pero a determinar exactamente en el paso IV).

3er. caso) Si $q = 0$ y $p + iq = p$ real, es raíz DOBLE de la ecuación característica, entonces

$$y_P(x) = x^2 e^{px}\tilde{A}(x)$$

donde p es la misma constante conocida, que está en la función $r(x)$ dada, y $\tilde{A}(x)$ es polinomio de coeficientes indeterminados reales, **de grado igual al grado del polinomio** $A(x)$ **dado.** Los coeficientes reales indeterminados del polinomio $\tilde{A}(x)$ NO SON ARBITRARIOS; son desconocidos, pero a determinar exactamente en el paso IV).

PASO IV) Sustituyendo la función $y_P(x)$ seleccionada en el paso III), dentro de la ecuación diferencial (NH) no homogénea dada: $y_p''(x) + ay_p'(x) + by_p = r(x)$, se igualan coeficientes de los términos del mismo grado, y se despejan los coeficientes reales de los polinomios $\tilde{A}(x)$ y $\tilde{B}(x)$. Es un teorema que no demostraremos, que existe algún valor para cada uno de los coeficientes antes indeterminados de los polinomios $\tilde{A}(x)$ y $\tilde{B}(x)$, al sustituir $y_P(x)$ en la ecuación diferencial (NH).

PASO V) Los valores de $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ hallados en el paso anterior se sustituyen dentro de la expresión de $y_P(x)$ seleccionada en el paso III, para obtener la solución particular buscada de la ecuación diferencial no homogénea.

Importante: No hay que olvidarse que este método de selección permite (cuando es aplicable, es decir cuando se cumple la hipótesis estipulada en el paso II), hallar solo UNA solución particular $y_P(x)$ de la ecuación diferencial (NH) de segundo grado no homogénea. La solución general de (NH) será como se dijo antes:

$$y(x) = y_H(x) + y_P(x)$$

donde $y_H(x)$ es la solución general de la homogénea, que depende de dos constantes arbitrarias reales C_1 y C_2, y la función $y_P(x)$ es la solución particular de (NH)(una sola), hallada en el paso (V) del método de selección.

Finalmente, si uno además de la ecuación diferencial, tiene datos iniciales $y_(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = u_0$ dados, entonces, la solución buscada se obtiene al final determinando las constantes C_1 y C_2 de modo que $y(x)$ verifique los datos iniciales.

Ejemplo 7.5. Resolver la ecuación diferencial dada en el ejemplo 1.2: $y''+2y'+y = 3 \qquad (NH)$ con los datos iniciales $y(0) = 3,\ \ y'(0) = 7$.

Paso I) La ecuación homogénea asociada es $y'' + 2y' + y = 0 \quad (H)$. La ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ que tiene una raíz real doble $\lambda = -1$. Por lo tanto la solución general de la homogénea es

$$y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} \qquad (5)$$

Paso II) La función $r(x)$ en el segundo miembro de la ecuación diferencial (NH) que hace que la ecuación diferencial dada sea no homogénea, es $r(x) = 3 = e^{0x}(3\cos(0x) + 0\,\mathrm{sen}(0x)$. Por lo tanto cumple la hipótesis estipulada $r(x) = e^{px}(A\cos(qx) + \mathrm{sen}(qx))$, con $p = 0,\ q = 0,\ A = 3,\ B = 0$.

PASO III) $p + iq = 0$, no es raíz de la ecuación característica (porque la única raíz es -1 real doble). Entonces estamos en el caso (1) y seleccionamos

$$y_P(x) = e^{0x}(\tilde{A}\cos(0x) + \tilde{B}\,\mathrm{sen}(0x)) = \tilde{A}, \qquad (6)$$

donde $\tilde{A}$ es una constante (NO ARBITRARIA), real, desconocida y a determinar en el paso IV). (En este ejemplo el valor de $\tilde{B}$ es intrascendente porque está multiplicado por 0).

PASO IV): Sustituyendo $y_P(x) = \tilde{A}$ constante en la ecuación diferencial (NH): $y_P(x)'' + 2y_P(x)' + y_P(x) = 3$, resulta: $y_P(x)'' = 0,\ \ y'_P(x) = 0,\ \ y_P(x) = \tilde{A},\quad 0 + 2\cdot 0 + \tilde{A} = 3,\quad \tilde{A} = 3.$

PASO V) Sustituyendo el valor de $\tilde{A} = 3$ hallado en el paso anterior en la igualdad (6) resulta:

$$y_P(x) = 3 \text{ constante}$$

Nota: En este ejemplo de casualidad quedó $y_P(x)$ igual a $r(x)$, pero esto no es necesariamente verdad en otros ejemplos de ecuaciones diferenciales.

La solución general de (NH) es, usando la igualdad (5):

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + 3 \qquad (7)$$

Ahora hallemos las constantes C_1 y C_2 para que se cumplan los datos iniciales $y(0) = 3,\ y'(0) = 7$. Sustituyendo $x = 0,\ y(0) = 3$ en la igualdad (7), se obtiene: $3 = C_1 + 3$. Por otra parte, derivando (7) y después sustituyendo $x = 0,\ y'(0) = 7$ se obtiene: $7 = -C_1 + C_2$. Luego, $C_1 = 0,\ \ C_2 = 7$, y por lo tanto la solución buscada es

$$y(x) = 7xe^{-x} + 3 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Nota: Si uno a simple vista o probando como sea, descubre una solución particular $y_P(x)$ de la ecuación lineal no homogénea dada, puede usar esta como solución particular en nuestro procedimiento, sin necesidad de aplicar el método de selección. Así, en el ejemplo 7.5, uno podría haberse dado cuenta a ojo, sin aplicar el método de selección, que la ecuación diferencial dada $y'' + 2y' + y = 3$ admite como una solución particular la solución $y_P(x) = 3$ constante para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 7.6. Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = 3x^2 + 5x \quad (NH)$. La ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$ que tiene dos raíces complejas conjugadas que son i y $-i$. La solución general de la homogénea asociada es entonces:

$$y_H(x) = C_1 \cos x + C_2 \,\mathrm{sen}\, x$$

El segundo miembro de la ecuación diferencial dada (NH) es

$r(x) = 3x^2 + 5x = e^{0x}((3x^2 + 5x)\cos(0x) + 0\,\mathrm{sen}(0x))$. Es de la forma estipulada en el paso II del método de selección, con $p = 0$, $q = 0$, $A(x) = 3x^2 + 5x$, $B = 0$. Como $p + iq = 0$ no es raíz de la ecuación característica, probaremos con

$$y_P(x) = \tilde{A}(x)\cos(0x) + \tilde{B}(x)\,\mathrm{sen}(0x) = \tilde{A}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

En la igualdada anterior se tuvo en cuenta que el grado de los polinomios $\tilde{A}$ y $\tilde{B}$ es dos, porque es el grado del polinomio dado A. El polinomio $\tilde{B}$ es intrascendente porque está multiplicado por 0. Se escribió un polinomio genérico $\tilde{A}$ de grado dos, con coeficientes indeterminados a determinar. Sustituyendo en la ecuación diferencial (NH) queda:

$y_P(x)' = 2\alpha x + \beta$, $y_P(x)'' = 2\alpha$, $y_P'' + y_p = 3x^2 + 5x$, $\Rightarrow$ $2\alpha + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 3x^2 + 5x$ $\Rightarrow$ $\alpha = 3$, $\beta = 5$, $2\alpha + \gamma = 0$, $\gamma = -6$ $\Rightarrow$

$$y_P(x) = 3x^2 + 5x - 6, \quad y(x) = C_1 \cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x + 3x^2 + 5x - 6$$

es la solución general de la ecuación diferencial dada, donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias reales.

Ahora veremos algún otro caso en que $r(x)$ no cumple con la hipótesis estipulada en el paso II del método de selección.

Proposición 7.7. *Sea dada la ecuación diferencial*

$$y'' + ay' + by = r(x) \qquad (NH)$$

donde $r(x)$ es una función conocida que puede descomponerse como suma $r(x) = r_1(x) + r_2(x)$.

Se consideran las ecuaciones diferenciales auxiliares:

$$y'' + ay' + by = r_1(x) \qquad (NH1)$$

$$y'' + ay' + by = r_2(x) \qquad (NH2)$$

y sean $y_{1,P}(x)$ e $y_{2,P}(x)$ soluciones particulares de (NH1) y de (NH2) respectivamente.

Entonces:

$$y_P(x) = y_{1,P}(x) + y_{2,P}(x)$$

es una solución particular de la ecuación diferencial dada (NH).

Demostración: Por hipótesis:

$$y_{1,P}'' + ay_{1,P}' + by_{1,P} = r_1(x) \qquad (NH1)$$

$$y_{2,P}'' + ay_{2,P}' + by_{2,P} = r_2(x) \qquad (NH2)$$

Sumando miembro a miembro las dos igualdades anteriores, y usando que $y_P(x) = y_{1,P}(x) + y_{2,P}(x)$, se obtiene:

$$y_P'' + ay_P' + by_P = r_1(x) + r_2(x) = r(x)$$

Entonces $y_P(x)$ verifica la ecuación diferencial (NH) como queríamos demostrar. $\square$

Nota: El teorema anterior vale, aplicándolo varias veces, si $r(x)$ se puede descomponer como suma de tres o más sumandos, en vez de solo dos, considerando las tres o más ecuaciones diferenciales auxiliares correspondientes a cada uno de estos sumandos, y sus respectivas soluciones particulares. La suma de todas ellas es solución particular de la ecuación diferencial dada (NH).

Ejemplo 7.8. Hallar la solución general de la ecuación diferencial:

$$y'' + 2y' + y = 3 + 2e^{-x} + \cos x - \operatorname{sen}(2x)$$

.

La ecuación homogénea es $y'' + 2y' + y = 0$ que ya vimos en el ejemplo 7.5 que tiene como solución

$$y_H(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$$

donde C_1 y C_2 son constantes arbitrarias reales. La ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ tiene una única raíz, que es real y doble $\lambda = -1$.

La función dada $r(x) = 3 + 2e^{-x} + \cos x - \operatorname{sen}(2x)$ no cumple la hipótesis estipulada en el paso (II) del método de selección, pero se puede descomponer en la suma de 4 funciones tales que cada una de ellas sí la cumplen: $r(x) = r_1(x) + r_2(x) + r_3(x) + r_4(x)$, $\;r_1(x) = 3$, $\;r_2(x) = 2e^{-x}$, $\;r_3(x)\cos x$, $\;r_4(x) = -\operatorname{sen}(2x)$. Tenemos así cuatro ecuaciones diferenciales no homogéneas auxiliares:

$$y'' + 2y' + y = 3 \qquad (NH1)$$

$$y'' + 2y' + y = 2e^{-x} \qquad (NH2)$$

$$y'' + 2y' + y = \cos x \qquad (NH3)$$

$$y'' + 2y' + y = -\operatorname{sen}(2x) \qquad (NH4)$$

Observamos que no podemos juntar $r_3(x) + r_4(x) = \cos x - \operatorname{sen}(2x)$ en una sola ecuación para aplicar a ambas juntas el método de selección una sola vez, porque el coeficiente $q = 1$ dentro del coseno $\cos(qx)$ es diferente del coeficiente $q = 2$ dentro del seno $\operatorname{sen}(qx)$.

Una solución particular de la ecuación (NH1) ya fue hallada en el ejemplo 7.5 y es

$$y_{1,P} = 3$$

Ahora busquemos una solución particular de cada una de las ecuaciones (NH2), (NH3) y (NH4):

Para la ecuación (NH2): $r_2(x) = 2e^{-x} = e^{px}(A\cos(qx) + B\operatorname{sen}(qx))$, donde $p = -1$, $\;q = 0$, $\;A = 1$, $\;B = 0$. El número $p + iq = -1$ es raíz doble de la ecuación característica. Luego, estamos en el 3er. caso del paso III) del método de selección, y la solución particular buscada es de la forma $y_{2,P}(x) = \tilde{A}x^2e^{-x}$. Sustituyendo esta función en la ecuación diferencial (NH2) queda: $y_{2,P}(x)' = \tilde{A}(2x - x^2)e^{-x}$, $\;y_{2,P}(x)'' = \tilde{A}(2 - 4x + x^2)e^{-x}$, $\;\tilde{A}e^{-x}(2 - 4x + x^2 + 4x - 2x^2 + x^2) = 2e^{-x}$, $\;\Rightarrow \tilde{A} = 1$. Por lo tanto

$$y_{2,P}(x) = x^2e^{-x}$$

Para la ecuación (NH3): $r_3(x) = \cos x = e^{px}(A\cos(qx) + B\operatorname{sen}(qx))$, donde $p = 0$, $\;q = 1$, $\;A = 1$, $\;B = 0$. El número $p + iq = i$, imaginario puro, no es raíz de la ecuación característica (porque la única raíz es el real -1, raíz doble). Entonces estamos en el 1er. caso del paso III) del método de selección, y la solución particular buscada es de la forma $y_{3,P}(x) = \tilde{A}\cos x + \tilde{B}\operatorname{sen} x$. Sustituyendo esta función en la ecuación diferencial (NH3) queda: $y'_{3,P} = \tilde{B}\cos x - \tilde{A}\operatorname{sen} x$, $\;y''_{3,P} = -\tilde{A}\cos x - \tilde{B}\operatorname{sen} x$, $\;2\tilde{B}\cos x - 2\tilde{A}\operatorname{sen} x = \cos x \;\;\forall x \in \mathbb{R}$, $\;\Rightarrow$, $\;\tilde{B} = 1/2$, $\tilde{A} = 0$. Por lo tanto

$$y_{3,P}(x) = (\operatorname{sen} x)/2$$

Observación: Aunque la función $r_3(x) = \cos x$ dada, se obtenga con $B = 0$, porque $r_3(x)$ es un coseno y no aparece en ella el seno, la solución particular buscada no puede suponerse que es un coseno (con $\tilde{B} = 0$), porque justamente en este caso quedó $\tilde{B} \neq 0$. Concluimos que si el segundo miembro de la ecuación diferencial es un coseno, la solución particular no puede buscarse como una constante por un coseno, sino que hay que considerar siempre la combinación lineal del coseno con el seno: $\tilde{A}\cos(qx) + \tilde{B}\,\mathrm{sen}(qx)$.

Para la ecuación (NH4): $r_4(x) = -\,\mathrm{sen}(2x) = e^{px}(A\cos(qx) + B\,\mathrm{sen}(qx))$, donde $p = 0$, $q = 2$, $A = 0$, $B = -1$. El número $p + iq = 2i$, imaginario puro, no es raíz de la ecuación característica (porque la única raíz es el real -1, raíz doble). Entonces estamos en el 1er. caso del paso III) del método de selección, y la solución particular buscada es de la forma $y_{3,P}(x) = \tilde{A}\cos(2x) + \tilde{B}\,\mathrm{sen}(2x)$. Sustituyendo esta función en la ecuación diferencial (NH4) queda: $y'_{3,P} = 2\tilde{B}\cos(2x) - 2\tilde{A}\,\mathrm{sen}(2x)$, $y''_{3,P} = -4\tilde{A}\cos(2x) - 4\tilde{B}\,\mathrm{sen}(2x)$, $(-3\tilde{A} + 4\tilde{B})\cos(2x) - (3\tilde{B} + 4\tilde{A})\,\mathrm{sen}(2x) = -\,\mathrm{sen}(2x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Rightarrow$, $-3\tilde{A}+4\tilde{B} = 0$, $3\tilde{B}+4\tilde{A} = 1$, $\Rightarrow \tilde{A} = 4/25$, $\tilde{B} = 3/25$. Por lo tanto

$$y_{3,P}(x) = (4\cos(2x) + 3\,\mathrm{sen}(2x))/25$$

Observación: Aunque la función $r_4(x) = -\,\mathrm{sen}(2x)$ dada, se obtenga con $A = 0$, porque $r_4(x)$ es un seno y no aparece en ella el coseno, la solución particular buscada no puede suponerse que es un seno (con $\tilde{A} = 0$), porque justamente en este caso quedó $\tilde{A} \neq 0$. Concluimos que si el segundo miembro de la ecuación diferencial no homogénea es un seno, la solución particular no puede buscarse como una constante por un seno, sino que hay que considerar siempre la combinación lineal del coseno con el seno: $\tilde{A}\cos(qx) + \tilde{B}\,\mathrm{sen}(qx)$.

Sumando las soluciones particulares halladas para las cuatro ecuaciones (NH1), (NH2), (NH3) y (NH4) se obtiene una solución particular de la ecuación dada (NH):

$$y_P(x) = 3 + x^2e^{-x} + \frac{\mathrm{sen}\,x}{2} + \frac{2\cos(2x) + 3\,\mathrm{sen}(2x)}{25}$$

Sumando la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada, se tiene la solución general de la ecuación diferencial (NH) dada:

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + 3 + x^2e^{-x} + \frac{\mathrm{sen}\,x}{2} + \frac{4\cos(2x) + 3\,\mathrm{sen}(2x)}{25}$$

donde C_1 y C_2 son constantes reales arbitrarias.