SOLUCIÓN VERSIÓN 1
Examen de Matemática Discreta I

Miércoles 7 de febrero de 2024

MO1	MO2	MO3	MO4	MO5
C	B	D	A	B

Múltiple Opción 1

Determinar la cantidad de enteros entre 1 y 462 (inclusive) que no son múltiplos ni de 3 ni de 7 ni de 11.

(A) 262 (B) 244 (C) 240 (D) 220 (E) 200

Solución de la Múltiple Opción 1

Sea $\mathcal{U} = \{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x \leq 462\}$. Consideremos las siguientes 3 condiciones sobre los elementos pertenecientes a $\mathcal{U}$:

- c_3: el elemento x de $\mathcal{U}$ es múltiplo de 3;
- c_7: el elemento x de $\mathcal{U}$ es múltiplo de 7;
- c_{11}: el elemento x de $\mathcal{U}$ es múltiplo de 11.

Para determinar la cantidad de elementos de $\mathcal{U}$ que no son múltiplos ni de 3 ni de 7 ni de 11 vamos a emplear el principio de inclusión y exclusión dentro del conjunto $\mathcal{U}$ con la terna de condiciones c_3, c_7 y c_{11}. Tenemos entonces lo siguiente:

$$\begin{aligned} n(\overline{c_3}, \overline{c_7}, \overline{c_{11}}) &= |\mathcal{U}| - n(c_3) - n(c_7) - n(c_{11}) + n(c_3, c_7) + n(c_3, c_{11}) + n(c_7, c_{11}) - n(c_3, c_7, c_{11}) \\ &= 462 - 2 \times 7 \times 11 - 2 \times 3 \times 11 - 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 11 + 2 \times 7 + 2 \times 3 - 2 = 240. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la opción correcta es la C.

Múltiple Opción 2

Hallar el menor entero natural n tal que, dados n dígitos diferentes (entre 0 y 9 inclusive), se puede asegurar que existen dos de ellos cuyos cuadrados difieran en un múltiplo de 6.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

Solución de la Múltiple Opción 2

Sean $\mathcal{D} = \{0, 1, \ldots, 9\}$ y $\mathcal{N} = \{\{0, 6\}, \{1, 5, 7\}, \{2, 4, 8\}, \{3, 9\}\}$. Sea $\mathcal{P}$ un subconjunto de $\mathcal{D}$ con 5 elementos o más. Identifiquemos a cada uno de los elementos del conjunto $\mathcal{P}$ como las palomas y a cada una de las partes de la partición $\mathcal{N}$ como los nidos. Como $\mathcal{N}$ es una partición de $\mathcal{P}$, tenemos que cada paloma se aloja en algún nido. Además, como la partición $\mathcal{N}$ tiene exactamente 4 partes y $|\mathcal{P}| \geq 5$, tenemos que $|\mathcal{P}| > |\mathcal{N}|$. Por el principio del Palomar siempre tendremos al menos 2 elementos de $\mathcal{P}$ pertenecientes a alguna parte de $\mathcal{N}$. Es sencillo notar que cada parte de $\mathcal{N}$ cumple que los cuadrados de sus elementos difieren en un múltiplo de 6. Hemos probado hasta el momento que cualquier elección de 5 o más dígitos cumple que tiene al menos 2 de ellos cuyos cuadrados difieren en un múltiplo de 6. Por último, notemos que el conjunto X dado por $X = \{0, 1, 2, 3\}$ tiene 4 elementos y no cumple con dicha condición. Por lo tanto, el menor natural n que cumple la condición estudiada es 5, y la respuesta correcta es la B.

Múltiple Opción 3

Se considera la sucesión definida por la relación de recurrencia

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = 4^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Entonces:

(A) $a_n = -\frac{5}{36}(-4)^n + \frac{5}{36}2^n + \frac{1}{24}n4^n$
(B) $a_n = (\frac{1}{36}n^2 + \frac{4}{27})4^n - \frac{4}{27}(-2)^n$
(C) $a_n = (\frac{1}{36}n + \frac{4}{27})4^n - \frac{4}{27}(-2)^n$
(D) $a_n = (\frac{1}{24}n + \frac{5}{36})4^n - \frac{5}{36}(-2)^n$
(E) $a_n = \frac{1}{6}4^n - \frac{1}{6}(-2)^n$

Solución de la Múltiple Opción 3

Recordemos que es posible resolver recurrencias lineales a coeficientes constantes hallando una solución general del problema homogéneo correspondiente y luego sumando una solución particular del problema original.

El problema homogéneo consiste en encontrar una solución general de $a_{n+2} - 2a_{n+1} - 8a_n = 0$. El polinomio característico es $x^2 - 2x + 8$, o equivalentemente, $(x-4)(x+2)$, que tiene raíces -2 y 4. Entonces, la solución general del problema homogéneo es $a_n^{(H)} = c_1(-2)^n + c_2 4^n$, donde c_1 y c_2 son dos constantes arbitrarias.

Busquemos una solución del problema original de la forma $a_n^{(P)} = cn4^n$, donde c es una constante. Reemplazando la expresión de $a_n^{(P)}$ en la recurrencia resulta que c debe satisfacer la siguiente igualdad:

$$c(n+2)4^{n+2} - 2c(n+1)4^{n+1} - 8cn4^n = 4^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Por lo tanto, $(16c(n+2) - 8c(n+1) - 8cn)4^n = 4^n$, y esta igualdad se cumple si y sólo si $24c = 1$, o equivalentemente, si y sólo si $c = \frac{1}{24}$.

Concluimos que $a_n = a_n^{(H)} + a_n^{(P)} = c_1(-2)^n + c_2 4^n + \frac{n}{24}4^n$. Por último, vamos a hallar las constantes c_1 y c_2 utilizando que $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$. Como $a_0 = 0$ tenemos que $c_1 + c_2 = 0$, y como $a_1 = 1$ tenemos que $-2c_1 + 4c_2 + \frac{1}{6} = 1$. Tras duplicar la primera ecuación y sumar la segunda tenemos que $6c_2 + \frac{1}{6} = 1$, o equivalentemente, $c_2 = \frac{5}{36}$. Por la primera ecuación tenemos entonces que $c_1 = -c_2 = -\frac{5}{36}$. Finalmente, reemplazando estos valores concretos de c_1 y c_2 en la sucesión obtenemos que $a_n = -\frac{5}{36}(-2)^n + (\frac{5}{36} + \frac{n}{24})4^n$, por lo que la opción correcta es la D.

Múltiple Opción 4

Hallar el coeficiente en x^2y^3 del polinomio $(x-y+3xy+2)^5$.

(A) -730 (B) -100 (C) -10 (D) 460 (E) 1450

Solución de la Múltiple Opción 4

La fórmula de la potencia de un multinomio es:

$$(x-y+3xy+2)^5 = \sum_{(a,b,c,d)\in\mathbb{N}^4 : a+b+c+d=5} \frac{5!}{a_1!a_2!a_3!a_4!}(x)^{a_1}(-y)^{a_2}(3xy)^{a_3}(2)^{a_4}.$$

Hay solamente 3 posibles elecciones de las tuplas naturales (a_1,a_2,a_3,a_4) que aportan al coeficiente en x^2y^3, que son precisamente $(2,3,0,0)$, $(1,2,1,1)$, y $(0,1,2,2)$. Por lo tanto, el coeficiente en x^2y^3 de $(x-y+3xy+2)^5$ es es el mismo que el coeficiente en x^2y^3 de la siguiente función

$$\frac{5!}{2!3!0!0!}(x)^2(-y)^3(3xy)^0(2)^0 + \frac{5!}{1!2!1!1!}(x)^1(-y)^2(3xy)^1(2)^1 + \frac{5!}{0!1!2!2!}(x)^0(-y)^1(3xy)^2(2)^2.$$

Tal coeficiente es igual a $-10+60\times 3\times 2-30\times 9=-730$, y la opción correcta es la A.

Múltiple Opción 5

Sea G el grafo que se obtiene tras agregar al ciclo C_8 precisamente 4 aristas, a saber, una arista para cada par de vértices de C_8 que se encuentran a distancia igual a 4.

Consideramos las siguientes afirmaciones:

I. El grafo G es 3-regular.
II. El grafo G es bipartito.
III. El grafo G tiene algún ciclo hamiltoniano.
IV. El grafo G es plano.

Indicar la opción correcta:

(A) Las afirmaciones I y II son verdaderas, y las afirmaciones III y IV son falsas.
(B) Las afirmaciones I y III son verdaderas, y las afirmaciones II y IV son falsas.
(C) Las afirmaciones I y IV son verdaderas, y las afirmaciones II y III son falsas.
(D) Las afirmaciones II y III son verdaderas, y las afirmaciones I y IV son falsas.
(E) Las afirmaciones II y IV son verdaderas, y las afirmaciones I y III son falsas.

Solución de la Múltiple Opción 5

El grafo G se representa en la Figura 1. Cada vértice de G tiene grado 3, por lo que G es 3-regular. Podemos obtener el ciclo C_8 quitando precisamente 4 aristas del grafo G, concretamente, $C_8 = G - v_1v_5 - v_2v_6 - v_3v_7 - v_4v_8$, por lo que G tiene algún ciclo hamiltoniano. El subgrafo de G inducido por el conjunto de vértices $\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ es C_5. Como G tiene algún ciclo impar, G no es bipartito. Por último, veamos que G tiene un subgrafo que es homeomorfo a $K_{3,3}$. De hecho, consideremos el subgrafo G' de G dado por $G' = G - v_1v_5$. Tomemos los dos subconjuntos de vértices A y B de G' dados por $A=\{v_2,v_4,v_7\}$ y $B=\{v_3,v_6,v_8\}$. Notemos que G' se obtiene tras tomar dos subdivisiones elementales del grafo bipartito completo cuyas partes son los conjuntos de vértices A y B. Luego, G' es homeomorfo a $K_{3,3}$, y por el Teorema de Kuratowski se sigue que G no es plano. Por lo tanto, la opción correcta es la A.

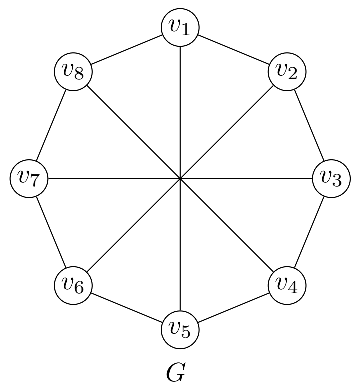

Figura 1: Grafo G.

Ejercicio de Desarrollo 1

Sea A un conjunto equipado con una relación de orden $\leq$. Se recuerda que $\leq$ es un *orden total* si para todos $x, y \in A$, tenemos que $x \leq y$ o $y \leq x$. Por otro lado, se dice que $\leq$ es un *buen orden* si todo subconjunto no vacío de A tiene mínimo.

(1) Demostrar que si $\leq$ es un buen orden, entonces es un orden total.

(2) Demostrar que si $\leq$ es un orden total, entonces tiene a lo sumo un elemento maximal.

(3) Concluir que si $\leq$ tiene dos elementos maximales distintos o dos elementos minimales distintos, entonces no es un buen orden.

Solución del ejercicio de desarrollo 1

(1) Sabemos que $\leq$ es un buen orden. Probemos que $\leq$ es un orden total. Sean x e y dos elementos cualesquiera de A. Notemos que $\{x, y\}$ es un subconjunto no vacío de A. Luego, como $\leq$ es un buen orden, el conjunto $\{x, y\}$ tiene mínimo. Si x es mínimo entonces $x \leq y$; en caso contrario y es mínimo y tenemos que $y \leq x$. Por lo tanto, dados dos elementos cualesquiera x e y de A se cumple que $x \leq y$ o $y \leq x$, es decir que $\leq$ es un orden total, como queríamos demostrar.

(2) Sabemos que $\leq$ es un orden total. Probemos que tiene a lo sumo un elemento maximal. De hecho, sean a_1 y a_2 maximales. Como $\leq$ es un orden total, se debe cumplir que $a_1 \leq a_2$ o $a_2 \leq a_1$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a_1 \leq a_2$ (el otro caso se demuestra de forma análoga). Como a_1 es maximal, el único elemento x de A que cumple que $a_1 \leq x$ es a_1, por lo que $a_1 = a_2$. Por lo tanto, existe a lo sumo un elemento maximal, como queríamos demostrar.

(3) Por el contrarrecíproco de (2), si $\leq$ tiene dos elementos maximales distintos entonces $\leq$ no es un orden total. Luego, por el contrarrecíproco de (1) se sigue que $\leq$ no es un buen orden, como queríamos demostrar.

Ejercicio de Desarrollo 2

El objetivo de este ejercicio es usar un principio de inducción para probar que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

para todo entero $n \geq 1$. Para conseguirlo, se pide realizar los siguientes pasos:

(1) Indicar si se va a utilizar el principio de inducción simple o fuerte.
(2) Definir la propiedad sobre los naturales positivos $P(n)$ a la cual se le va a aplicar dicho principio de inducción.
(3) Enunciar el paso de base.
(4) Probar el paso de base.
(5) Enunciar el paso inductivo.
(6) Probar el paso inductivo.
(7) Concluir.

Solución del ejercicio de desarrollo 2

Vamos a ordenar la demostración siguiendo los 7 pasos sugeridos en la letra.

(1) Vamos a emplear el principio de inducción simple sobre el conjunto de enteros positivos.
(2) Consideremos la propiedad P definida por $P(n) : \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
(3) El paso de base consiste en probar $P(1)$.
(4) Para probar $P(1)$, vamos a calcular primero el miembro izquierdo y luego el miembro derecho, para finalmente probar que son iguales. Por un lado, el miembro izquierdo es $\sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1$. Por otro lado, el miembro derecho es $\frac{1\times(1+1)(2\times1+1)}{6} = 1$. Luego, ambos miembros de la expresión $P(1)$ son iguales, y se cumple $P(1)$.
(5) El paso inductivo consiste en asumir $P(h)$ para cierto entero positivo fijo h y probar $P(h+1)$.
(6) Probemos el paso inductivo. Notemos que $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \sum_{i=1}^{h} i^2 + (h+1)^2$. Por hipótesis inductiva sabemos que es cierto $P(h)$, por lo que $\sum_{i=1}^{h} i^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6}$. Reemplazando en la igualdad anterior tenemos que $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \frac{h(h+1)(2h+1)}{6} + (h+1)^2$. Ahora tomando factor común $(h+1)$ tenemos que $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = (h+1)(\frac{h(2h+1)}{6} + (h+1))$. Tras tomar denominador común 6 y operar, tenemos que $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \frac{(h+1)(2h^2+h+6(h+1))}{6} = \frac{(h+1)(2h^2+7h+6)}{6}$. Por último, notemos que $2h^2 + 7h + 6 = (h+2)(2h+3)$. Reemplazando en la última expresión obtenemos que $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \frac{(h+1)(h+2)(2h+3)}{6}$. Reescribiendo, tenemos que $\sum_{i=1}^{h+1} i^2 = \frac{(h+1)((h+1)+1)(2(h+1)+1)}{6}$, por lo que $P(h+1)$ es cierta, como queríamos demostrar.
(7) Por las partes (4) y (6), tanto el paso base como el paso inductivo son correctos. Por el principio de inducción completa sobre los enteros positivos podemos afirmar que para todo entero positivo n se cumple $P(n)$.