Matemática Inicial

Examen 5 de febrero de 2024.

No Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Curso

Ejercicios Múltiple Opción

Ej.1	Ej.2	Ej.3	Ej.4	Ej.5	Ej.6
B	A	B	D	B	C

Ej.7.1	Ej.7.2	Ej.7.3	Ej.7.4	Ej.7.5	Ej.7.6	Ej.7.7	Ej.7.8	Ej.7.9	Ej.7.10
V	V	V	F	F	V	V	F	F	F

Ejercicio 1 (5 puntos) *Si $x \neq 0$ y $x \neq 1$, entonces la expresión* $\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{(x-1)^2}$ *es igual a:*

(A) $\dfrac{-x+x^2}{x(x-1)(x-1)^2}$ *(B)* $\dfrac{-1}{x(x-1)^2}$ *(C)* $\dfrac{-x}{x(x-1)(x-1)^2}$ *(D)* $\dfrac{x-1}{x(x-1)^2}$

Respuesta correcta: B

$$\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)-x}{x(x-1)^2} = \frac{-1}{x(x-1)^2}.$$

Ejercicio 2 (5 puntos) 1. *El conjunto S solución del siguiente sistema de inecuaciones es:*

$$\begin{cases} 2^{x+3} \leq 16, \\ -2 < x+3 < 5. \end{cases}$$

2. *(A)* $S = (-5, 1]$ *(B)* $S = (0, 1]$ *(C)* $S = [1, 2)$ *(D)* $S = (-5, 2)$

Respuesta correcta: A
En efecto, observando que $16 = 2^4$, la primera inecuación es equivalente a $x+3 \leq 4$, esto es: $x \leq 1$; en tanto, de la segunda inecuación se deduce: $-5 < x < 2$.
Estas dos condiciones implican que el conjunto solución es $S = (-5, 1]$.

Ejercicio 3 (5 puntos) *Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:*

$$\begin{cases} -1 + e^{x-1} & si \quad x > 1 \\ (x+a)^2 & si \quad x \leq 1. \end{cases}$$

Indicar la opción correcta:

*(**A**) f es continua para todo valor de a.*

*(**B**) f es continua en $x=1$ solo si $a=-1$.*

*(**C**) f es continua en $x=1$ solo si $a=0$.*

*(**D**) no existe ningún valor de a tal que f sea continua.*

Respuesta correcta: B
Notar que $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -1+e^0 = 0$ y $\lim_{x\to 1^-} f(x) = (1+a)^2$. Para que estos dos límites coincidan, y en consecuencia f sea continua en $x=1$, debe ser $a=-1$.

Ejercicio 4 (5 puntos) *Sea la función $f:(-1/2,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\ln(2x+1)}{2x+1}$. Entonces $f'(0)$ vale:*

*(**A**)* 1 *(**B**)* -1 *(**C**)* 0 *(**D**)* 2

Respuesta correcta: D
Aplicando las reglas de derivación conocidas resulta, para todo x en el dominio:

$$f'(x)=\frac{\ln'(2x+1)[2x+1]-[\ln(2x+1)](2x+1)'}{(2x+1)^2}=\frac{\frac{1}{2x+1}2(2x+1)-\ln(2x+1)2}{(2x+1)^2}=\frac{2-2\ln(2x+1)}{(2x+1)^2}.$$

Evaluando en $x=0$, resulta que $f'(0)=\frac{2-2\ln(1)}{1}=2$.

Ejercicio 5 (5 puntos) *El valor del límite $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ es:*

*(**A**)* 0 *(**B**)* 1 *(**C**)* $1/2$ *(**D**)* 2

Respuesta correcta: B
Para resolver la indeterminación multiplicamos y dividimos por el conjugado del numerador. Queda:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} &= \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}\\ &= \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2x}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}=\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}.\end{aligned}$$

Tomando el límite queda:

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=1.$

Ejercicio 6 (5 puntos) *El valor del límite* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\ln(x^2)}{x^2+e^{x^2}}$ *es:*

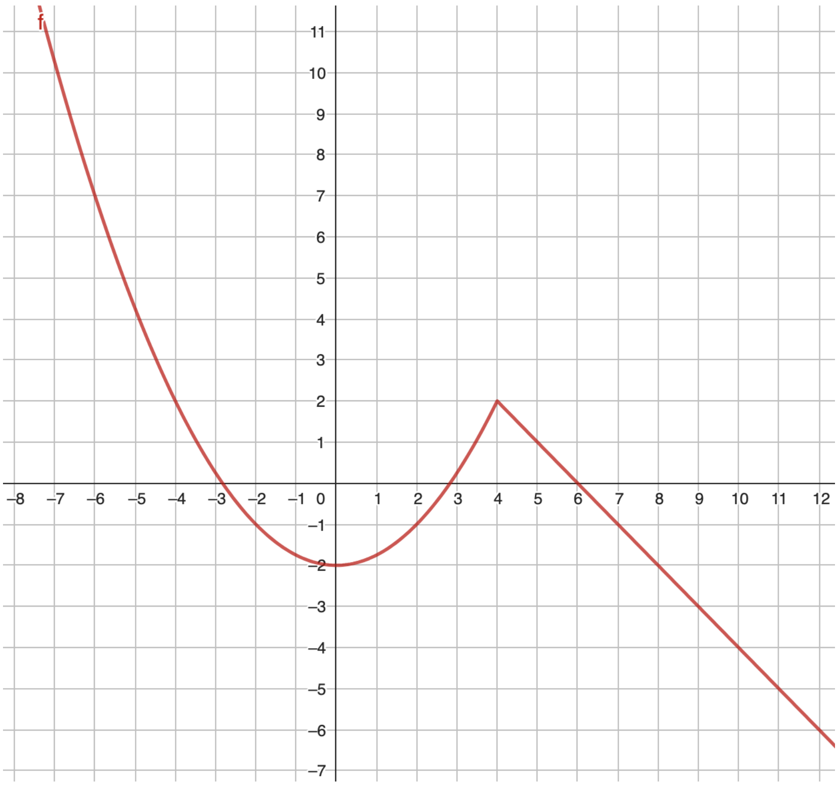
(A) $+\infty$ *(B)* 1 *(C)* 0 *(D)* $\frac{1}{2}$

Respuesta correcta: C

Sabemos que para valores grandes de x se cumple que $\ln(x^2)$ crece mucho más lentamente que x^2, que a su vez crece mucho más lentamente que e^{x^2}. De manera que:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+\ln(x^2)}{x^2+e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = 0.$$

Ejercicio 7 (15 puntos) *Sea* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una función cuyo gráfico se muestra a continuación:*



Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

1. $f(-1) < 0$

   Verdadero

2. *El conjunto* $f^{-1}(\{1\})$ *tiene exactamente 3 elementos.*

   Verdadero

3. *La ecuación* $f(x) = 0$ *tiene tres soluciones.*

   Verdadero

4. $f((-\infty,0]) \subset [0,+\infty)$.

   Falso

5. *f es biyectiva.*

   Falso

6. *f es continua.*

   Verdadero

7. *La restricción de f al intervalo $[0,4]$, $f:[0,4]\to\mathbb{R}$, es inyectiva.*

   Verdadero

8. *f está en las hipótesis del teorema de Bolzano en el intervalo $[-2,2]$.*

   Falso

9. $f'(2) < 0$.

   Falso

10. *f es derivable en $x = 4$.*

    Falso

Ejercicios Desarrollo

Ejercicio 8 (25 puntos)

1. *Hallar S_1 conjunto solución de la ecuación $\sqrt{x^3-1} = \sqrt{x^2-1}$ en $\mathbb{R}$.*

   Dominio: $D_1 = \{x \geq 1\}$. *(Observar que $x^3 - 1 \geq 0$ si y sólo si $x \geq 1$ y para estos valores $x^2 - 1 \geq 0$.)*

   Solución: *Elevando al cuadrado en ambos miembros queda $x^3 - 1 = x^2 - 1$, que es equivalente a $x^3 = x^2$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1$. Esta última es la única que pertenece al dominio, de manera que $S_1 = \{1\}$.*

2. *Hallar S_2 conjunto solución de la ecuación $\ln(x^2 - x + 1) = 0$ en $\mathbb{R}$.*

   Dominio: *Es fácil verificar que $x^2 - x + 1$ no tiene raíces y que es estrictamente positiva para todo $x \in \mathbb{R}$. De manera que $D_2 = \mathbb{R}$.*

   Solución: $\ln(x^2 - x + 1) = 0$ *es equivalente a $x^2 - x + 1 = 1$; esto es $x^2 = x$. Las soluciones de esta ecuación son $x = 0$ y $x = 1$, y ambas están en el dominio, de manera que $S_2 = \{0,1\}$.*

3. *Sean S_1 y S_2 los conjuntos hallados en las partes anteriores. Se considera la afirmación:*

   $$x \in S_1 \Leftrightarrow x \in S_2$$

   Indicar si es verdadera o falsa. Justifique su respuesta.

   La afirmación es **Falsa**. *En efecto, $0 \in S_2$ pero $0 \notin S_1$.*

4. *Hallar los conjuntos* $S_1 \cap S_2$ *y* $S_2 \setminus S_1$.

   $S_1 \cap S_2 = \{1\}$, $S_2 \setminus S_1 = \{0\}$.

Ejercicio 9 (30 puntos) *Sea* $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ *y sea* $g : D \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = \frac{1}{x-2}$.

1. *Hallar* D *el máximo dominio de definición de la función* g.

   La función g *está bien definida para todo* $x \neq 2$. *De manera que* $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

2. *La función compuesta* $h = f \circ g$ *no está bien definida. Explique porqué.*

   Notar que, por ejemplo, $g(1) = -1$, *y* $x = -1$ *no está en el dominio de* f. *Por lo tanto no está definida* $h(-1)$.

3. *Verificar que cambiando el dominio de la función* g *a* $D_1 = (2, 3)$, *la función compuesta* $h = f \circ g$ *está bien definida y hallar la expresión para* $h(x)$.

   Para $x \in (2, 3)$ *se cumple* $0 < x - 2 < 1$. *Y por lo tanto* $g(x) = \frac{1}{x-2} > 1$, *que pertenece al dominio de* f. *De manera que la función compuesta* h *queda bien definida.*

   Resulta entonces:

   $$h(x) = f(g(x)) = \ln\left(\frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{1}{x-2}+1}\right) = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right).$$

4. *Asumiendo que* $h : (2, 3) \to \mathrm{Im(h)}$ *es invertible, hallar la función inversa* h^{-1}.

   Para hallar la inversa de h *planteamos la ecuación* $\ln\left(\frac{1}{x-1}\right) = y$, *y despejamos* x *como función de* y. *Queda:*

   $$\frac{1}{x-1} = e^y \Rightarrow x - 1 = e^{-y} \Rightarrow x = e^{-y} + 1.$$

   De manera que $h^{-1}(y) = e^{-y} + 1$. *(O, si se prefiere usar la variable* x *como argumento,* $h^{-1}(x) = e^{-x} + 1$.*)*