Aplicaciones de Álgebra Lineal

Examen diciembre 2023

20/12/2023

Ejercicio 1 (P) (20 puntos)

a. (5 puntos) Calcular la forma de Schur para la matriz siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. (15 puntos) Demostrar el Teorema de Cayley - Hamilton a partir del Teorema de Schur (sin usar Jordan).

Ejercicio 2 (T) (20 puntos) Demostrar el Teorema de Rayleigh-Ritz:

(H) Sea A una matriz hermitiana de valores propios $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.
(T) Entonces:

$$\lambda_1 = \text{mín}\{x^* Ax \ / \ ||x|| = 1\}; \lambda_n = \text{máx}\{x^* Ax \ / \ ||x|| = 1\}.$$

Además $\text{Spec}(A) \subset [\lambda_1, \lambda_n] = \{x^* Ax \ / \ ||x|| = 1\}$.

Ejercicio 3 (30 puntos) Sea

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & -3 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Calcule el polinomio característico $\chi_M(t)$ y verifique que $\chi_M(M) = 0$. Calcule también el polinomio minimal de M.

b. Sea $p(t) = t^7 - t^4 + 1$. Demostrar que existe $r(t) \in \mathbb{C}(t)$ de grado menor o igual a cuatro, tal que $p(M) = r(M)$. Calcule $p(M)$.

c. Calcular M^{32}.

Ejercicio 4 (30 puntos) Sea K un cono en $\mathbb{R}^n$. Consideramos $\Pi(K) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A(K) \subseteq K\}$.

a. Probar que $\Pi(K)$ es un cono.

b. Probar que, si K es propio y sólido, entonces $\Pi(K)$ es cono propio.

c. Demostrar que $\Pi(K)^o = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ / \ A(K - \{\vec{o}\}) \subseteq K^o\}$.

Marcelo Lanzilotta