N^o de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4
C	D	D	B
Ej. 5	**Ej. 6**	**Ej. 7**	**Ej. 8**
D	C	C	D

Importante

- El examen dura 3 horas y se aprueba con 55 puntos o más.
- Es sobre 100 puntos en total. Cada ejercicio vale $12,5$ puntos, respuesta incorrecta: $-3,125$ puntos, sin respuesta: 0 punto.
- **Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.**
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

α	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.020	0.010	0.005	0.001
z_α	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090
$z_{\alpha/2}$	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.240	2.326	2.576	2.807	3.291

Tabla de distribución de una T-Student con r grados de libertad

	$P(T \leq t)$						
	0.60	0.75	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995
r	$t_{0.40}(r)$	$t_{0.25}(r)$	$t_{0.10}(r)$	$t_{0.05}(r)$	$t_{0.025}(r)$	$t_{0.01}(r)$	$t_{0.005}(r)$
1	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.997
15	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
∞	0.253	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Ejercicio 1

Un equipo de tres personas se dispone a jugar un juego de tiro al blanco. Se sabe que el jugador i tiene probabilidad $1/(i+3)$ de acertar en el blanco en un tiro cualquiera, para $i = 1,2,3$. Los sucesos de acertar o no acertar de cada uno de los tres jugadores son independientes. Cada juego consiste en una tirada al blanco de cada uno de los integrantes del equipo en el siguiente orden: primero tira el jugador 1, luego el 2 y luego el 3. Entonces la probabilidad de que el equipo obtenga exactamente dos aciertos es igual a

(**A**) $1/4$ (**B**) $3/20$ (**C**) $1/10$ (**D**) $1/14$ (**E**) $2/3$.

Solución:

El evento el equipo obtiene exactamente dos aciertos es la unión tres sucesos disjuntos a saber, que el jugador i erre y los otros dos acierten con $i = 1,2,3$. Por lo que la probabilidad buscada es la suma de las siguientes probablidades:

$P(\text{el jugador 1 erra y los otros acierta}) = \frac{3}{4}\frac{1}{5}\frac{1}{6}$

$P(\text{el jugador 2 erra y los otros acierta}) = \frac{1}{4}\frac{4}{5}\frac{1}{6}$

$P(\text{el jugador 3 erra y los otros acierta}) = \frac{1}{4}\frac{1}{5}\frac{5}{6}$

Entonces $P(\text{el equipo obtiene exactamente dos aciertos}) = \frac{1}{10}$

Ejercicio 2

La demanda semanal de harina (en kilogramos) en la panadería Panes es una variable aleatoria absolutamente continua cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} cx^{-\frac{1}{2}} & \text{si } 4 \le x \le 25, \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

donde c es una constante. Al comienzo de la semana, la panadería tiene un stock de 21 kilos de harina, ¿cuál es la probabilidad de que esta cantidad de harina no sea suficiente para cubrir la demanda semanal?

(**A**) $0,035$ (**B**) $0,068$ (**C**) $0,103$ (**D**) $0,139$ (**E**) $0,176$

Solución:

Buscamos la probabilidad de que X sea mayor que el stock, o sea $X > 21$, dicha probabilidad es

$$p = \mathbb{P}(X > 21) = \int_{21}^{25} cx^{-\frac{1}{2}}dx = c\left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_{21}^{25} = c(2\sqrt{25} - 2\sqrt{21})$$

Para hallar c planteamos que la integral de la función densidad entre 4 y 25 debe ser igual a 1:

$$1 = \int_{4}^{25} cx^{-\frac{1}{2}}dx = c\left.\frac{x^{1/2}}{1/2}\right|_{4}^{25} = c(2\sqrt{25} - 2\sqrt{4}) = c2(5-2) = 6c,$$

de donde $c = 1/6$ y $p = 0,139$

Ejercicio 3

Se considera la densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & \text{si } 0 < x < 3,\ 0 < y < 3-x \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

$P(Y \leq X)$ es igual a

(**A**) $3/8$ (**B**) $1/4$ (**C**) $5/8$ (**D**) $3/4$ (**E**) $5/6$

Solución:

$$P(Y \leq X) = \int_0^{3/2} dx \int_0^x \frac{2}{9}xdy + \int_{3/2}^3 dx \int_0^{3-x} \frac{2}{9}xdy = \frac{2}{9}\int_0^{3/2} x^2 dx + \frac{2}{9}\int_{3/2}^3 x(3-x)dx =$$

$$\frac{2}{9}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{3/2} + \frac{2}{9}\left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{3/2}^3 = \frac{2}{9}\left(\frac{3^3}{24} + \left(3\frac{3^2}{2} - \frac{3^3}{3}\right) - \left(3\frac{3^2}{8} - \frac{3^3}{24}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{9}3^3\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12}\right) = \frac{1}{8}\frac{2}{9}3^3 = \frac{1}{8}6 = \frac{3}{4}.$$

Ejercicio 4

El tiempo de vida de una lámpara tiene distribución exponencial siendo la duración media de 100 horas. Si se seleccionan cinco lámparas, ¿cuál es el número esperado de lámparas que duren por lo menos 31 horas?

(**A**) $3,704$ (**B**) $3,667$ (**C**) $3,595$ (**D**) $3,559$ (**E**) $4,093$

Solución:

Sea X el tiempo de vida de una lámpara. Entonces $X \sim exp(1/100)$ y la probabilidad de que una lámpara dure al menos 33 horas es:

$$p = P(X \geq 31) = 1 - (1 - \exp(-31/100)) = \exp(-31/100)$$

Sea S la cantidad de lámparas dentro de la muestra de 5 que duran por lo menos 31 horas. Entonces $S \sim Bin(5, \exp(-31/100))$ y su esperanza es $5\exp(-31/100) = 3,667$

Ejercicio 5

En una fábrica de juegos electrónicos para niños, se sabe que la duración promedio de un determinado componente de dicho juego es de 800 horas con una desviación estandar de 40 horas. Se eligen n juegos y se observa la duración de la componente en cada uno de ellos. Usando Chebyshev, la cantidad mínima n de juegos que hay que observar para que la duración promedio de las n componentes difiera de la real en menos de 7 horas con una probabilidad de al menos el 95 % es igual a

(**A**) 396 (**B**) 500 (**C**) 545 (**D**) 654 (**E**) 889

Solución:

Por Chebyshev

$$\mathbb{P}\left(|\overline{X}_n - 800| \leq 7\right) \geq 1 - \frac{40^2}{7^2 n} > 0,95 \iff n \geq \frac{40^2}{7^2 \times 0,05} = 653,06$$

Ejercicio 6

Para un invento casero se necesita una resistencia de entre 1000 y 1030 ohms, pero solo se pueden comprar resistencias de 10 ohms, por lo que se instalan 100 de éstas últimas en serie (al instalarlas de esta forma, la resistencia total es la suma de las resistencias individuales). Si el fabricante de dichas resistencias dice que las mismas pueden desviarse de la media de 10 ohms y que la desviación estándar es de 2 ohms, ¿cuál es la probabilidad aproximada de lograr el objetivo?

(**A**) $0,191$ (**B**) $0,341$ (**C**) $0,433$ (**D**) $0,477$ (**E**) $0,494$

$$\mathbb{P}\left(\sum_i X_i \in [1000, 1030]\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}_n \in [10, 10.3]\right) = \mathbb{P}\left(\overline{X}_n - 10 \in [0, 0.3]\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - 10}{2/10} \in [0, 1.5]\right) \approx \Phi(1.5) - \Phi(0) = 0,933 - 0.5 = 0,433.$$

Ejercicio 7

Los datos $1.04, 1.68, 1.08, 1.20, 1.24$ son una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria absolutamente continua cuya función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x+\alpha} & \text{si} \quad x > \alpha \\ 0 & \text{si} \quad \text{no} \end{cases}$$

siendo $\alpha \in \mathbb{R}$. La estimación de α por el método de máxima verosimilitud es

(**A**) $6,04$ (**B**) $4,50$ (**C**) $1,04$ (**D**) $6,12$ (**E**) $2,01$

Solución:

$$L(\alpha) = \begin{cases} \prod_i e^{-x_i+\alpha} & x_i > \alpha \forall i, \\ 0 & \exists x_i \leq \alpha, \end{cases} = \begin{cases} e^{n\alpha - \sum_i x_i} & \alpha < \text{mín}_i\, x_i \forall i, \\ 0 & \alpha \geq \text{mín}\, x_i. \end{cases}$$

Como $e^{n\alpha - \sum_i x_i}$ es creciente en función de α alcanza su máximo en $\alpha = \text{mín}_i\, x_i$.

Ejercicio 8

El promedio histórico de nacimientos en Uruguay previo al año 2015 es de 1757, mientras que la cantidad de nacimientos entre los años 2016 y 2021 fueron de: 1182, 762, 1137, 1539, 721, 1937. Asumiendo que la cantidad de nacimientos X sigue una distribución normal, se quiere realizar la siguiente prueba de hipótesis sobre la media de X:

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1757 \\ H_1 : \mu < 1757 \end{cases}$$

Considerando una región crítica de la forma $RC = \{(\overline{X}_n - 1757)/s_n \leq -K\}$, el valor de K para que la prueba tenga un nivel del 1 % es

(A) $0,82$ **(B)** $0,95$ **(C)** $1,05$ **(D)** $1,37$ **(E)** $1,65$

Solución:

Sabemos que $K = t_{0.01}(4)/\sqrt{6} = 3,365/2,45 = 1,37$