N^o de exámen	Cédula	Apellidos	Salón

Respuestas

Conteste en estas columnas				Deje estas columnas en blanco			
Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4	Ej. 5	Ej. 6	Ej. 7	Ej. 8

*** Importante ***

- Los ejercicios de desarrollo valen 13 puntos c/u, los de opción múltiple valen 12 puntos, -3 puntos y 0 puntos según la respuesta sea correcta, incorrecta o en blanco respectivamente.
- Utilice truncamiento si obtiene resultados con decimales.
- En cada ejercicio múltiple opción hay una sola opción correcta.

Múltiple Opción (Total: 48 puntos)

Ejercicio 1

En un torneo participan 9 jugadores. Se sortean 3 jugadores al azar para el comité organizador, (presidente, tesorero y secretario). Si Ana y Carlos son dos de los jugadores, ¿cuál es la probabilidad de que ambos estén en el comité y Ana sea la presidente?

(**A**) $1/36$, (**B**) $1/28$, (**C**) $1/21$, (**D**) $1/112$,

Solución:

1. Total de posibles comités (con roles asignados): Hay 9 formas de elegir un presidente y $\binom{8}{2}$ formas de elegir a los otros dos integrantes, total $9 \times 8 \times 7/2$

2. Casos favorables: elegimos a Ana como presidente (1 forma de hacerlo) a Carlos para integrar el comité (1 forma de hacerlo) y debernos elegir un integrante más del comité $7(= 9-2)$ formas de hacerlo. Total: 7.

3. La probabilidad serán los casos favorables sobre los posibles

$$\text{Probabilidad} = \frac{7}{9 \cdot 8 \cdot 7/2} = \frac{1}{9 \cdot 4}$$

La respuesta correcta es c) $1/36$.

Ejercicio 2

En una muestra aleatoria de 81 componentes se encontró que el tiempo promedio muestral de vida fue de 15.5 horas, con una desviación estándar muestral de 4 horas. Un intervalo de confianza aproximado para la media del $95\,\%$ es $I = [15.5-\delta, 15.5+\delta]$ con δ igual a:

(**A**) .87, (**B**) .98, (**C**) 1.12, (**D**) 3.92,

Solución: Como son 81 muestras se considera un intervalo aproximado de la forma $\overline{X}_n \pm \frac{s_n z_{\alpha/2}}{\sqrt{81}}$ con $\alpha = 0.05$ de donde $\delta = 4 \times 1.96/9 = 0.87$.

Ejercicio 3

En el mercado de celulares hay un 1 % de versiones no originales de cierta marca famosa por su calidad. La probabilidad de que uno de éstos celulares de buena calidad deje de funcionar al año es de 1 en mil, mientras que la probabilidad de que un celular de los no original lo haga es de 1 en 150. Si un celular de esta marca deja de funcionar al año, la probabilidad de que no sea original es:

(**A**) 0.038, (**B**) 0.048, (**C**) 0.063, (**D**) 0.326,

Solución: Si “F” = Falló, “EO”= Es Original y “NEO”= No Es Original $\mathbb{P}(\mathrm{F}) = \mathbb{P}(\mathrm{F}|\mathrm{NEO})\,\mathbb{P}(|\mathrm{NEO}) + \mathbb{P}(\mathrm{F}|\mathrm{EO})\,\mathbb{P}(|\mathrm{EO})$
$= 0.0067 \times 0.01 + 0.001 \times 0.99 = 0.00105$

$\mathbb{P}(\text{No original}|\text{Falló}) = \frac{\mathbb{P}(\text{Falló}|\text{No original})\mathbb{P}(\text{No original})}{\mathbb{P}(\text{Fallo})} = \frac{0.0067 \times 0.01}{0.00105} = 0.063.$

Ejercicio 4

Los tiempos en años A y B de vida de dos componentes vienen dados por la función de densidad conjunta

$$f_{A,B}(x,y) = \begin{cases} 6x^2y & x \in [0,1], y \in [0,1], \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

La probabilidad de que B sea menos que la mitad de A es:

(**A**) $3/20$, (**B**) $2/5$, (**C**) $3/5$, (**D**) $17/20$.

Solución: La probabilidad que se pide es $\mathbb{P}(A < B/2) =$ igual a

$$\int_0^1 dx \int_0^{x/2} 6x^2 y dy = \int_0^1 \left[3x^2y^2\right]_0^{x/2} dx = 3\int_0^1 \frac{x^4}{4} dx = \frac{3}{4}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Ejercicios de Desarrollo (Total: 52 puntos)

Explique y justifique los razonamientos empleados.

Ejercicio 5

Sea X una V.A. absolutamente continua con densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

- Encuentre α y β sabiendo que $\mathbb{E}(X) = 17/24$.
- Calcule la varianza de X.

Solución: $1 = \int_{\mathbb{R}} f_X = \int_0^1 \alpha x^2 + \beta x dx = \left[\alpha \frac{x^3}{3} + \beta \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2}$ $\frac{17}{24} = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_0^1 x(\alpha x^2 + \beta x) dx = \left[\alpha \frac{x^4}{4} + \beta \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3}$. de donde

$$\begin{cases} 2\alpha + 3\beta = 6 \\ 3\alpha + 4\beta = \frac{17}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} 6\alpha + 9\beta = 18 \\ 6\alpha + 8\beta = 17 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Para la varianza calcularemos $\mathbb{E}\left(X^2\right)$:

$$\mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_0^1 x^2 \left(\frac{3}{2}x^2 + x\right) dx = \left[\frac{3}{2}\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{3}{2}\frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{6+5}{20} = \frac{11}{20}.$$

De donde $\mathbb{V}(X) = \frac{11}{20} - \frac{17^2}{24^2} \approx 0.048$.

Ejercicio 6

Sea X una V.A. absolutamente continua cuya función de densidad está dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{sino.} \end{cases}$$

- Encuentre el estimador $\hat{\lambda}$ de máxima verosimilitud de λ.

- Aplicando lo anterior estime λ a partir de la MAS de X:

$$0.02, \quad 0.01, \quad 0.08, \quad 0.09, \quad 0.10$$

Solución: Si $X_1, \ldots, X_n$ es una MAS de X, entonces

$$L(\lambda)(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda^2 x_i e^{-\lambda x_i}$$

y

$$h(\lambda) = \ln(L(\lambda)) = n2\ln\lambda + \sum_i \ln x_i - \lambda \sum_i x_i$$

de donde $h'(\lambda) = \frac{2n}{\lambda} - \sum_i x_i$ que se anula en $\lambda = 2/\bar{x}_n$. De modo que, dado que L vale 0 en 0 y en $+\infty$, el estimador de máxima verosimilitud es

$$\hat{\lambda} = \frac{2}{\overline{X}_n}.$$

Para la estimación calculamos el promedio que da $\overline{X}_n = 0.3/5$, de modo que $\hat{\lambda} = 10/0.3 = 33.33..$

Ejercicio 7

La presión de bombeo en un proceso no puede exceder por mucho los 100hPa. Se toman n medidas de la presión por hora y se rechaza la hipótesis nula $H_0 : \mu_0 = 100$ hPa si $\overline{X}_n \geq 102$ hPa. Suponiendo que las medidas son iid $N(\mu, 25)$, y bajo una hipótesis alternativa $\mu_1 = 103$ hPa, calcule un valor de n a partir del cual tanto el Error de tipo I como el de tipo II sean menores a 0.05.

Solución: El Error de tipo I es

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\overline{X}_n \geq 102) = \mathbb{P}_{H_0}(\sqrt{n}(\overline{X}_n - 100)/5 \geq (2/5)\sqrt{n}) = 1 - \Phi((2/5)\sqrt{n}) < 0.05$$

$$\iff \Phi((2/5)\sqrt{n}) > 0.95 \iff (2/5)\sqrt{n} > 1.65 \iff n > (5/2)^2 \times 1.65^2 = 17.01 \iff n \geq 18$$

Por otro lado el Error de tipo II es

$$\beta = \mathbb{P}_{H_1}(\overline{X}_n < 102) = \mathbb{P}_{H_1}\left(\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - 103\right)/5 \leq (-1)\sqrt{n}/5\right) = \Phi(-\sqrt{n}/5) < 0.05$$

$$\iff -\sqrt{n}/5 < -z_{0.05} = -1.65 \iff n > 1.65^2 \times 25 = 68.0625$$

De modo que n debe ser 69 o mayor.

Ejercicio 8

Para la siguiente muestra

$$0.81, \quad 0.90, \quad 0.12, \quad 0.91, \quad 0.63.$$

Realizar la prueba de Kolmogorov y Smirnov para ver si es razonable afirmar que los datos tienen distribución uniforme $\mathscr{U}(0,1)$, con un nivel de significación del 5%.

Solución:

$$0.81, \quad 0.90, \quad 0.12, \quad 0.91, \quad 0.63.$$

Calculamos el estadístico como el máximo entre la distribución de una v.a. uniforme (0,1), y la distribución muestral:

El mayor valor es 0.43, en la Tabla de K-S vemos que el valor límite para $n = 5$ y nivel de significación 0.05, es 0.565, por lo que no rechazamos la hipótesis nula.

$i/5$	X_i^*	$\lvert F(X_i^*) - \frac{i-1}{5}\rvert$	$\lvert F(X_i^*) - \frac{i}{5}\rvert$
0.2	0.12	0.12	0.08
0.4	0.63	0.43	0.23
0.6	0.81	0.41	0.21
0.8	0.90	0.30	0.10
1	0.91	0.11	0.19
		0.43	0.23

Tabla de la función $\phi(z) = F_Z(z)$, siendo Z con distribución N(0,1).

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

valores de D en tests de Kolmogorov-Smirnov

g. libertad	**a=0,01**	**a=0,05**	**a=0,1**	**a=0,15**	**a=0,2**	g.libertad
1	0,995	0,975	0,95	0,925	0,9	1
2	0,929	0,842	0,776	0,726	0,684	2
3	0,828	0,708	0,642	0,597	0,265	3
4	0,733	0,624	0,564	0,525	0,494	4
5	0,669	0,565	0,51	0,474	0,446	5
6	0,618	0,521	0,47	0,436	0,41	6
7	0,577	0,486	0,438	0,405	0,381	7
8	0,543	0,457	0,411	0,381	0,358	8
9	0,514	0,432	0,388	0,36	0,339	9
10	0,49	0,401	0,368	0,342	0,322	10
11	0,468	0,391	0,352	0,326	0,306	11
12	0,45	0,375	0,338	0,313	0,295	12
13	0,433	0,361	0,325	0,302	0,284	13
14	0,418	0,349	0,314	0,292	0,274	14
15	0,404	0,338	0,304	0,283	0,266	15
16	0,392	0,328	0,295	0,274	0,258	16
17	0,382	0,318	0,286	0,266	0,25	17
18	0,371	0,309	0,278	0,259	0,244	18
19	0,363	0,301	0,272	0,252	0,237	19
20	0,356	0,295	0,264	0,265	0,231	20
25	0,32	0,27	0,24	0,22	0,21	25
30	0,29	0,24	0,22	0,2	0,19	30
35	0,27	0,23	0,21	0,19	0,18	35
40	0,25	0,21	0,19	0,18	0,17	40
45	0,24	0,2	0,18	0,17	0,16	45
50	0,23	0,19	0,17	0,16	0,15	50
recurrencia para n mayor	$\frac{1{,}63}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1{,}07}{\sqrt{n}}$	