Aplicaciones de Álgebra Lineal
Primer Parcial 2023
28/11/2023

Ejercicio 1 (P) (10 puntos)

a. (5 puntos) Probar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifica que $A.A^* = \lambda.I_n$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces A es normal.

b. (5 puntos) Se considera $U \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Si para todo $v \in \mathbb{C}^3$, $||Uv|| = ||v||$, probar que U es unitaria.

Ejercicio 2 (T) (15 puntos)

a. (2 puntos) Definir matriz estocástica.

b. Sea $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ una matriz estocástica.
Demostrar que:

- i) (7 puntos) $\rho(A) = 1$ y además es valor propio de A.
- ii) (6 puntos) Si se tiene que $a_{ii} > 0$, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces 1 es el único valor propio de norma 1.

Ejercicio 3 (15 puntos) Demostrar o dar contraejemplo para cada afirmación.
Sean K_1 y K_2 dos conos en $V = \mathbb{R}^n$. Entonces:

a. (4 puntos) $K_1 + K_2$ es cono;

b. (6 puntos) Si K_1 es cono sólido, entonces $K_1 + K_2$ es cono sólido;

c. (5 puntos) Si $V^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$, entonces $K_1^{\perp} = \{f \in V^* \ / \ f(v) \geq 0, \ \forall v \in K_1\}$ es un cono.

Ejercicio 4 (20 puntos)

a.
- (2 puntos) Definir matriz de permutación.
- (2 puntos) Definir matriz irreducible.

b. (3 puntos) Probar que el producto de matrices de permutación, es una matriz de permutación.

c. (3 puntos) Sea $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz de permutación. Calcular $P^{n!}$. Justificar.

d. Supongamos que A y B son matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, no negativas.

- i) (4 puntos) Probar que, si A es irreducible y p es un entero positivo, entonces A^p es irreducible.
- ii) (4 puntos) ¿Será verdad el recíproco? O sea, si A^p es irreducible para algún entero positivo p, entonces A es irreducible.
- iii) (2 puntos) Demostrar o dar un contraejemplo: si A y B son irreducibles, entonces $A + B$ es irreducible.

Marcelo Lanzilotta