Solución Práctico 12

1. a. Dividimos el procedimiento en tres partes: calculamos T en los vectores de la base $\mathcal{A}$, escribimos a los vectores transformados como combinación linel de la base $\mathcal{B}$ y por último, colgamos las coordenadas de los transformados como columnas de la matriz. En este caso, como la base $\mathcal{B}$ es la canónica de $\mathbb{R}^2$, el segundo paso es trivial.

   Tenemos entonces que

   - $T(1,0,0) = (3,1)$
   - $T(0,1,0) = (2,-5)$
   - $T(0,0,1) = (-4,3)$

   Entonces la matriz asociada a la transformación T en las bases $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ es

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

   b. Razonando de forma análoga, comenzamos calculando T en la base $\mathcal{A}$

   - $T(1,1,1) = (1,-1)$
   - $T(1,1,0) = (5,-4)$
   - $T(1,0,0) = (3,1)$

   Nuevamente, como la base $\mathcal{B}$ es la canónica de $\mathbb{R}^2$, el segundo paso es trivial y por lo tanto la matriz asociada es

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

   c. En esta parte tenemos la misma base $\mathcal{A}$ de antes así que en el primer paso obtenemos los mismos resultados. Busquemos entonces las coordenadas de estos vectores en la base $\mathcal{B}$. Para el vector $(1,-1)$ tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 - 3F_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \end{array}\right)$$

   De donde $coord_{\mathcal{B}}(1,-1) = (-7,4)$. De la misma forma hayamos las coordenadas de $(5,-4)$ y $(3,1)$ y con ellas armamos la matriz.

$$_{\mathcal{B}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{pmatrix}$$

2. a. Utilizaremos el teorema 7.27 de las notas del curso que dice

$$coord_{\mathcal{B}}(T(v)) =_{\mathcal{B}} (T)_{\mathcal{A}} coord_{\mathcal{A}}(v)$$

   Lo primero que tenemos que hacer entonces, es buscar las coordenadas del vector $x^2 + x - 1$ en la base $\mathcal{E}$. Es decir, queremos los α, β, γ que realizan la sigueinte combinación lineal

$$x^2 + x - 1 = \alpha 1 + \beta(x+1) + \gamma(x^2 + 2x + 1)$$

   Para que ambos lados sean iguales para todo x, deben cumplirse las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} \gamma = 1 \\ 2\gamma + \beta = 1 \\ \gamma + \beta + \alpha = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, $coord_{\mathcal{E}}(x^2 + x - 1) = (-1, -1, 1)$ y

$$coord_{\mathcal{U}}(T(x^2 + x - 1)) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

b. Usando la matriz asociada, podemos conocer el valor de la transformación T en una base de la siguiente forma.

- $coord_{\mathcal{U}}(T(1)) = (2,1,1) \implies T(1) = 2(1,1,0) + (1,2,3) + (3,2,1) = (6,6,4)$
- $coord_{\mathcal{U}}(T(x+1)) = (2,3,3) \implies T(x+1) = 2(1,1,0) + 3(1,2,3) + 3(3,2,1) = (14,14,12)$
- $coord_{\mathcal{U}}(T((x+1)^2)) = (1,1,2) \implies T((x+1)^2) = (1,1,0) + (1,2,3) + 2(3,2,1) = (8,7,5)$

Consideremos un polinomio genérico $p(x) = ax^2 + bx + c$ y busquemos sus coordenadas en la base $\mathcal{E}$

$$ax^2 + bx + c = \alpha 1 + \beta(x+1) + \gamma(x+1)^2$$

De la ecuación anterior, tenemos que $\gamma = a, \beta = b - 2a, \alpha = c - b + a$. Con esto, podemos calcular el valor de $T(p)$

$$T(p) = (c - b + a)T(1) + (b - 2a)T(x+1) + aT(1) = (c - b + a)(6,6,4) + (b - 2a)(14,14,12) + a(8,7,5)$$

$$T(p) = (-14a + 8b + 6c, -15a + 8b + 6c, -15a + 8b + 4c)$$

3. a. Es claro que T es lineal por estar definida como un producto de matrices.

b. No existen bases de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tales que la matriz asociada a T en dichas bases sea $\mathcal{A}$. Esto es porque el tamaño de la matriz asociada debe ser 4×4 pues los espacios de salida y llegada de T son de dimensión 4.

c. Para esta parte, calculamos T en las matrices de la base canónica y luego colgamos como columnas de la matriz asociada a los vectores (matrices) obtenidos.

- $T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$
- $T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

Por lo que la matriz asociada a T en la base canónica es

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

4. Comenzamos igual que en las partes anteriores, calculando el valor de T en los vectores de la base. Como estamos considerando la restricción de T a S, solo nos interesa T en los dos vectores de la base $\mathcal{A}$ y no en una base de $\mathbb{R}^3$.

   - $T(1,0,1) = (3,-1,2)$
   - $T(-1,1,2) = (-1,1,3)$

   Como la letra dice que debemos usar la base canónica de $\mathbb{R}^3$, solo resta colocar los vectores recién calculados como columnas de la matriz asociada. Es decir

$$_{\mathcal{C}}(T)_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Lo que tenemos que encontrar en esta parte es $_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C}}$ y $_{\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B}}$. Comencemos con la segunda matriz.

   Para encontrar $_{\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B}}$, razonando de forma análoga a los ejercicios anteriores, debemos aplicarle la transformación identidad a los vectores de la base $\mathcal{B}$ y buscar sus coordenadas en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ para luego colgar dichas coordenadas como columnas de la matriz. Es claro que esto resulta en una matriz que tiene como columnas a los vectores de la base $\mathcal{B}$. Es decir

$$_{\mathcal{C}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   Para encontrar $_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C}}$ debemos aplicarle la transformación identidad a los vectores de la base canónica y buscar sus coordenadas en la base $\mathcal{B}$. Consideramos entonces el vector $(1,0,0)$ y buscamos sus coordenadas en $\mathcal{B}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2-F_1]{F_3-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

   De donde $coord_{\mathcal{B}}(1,0,0) = (0,1/2,-1/2)$. Razonamos de manera análoga para los vectores restantes y obtenemos $coord_{\mathcal{B}}(0,1,0) = (1,-1,0), coord_{\mathcal{B}}(0,0,1) = (0,1/2,1/2)$. Por lo tanto

$$_{\mathcal{B}}(Id_{\mathbb{R}^3})_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

6. a. Sea $k = \dim(Im(T))$ y tomemos una base de la imagen de T, llamémosla $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$. Como estos vectores están en la imagen de T, existen $v_1, v_2, ..., v_k \in V$ tales que $T(v_1) = w_1, \ \ldots, \ T(V_k) = w_k$. Probemos que el conjunto $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$ el L.I.: supongamos que hay una combinación lineal $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0$. Entonces $0 = T(0) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k$, y como el conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ es L.I. tenemos que $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$. Ahora llamemos S al subespacio de V generado por $\{v_1, v_2, ..., v_k\}$. Como este conjunto es L.I. y por definición genera S, es base de S, y entonces $\dim(S) = k$.

   Por otro lado, del Teorema de las Dimensiones sabemos que $\dim(N(T)) = \dim(V) - \dim(Im(T)) = n - k$. Ahora tomamos una base de $N(T)$, que por lo anterior va a tener $n - k$ elementos. Llamemos a estos últimos $v_{k+1}, \ldots, v_n$.

Ahora probemos que $S \cap N(T) = \{0\}$: un vector v en esa intersección se escribe como combinación lineal $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$, que además cumple que $T(v) = 0$. Entonces $0 = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) = \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_k T(v_k) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_k w_k$, y como el conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$ es L.I. tenemos que $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0$, con lo cual $v = 0$.

De lo anterior deducimos que la suma $S + N(T)$ es directa, con lo cual $\dim(S + N(T)) = \dim(S) + \dim(N(T)) = k + (n - k) = n$, entonces $S + N(T) = V$. Como V es suma directa de S y $N(T)$, uniendo bases de cada uno de ellos obtendremos una base de V. De esta manera, el conjunto $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ forma una base de V.

Por otro lado, como el espacio W tiene dimensión m, existen $m - k$ vectores, $w_{k+1}, ..., w_m$, que junto con los k anteriores forman una base de W. Le llamamos $\mathcal{C}$ al conjunto de todos estos vectores, es decir, $\mathcal{C} = \{w_1, ..., w_k, w_{k+1}, ..., w_m\}$.

Tenemos entonces que para todo vector v_i con $i \leq k$, se cumple que $coord_{\mathcal{C}}(v_i)$ es un vector con un 1 en la i-ésima entrada y ceros en el resto de las entradas pues $T(v_i) = w_i$. Además, para todo vector v_i con $i > k$, se cumple que $coord_{\mathcal{C}}(v_i) = (0, ..., 0)$ pues dicho vector está en el núcleo de T.

Es claro entonces que en estas bases, la matriz asociada a T cumple las condiciones requeridas.

b. Comenzamos buscando una base de la imagen. Para esto, consideramos una matriz genérica y estudiamos las condiciones que deben cumplir sus coeficientes para que exista una preimagen. A partir de esto, obtendremos un sistema que del que resulta la siguiente matriz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & a_{11} \\ -1 & 1 & 3 & -3 & 0 & a_{12} \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 & a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & a_{22} \end{array}\right)$$

Escalerizando, concluimos que las matrices de la imagen deben cumplir que $a_{22} = -a_{11} - a_{12} + a_{21}$. Por lo tanto, una base de la imagen es:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Nos preguntamos entonces, cuáles son las preimágenes de los vectores de esta base. Para esto, consideramos la expresión analítica de la transformación y la igualamos a los diferentes elementos de la base anterior. De este planteo, obtendremos tres sistemas de ecuaciones, compatibles indeterminados, que al resolverlos nos dan la siguiente información:

- $T(d+1, 4d-3c+1, c, d, d+1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $T(d, 4d-3c+1, c, d, d+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- $T(d, 4d-3c, c, d, d+1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Tomando $c = d = 0$ tenemos que los vectores $\{(1,1,0,0,1), (0,1,0,0,1), (0,0,0,0,-1)\}$ forman un conjunto L.I. en $\mathbb{R}^5$ tal que aplicarles T resulta en la base de la imagen que consideramos.

Por otro lado, podemos encontrar una base del núcleo resolviendo un sistema del que resulta la siguiente matriz

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nuevamente, escalerizando, vemos que los vectores del núcleo son los que cumplen $e = a = d, b = 4d - 3c$ por lo que una base del núcleo es

$$\{(1,4,0,1,1),(0,-3,1,0,0)\}$$

Y sabemos que las coordenadas T aplicado a estos vectores, en cualquier base, son $(0,0,0,0)$. Además, junto con los anteriores forman una base de $\mathbb{R}^5$. Es decir, tomaremos la base $\mathcal{C}$ como el conjunto

$$\mathcal{C} = \{(1,1,0,0,1),(0,1,0,0,1),(0,0,0,0,-1),(1,4,0,1,1),(0,-3,1,0,0)\}$$

Lo único que nos falta es completar la base de la imagen para conseguir una base de $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Para esto agregamos una matriz L.I. con las anteriores. O lo que es lo mismo, agregamos una matriz que no cumpla las condiciones para estar en la imagen de T. Con esto obtenemos la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Con estas bases, la matriz asociada a la transformación tiene la forma que se pide.