Sobre el examen

Modalidad

El examen consiste en un conjunto de preguntas de desarrollo. El puntaje máximo es de 100 puntos, y el mínimo para aprobarlo es de 60 puntos.

El examen es teórico, en el sentido de que se hace con lápiz y papel. Esto implica que el examen no va a evaluar la implementación de métodos. Sin embargo, sí es posible que se pida leer e interpretar pequeños pasajes de código, interpretar resultados, o escribir pseudo-códigos describiendo algoritmos.

Puntos extra

Recordamos que quienes ganaron el derecho a examen habiendo cursado la asignatura en 2023 pueden contar con puntos extra para la primera instancia en que rindan el examen. De acuerdo a lo que anunciamos al comienzo del semestre:

- quien apruebe el curso con 90 % o más recibe 20 puntos extra para el examen;
- quien apruebe el curso con entre 70 y 90 % recibe $\lfloor \text{puntaje aprobación} - 70 \rfloor$ puntos extra para el examen;
- quien apruebe el curso con entre 60 y 70 % no recibe puntos extra para el examen.

Este puntaje extra se otorga en los períodos de diciembre de 2023 y en los dos de febrero de 2024; para el período de julio de 2024 se otorga la mitad de puntos. **Los puntos extra se otorgan a partir de los 50 puntos en el examen[1].**

Tipo de preguntas

Las preguntas de examen:

- Pueden requerir que se den definiciones o se describan algoritmos y explicar fortalezas/debilidades, alcance/limitaciones de ellos.
- Pueden ser ejercicios de los prácticos o estar basadas en ejercicios de los prácticos.
- Pueden requerir hacer algunas demostraciones que vimos en el curso o variantes sobre ellas.
- Apuntan a evaluar la **comprensión** de definiciones y métodos, con las ventajas y desventajas que pueden tener uno sobre otro.
- Apuntan a evaluar la **comprensión** de cómo usar herramientas conocidas de Cálculo / Álgebra Lineal para deducir propiedades de distintos métodos numéricos. El examen no apunta a reproducir conocimientos que fácilmente se pueden encontrar en materiales que ya dimos.

[1] Esto quiere decir que nadie que obtenga menos de 50 puntos en el examen lo puede aprobar, independientemente de la cantidad de puntos extra que tenga.

De dónde recomendamos estudiar

- Creemos que las notas del curso son una base suficiente para el estudio de la teoría. Ante la lectura del material, es altamente recomendable tener una *postura activa:* hacernos preguntas, intentar explicar lo que leemos con nuestras propias palabras, resolver los ejemplos por nuestra cuenta (y luego comparar resultados).

- Los ejercicios de los prácticos pueden servir para mejorar nuestro entendimiento de los métodos. Los más "teóricos" pueden servir para afirmar la comprensión de los temas y probar nuestro manejo de las herramientas matemáticas. Los ejercicios que tienen una componente computacional también pueden ser útiles (sobre todo al comenzar a preparar un tema) para ganar intuición sobre el funcionamiento de los métodos.

- Los cuestionarios sirven como base para un entendimiento básico de los conceptos que aprendimos en el semestre, pero hay que tener en cuenta que **el nivel de dificultad del examen es mayor al de la cuestionarios.**

- Los exámenes anteriores también son un buen recurso para practicar, ya que hay varios ejercicios y la mayoría de ellos tienen soluciones.

- En caso de requerir más detalles sobre algún tema en particular, se puede consultar la biografía del curso.

Algunos ejemplos de ejercicios

Además de definiciones y de aplicaciones de las mismas y de describir métodos, para tener una idea del tipo de preguntas que se pueden encontrar en los exámenes, ponemos algunos ejemplos (van en páginas separadas para mayor claridad). En azul hay ideas sobre las resoluciones y algunos comentarios.

1. En el práctico 6 nos encontramos con este ejercicio:

Ejercicio (Orden de Euler implícito)**.** Demostrar que el método de Euler hacia atrás es de primer orden.

La resolución no está en las notas de teórico, pero resolver este problema requiere saber lo que es un error de truncamiento local y que probar que el método de Euler es de primer orden implica demostrar que el error de truncamiento local es de orden cuadrático.

Una forma de resolver el ejercicio es hacer un argumento similar al que se hace en la demostración del Teorema 6.5.1 de las notas del curso: se hace un desarrollo de Taylor, en este caso de segundo orden, y y se hace un argumento usando la condición de Lipschitz de f para llegar a una identidad del tipo

$$|\ell_{k+1}| := |y_{k+1} - u(t_{k+1})| \leq Ch_k|y_{k+1} - u(t_{k+1})| + \mathcal{O}(h_k^2).$$

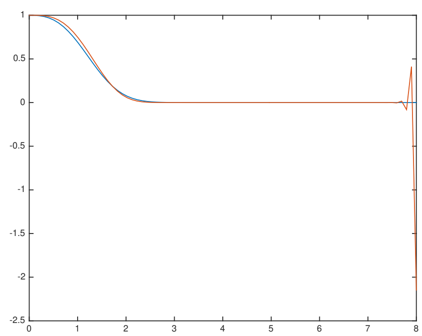
El argumento se cierra de la misma forma que en el Teorema 6.5.1 de las notas del curso.

2. Un ejemplo de ejercicio en el que se pide interpretar código y resultados es el siguiente:

Ejercicio. Los métodos de Euler hacia adelante (FE) y de Euler hacia atrás (BE) con paso fijo $h = 0{,}1$ son utilizados para aproximar la solución de un cierto problema de valores iniciales. Se escribe el siguiente código de Matlab:

```
h = 0.1;
t = linspace(0,8,80);
yFE(1) = 1.;
yBE(1) = 1.;
for k = 1:79
    yFE(k+1) = yFE(k)*(1-t(k)^2*h);
    yBE(k+1) = yBE(k)/(1+h*t(k+1)^2);
end
plot(t,yBE,t,yFE)
```

El código de arriba genera el siguiente gráfico.



a) ¿Cuál es el problema de valores iniciales que está siendo aproximado?

b) El gráfico muestra que uno de los métodos genera oscilaciones, mientras que el otro no. Explique por qué puede ocurrir esto.

c) Se considera resolver el problema mediante el método del trapecio. Escriba la iteración y explique qué ventajas tiene este método respecto a FE y a BE.

a) Aquí hay que hacer un poco de ingeniería reversa con el código que se da. Para el método de Euler hacia adelante, la iteración es

$$y_{k+1} = y_k + hf(t_k, y_k) = y_k\left(1 - t_k^2 h\right) = y_k - ht_k^2 y_k,$$

por lo que se deduce que $f(t, y) = -t^2 y$. La condición inicial del problema es $y(0) = 1$, ya que la primera entrada del vector `t` es el 0 y las primeras entradas `yFE`, `yBE` son 1.

b) Esta parte apunta a que uno de los métodos (Euler hacia atrás) es incondicionalmente estable, mientras que el otro no.

c) Además de escribir cómo es la iteración para el método del trapecio (T), que para nuestro problema queda

$$y_0 = 1, \qquad y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(-t_k^2 y_k - t_{k+1}^2 y_{k+1}\right) \Rightarrow y_{k+1} = \left(\frac{2 - ht_k^2}{2 + ht_{k+1}^2}\right) y_k,$$

esta parte refiere a comparar métodos. La gran ventaja que tiene T sobre los métodos de Euler es que es de mayor orden, lo que repercute en una convergencia más rápida. Respecto a FE, T tiene la ventaja de ser incondicionalmente estable, por lo que no se espera ver el comportamiento malo que muestra la gráfica en anaranjado; además, en este problema podemos despejar y_{k+1} "a mano", lo que implica que no precisamos usar métodos iterativos para dar un paso con T.

3. Otros ejercicios pueden pedir aplicaciones directas de métodos. Esto implica que aunque no se pregunte específicamente por la definición de un concepto, sí se pida utilizarlo y explotar algunas de sus propiedades que vimos en el curso. El siguiente ejemplo refiere a las reflexiones de Householder y el uso de métodos de ortogonalización en problemas de mínimos cuadrados lineales, y tiene cierta similitud con la pregunta 1 del cuestionario 11.

Ejercicio. a) Determinar todas las transformaciones de Householder tales que la imagen del vector $[1\ 1\ 1\ 1]^t$ por ellas sea colineal con el primer vector de la base canónica. Esto es, si

$$\left(\mathbf{I} - \rho \mathbf{u}\mathbf{u}^T\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

determinar los posibles α, ρ, y $\mathbf{u}$.

b) Supongamos ahora que estamos computando la descomposición QR de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

¿Cuántas transformaciones de Householder se requieren? Determinar cómo es la imagen de la matriz A luego de aplicar la primera transformación.

c) Si ya se cuenta con la descomposición QR completa de la matriz A de la parte anterior, explicar cómo se la puede utilizar para resolver un problema de mínimos cuadrados lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{y}$ de forma eficiente, y cómo determinar la norma euclídea del residuo.

a) Sea $\mathbf{x} = [1\ 1\ 1\ 1]^t$. Este punto requiere tener en cuenta que toda transformación de Householder H es ortogonal, por lo que necesariamente tiene que ser $|\alpha| = \|\mathbf{x}\| = 2$. Se puede recordar que las transformaciones de Householder que cumplen lo pedido son de la forma $\mathbf{u} = \mathbf{x} \mp \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1$, y de allí deducir los posibles valores de $\mathbf{u}$, o seguir el razonamiento que hicimos en la sección 5.3.2 de las notas. Finalmente, como $\rho = 2/\|\mathbf{u}\|^2$, tenemos $\rho = 1/6$ cuando $\alpha = 2$ y $\rho = 1/2$ cuando $\alpha = -2$.

b) Como la matriz tiene 3 columnas, se requieren 3 transformaciones de Householder. En la práctica, es un poco más conveniente (aunque en este caso no es fundamental) usar la transformación con $\alpha = 2$, por lo que la resolución que sigue es para ese caso: hay que aplicar la H que hallamos a las columnas de A. La aplicación a la primera ya la tenemos de la parte anterior, mientras que usando la definición, se llega a

$$HA = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) De la última identidad, se deduce directamente que las columnas de HA son l.i., por lo que la matriz es de rango 3 y en consecuencia A también lo es (es decir, A es de rango máximo). Este punto va a la explicación que damos en la Sección 5.3.1 de las notas. Para resolver el problema de mínimos cuadrados lineal, basta con:

- computar el vector $\mathbf{z} := Q^t \mathbf{y}$;
- resolver el sistema triangular superior $R_{1:3}\mathbf{x} = \mathbf{z}_{1:3}$, donde los subíndices indican las filas de las matrices o elementos de los vectores involucrados.

La norma euclídea del residuo es $|\mathbf{z}_4|$.