Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2023

Segundo parcial

25 de noviembre de 2023

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del parcial es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El parcial tiene 6 ejercicios de múltiple opción y dos ejercicios de desarrollo.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 42 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Correctas: 7 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 18 puntos)

Los dos ejercicios de desarrollo se encuentran en la página 3.

Justifique sus respuestas.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.1.a)	D.1.1.b)	D.1.2	D.2	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = e^{x^2+y} - 1 - y - x^2$. Entonces el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto $(0,0)$ es:

(A) $\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 2xy^2$
(B) $\frac{1}{2}y^2 + x^2y + \frac{1}{6}y^3$
(C) $2xy + \frac{1}{3}y^3$
(D) $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}x^3$
(E) $\frac{1}{2}xy$

---

2. Para cada $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ considere la función $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f_{\alpha,\beta}(x,y) = \begin{cases} 3xe^{2y} & si \quad y \geq 0 \\ \\ \alpha x + \beta xy & si \quad y < 0 \end{cases}$$

Los valores de α y β para los cuales $f_{\alpha,\beta}$ es diferenciable en todo $\mathbb{R}^2$ son:

(A) $\alpha = 3$ y $\beta = 6$
(B) $\alpha = 0$ y $\beta = 1$
(C) $\alpha = 1$ y $\beta = 2$
(D) $\alpha = 1$ y $\beta = 1$
(E) $\alpha = 3$ y $\beta = 3$

---

3. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y,z) = e^{(x+y)} + sen(y+z)$, y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ definida como $g(t) = (t^2, t^4, t^8, t^{16})$. Entonces la suma de las entradas de $J_{g \circ f}(0,0,0)$ es:

(A) $e + 1$
(B) π
(C) 1
(D) 0
(E) 120

---

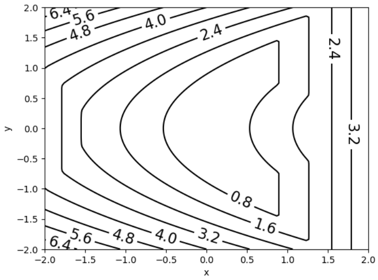
4. Sea $f(x,y)$ una función integrable, y considere la siguiente integral doble:

$$\int_0^1 \int_{y^2}^{2-\sqrt{y}} f(x,y)dxdy$$

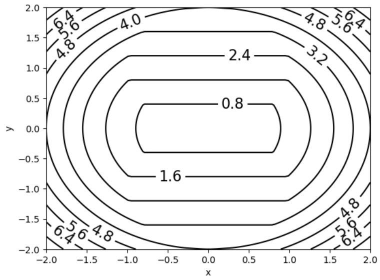
Entonces una forma equivalente de escribir la integral es:

(A) $\int_0^2 \int_{x^2}^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dydx$
(B) $\int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_0^{\sqrt{x-2}} f(x,y)dydx$
(C) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_0^{(x-2)^2} f(x,y)dydx$
(D) $\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx + \int_1^2 \int_{(x-2)^2}^{\sqrt{x-2}} f(x,y)dydx$
(E) $\int_0^2 \int_{\sqrt{x}}^{(x-2)^2} f(x,y)dydx$

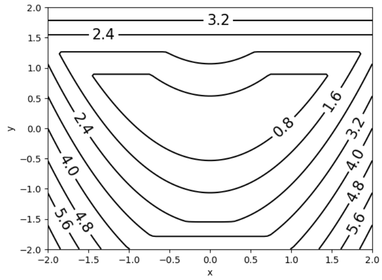
5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x, y) = e^{\text{máx}\{|xy|, x^2\}}$. Entonces, la figura que más se asemeja a las curvas de nivel de f es:



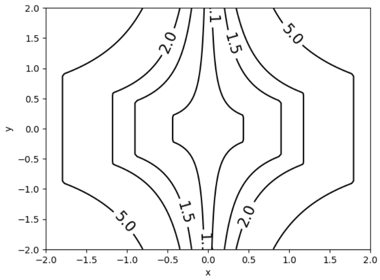
(a)



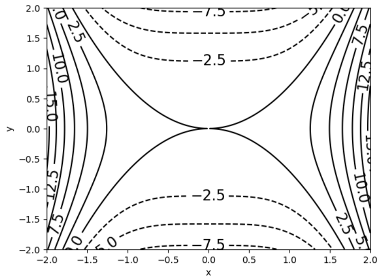
(b)



(c)



(d)



(e)

---

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como: $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y(x^2+y^2)}{x^2-y^2} & si \quad |x| \neq |y| \\ \\ A & si \quad |x| = |y| \end{cases}$

Entonces el valor de A para que f sea continua en el origen es:

(A) No existe A para que f sea continua

(B) $A = 1/2$

(C) $A = 1$

(D) $A = 0$

(E) $A = 3/2$

DESARROLLO

Ejercicio 1

1. Completar las siguientes definiciones.

   a) Sea $a \in \mathbb{R}^2$. Decimos que una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua en a sii ...

   b) Sea a_k una sucesión de puntos en $\mathbb{R}^2$, y $a \in \mathbb{R}^2$. Decimos que $\lim_{k \to \infty} a_k = a$ sii ...

2. Demostrar que si a_k es una sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que $\lim_{k \to \infty} a_k = a$, y f es una función continua en a, entonces $\lim_{k \to \infty} f(a_k) = f(a)$

Ejercicio 2

Sea $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq 1\}$ y la función $f(x, y, z) = z$. Calcule $\iiint_D f(x, y, z)$.