N^o de parcial	Cédula	Apellido y nombre	Salón

Respuestas

Ej. 1	Ej. 2	Ej. 3	Ej. 4
D	B	D	B
Ej. 5	**Ej. 6**	**Ej. 7**	**Ej. 8**
B	D	D	D

- El parcial dura 3 horas.
- Es sobre 60 puntos en total. Cada ejercicio vale $7,5$ puntos, respuesta incorrecta: -1,875 puntos, sin respuesta: 0 punto.
- Solo serán válidas las respuestas indicadas en el cuadro de respuestas.
- En cada ejercicio hay una sola opción correcta.

Múltiple Opción

Tabla de $\Phi(z)$ (normal estándar)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990

α	0.400	0.300	0.200	0.100	0.050	0.025	0.020	0.010	0.005	0.001
z_α	0.253	0.524	0.842	1.282	1.645	1.960	2.054	2.326	2.576	3.090
$z_{\alpha/2}$	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.240	2.326	2.576	2.807	3.291

Ejercicio 1

Una persona debe pagar \$10 para jugar al siguiente juego. Se tiene una urna con 12 canicas de las cuales cinco son rojas, tres son verdes y el resto son azules. El jugador elige una canica al azar de la urna, si elige una roja recibe \$15, si elige una azul recibe \$12 y si elige una verde recibe \$0. ¿Cuál es la ganancia neta esperada luego de jugar 100 veces?

(**A**) $\$66,67$ (**B**) $-\$16,67$ (**C**) $\$108,33$ (**D**) $\$25,00$ (**E**) $-\$6,67$

Ganancia esperada $= 100 \times (5\frac{5}{12} + 2\frac{4}{12} - 10\frac{3}{12}) = 25$

Ejercicio 2

Una fábrica produce X objetos por día, donde X es una variable aletoria con experanza μ y varianza σ^2. Se desea estimar μ a partir del promedio $\overline{X_n}$ de una muestra aleatoria simple $X_1,\dots,X_n$. Usando la desigualdad de Chebyshev, determinar el menor tamaño de muestra que hay que tomar para que, con probabilidad de al menos $0,97$, la distancia entre $\overline{X_n}$ y μ no supere 2σ.

(**A**) 7 (**B**) 9 (**C**) 13 (**D**) 25 (**E**) 40

$\mathbb{P}(|X_n - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{n(2\sigma)^2} = 1 - \frac{1}{4n} > 0,97 \iff n > \frac{1}{4\times 0,03} = 8,33$

Por lo que n debería ser mayor o igual 9.

Ejercicio 3

Los datos

$$0.10, 0.23, 0.54, 0.36$$

son una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria absolutamente continua cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

donde $\theta > 0$. La estimación de θ por el método de los momentos es

(**A**) $2,17$ (**B**) $2,20$ (**C**) $2,23$ (**D**) $2,25$ (**E**) $2,28$

$\mathrm{E}(X) = \int_0^1 \frac{x}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta}\int_0^1 x^{1+\frac{1-\theta}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \left. \frac{x^{2+\frac{1-\theta}{\theta}}}{2+\frac{1-\theta}{\theta}} \right|_0^1 = \frac{1}{\theta}\frac{1}{2+\frac{1-\theta}{\theta}} = \frac{1}{1+\theta}$

Entonces $\theta = \frac{1-E(X)}{E(X)}$ y $\hat{\theta} = \frac{1-\overline{X_n}}{\overline{X_n}} = 2.25$

Ejercicio 4

Los datos

$$0.25, 0.4, 1.50, 2.5, 2.0$$

son una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria cuya función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha^2} x e^{\frac{-x}{\alpha}} & \text{si } 0 < x \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$. La estimación de α por el método de máxima verosimiltud es

(A) $0,65$ **(B)** $0,67$ **(C)** $0,70$ **(D)** $0,72$ **(E)** $0,75$

$L(\alpha) = \prod_{i=1}^{n} \alpha^{-2} x_i e^{\frac{-x_i}{\alpha}} = \alpha^{-2n} (\prod_{i=1}^{n} x_i) e^{-\frac{\sum_{i=1}^{n}}{\alpha}}$

Entonces $l(\alpha) = \log(L(\alpha)) = -2n \log \alpha + \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha}$

Tenemos que $l'(\alpha) = \frac{-2n\alpha + \sum_{i=1}^{n} x_i}{\alpha^2}$ se anula en $\alpha = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{2n}$ por lo que $\hat{\alpha}_n = \frac{\overline{X_n}}{2} = 0.67$

Ejercicio 5

La duración de una computadora se modela por una variable normal con media de 3 años y desviación estándar de 18 meses. Las computadoras se venden con una garantía de 12 meses. Por año se venden 1000 computadoras. Calcular la probabilidad aproximada de que en un año 100 o más usuarios hagan uso de la garantía.

(A) $0,0078$ **(B)** $0,1867$ **(C)** $0,6331$ **(D)** $0,9327$ **(E)** $0,9914$

Sea X la duración de una computadora $P(X < 1) = P(\frac{X-3}{18/12} < \frac{1-3}{18/12}) = \Phi(-24/18) = 0,0918 = p$

Tomando $X_1, \ldots X_{1000} \sim Ber(0.0793)$, tenemos que la probabilidad aproximada de que en una año 100 o más usuarios hagan uso de la garantía es:

$P(\sum X_i \geq 100) = P(\frac{\sum X_i/1000 - p}{\sqrt{p(1-p)/1000}} \geq \frac{100/1000 - p}{\sqrt{p(1-p)}/(10\sqrt{10})}) \approx 1 - \Phi(\frac{0,1-p}{\sqrt{p(1-p)}} 10\sqrt{10}) = 0.1867$

Ejercicio 6

Se realiza una encuesta para tratar de estimar la probabilidad p de que una persona vote a determinado candidato A. Una encuestadora entrevista a 80 personas y les pregunta si van a votar al candidato A en las próximas elecciones. Se obtienen 53 personas favorables al candidato y el resto dicen que no lo votarán. El extremo izquierdo de un intervalo de confianza del 95 % para el p a partir de la muestra será:

(A) $0,519$ **(B)** $0,532$ **(C)** $0,600$ **(D)** $0,559$ **(E)** $0,641$

Modelamos la muestra como Bernoullis y queremos estimar el p.

El promedio sería $\overline{X}_{80} = \frac{53}{80} = 0,6625$

De modo que el intervalo es de la forma

$$I = 0,6625 \pm \frac{\sqrt{0,6625(1-0,6625)}}{\sqrt{80}} z_{0,025} = 0,6625 \pm 0,104 = [0,559; 0,766]$$

Ejercicio 7

Para decidir si realizar un cambio en un proceso productivo se desea testear la hipótesis nula $H_0 : \mu = 10$ contra la alternativa $H_1 : \mu = 10,7$. Si las variables que intervienen son normales con desviación estándar $\sigma = 1$, hallar el menor tamaño de muestra n necesario para poder realizar un test de nivel de significancia 5 % y una potencia de al menos 95 %.

(**A**) 10 (**B**) 14 (**C**) 17 (**D**) 23 (**E**) 31

La región crítica será de la forma $RC = \{\overline{X}_n \geq 10 + z_{0,05}/\sqrt{n}\}$

Su potencia será

$P_{H_1}(RC) = P_{H_1}(\overline{X}_n - 10,7)\sqrt{n} \geq (10 + \frac{z_{0,05}}{\sqrt{n}} - 10,7)\sqrt{n}) = 1 - \Phi(-0,7\sqrt{n} + z_{0,05})$

Entonces $P_{H_1}(RC) \geq 95\,\% \iff \Phi(-0,7\sqrt{n}+z_{0,05}) \leq 0,05 \iff -0,7\sqrt{n}+z_{0,05} \leq -z_{0,05} \iff \sqrt{n} \geq 2z_{0,05}/0,7 \iff n > (2z_{0,05}/0,7)^2 = ((2/0,7)1,645)^2 = 22,09.$

Por lo que el mínimo n es 23.

Ejercicio 8

Se cree que la altura media de las mujeres en de Uruguay ha aumentado de 1,62 a 1,65 metros. Para ello se toman medidas de mil mujeres obteniendo como promedio de las medidas 1,66 metros. Hallar el p-valor correspondiente al test de hipótesis aproximado

$$\begin{cases} H_0 : \mu = 1,62 \\ H_1 : \mu = 1,65 \end{cases}$$

si la desviación estándar muestral es $s_n = 1$.

(**A**) $0,0102$ (**B**) $0,0287$ (**C**) $0,0571$ (**D**) $0,1038$ (**E**) $0,1711$

La RC será de la forma $RC = \{\overline{X}_n > K\}$, de modo que el p-valor será

$$\begin{aligned} P_{H_0}(\overline{X}_n \geq 1,66) &= P_{H_0}((\overline{X}_n - 1,62)\sqrt{1000} \geq (1,66 - 1,62)\sqrt{1000}) \\ &= 1 - \Phi((1,66 - 1,62)\sqrt{1000}) \\ &= 1 - \Phi(1,26) = 0,1038 \end{aligned}$$
