Matemática Inicial

Segunda prueba, julio de 2022.

No Prueba	Apellido y Nombre	Cédula

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (10 puntos) Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones definidas como:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x-2) & \text{si } x > 2 \end{cases}, \qquad g(x) = 2x-1$$

Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución.

$f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x-1) = \begin{cases} 3(2x-1)+2 & \text{si } 2x-1 \leq 2 \\ \ln(2x-1-2) & \text{si } 2x-1 > 2 \end{cases}$

Operando y notando que $2x-1 \leq 2 \Leftrightarrow x \leq 3/2$ se tiene que:

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 6x-1 & \text{si } x \leq \frac{3}{2} \\ \ln(2x-3) & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

Por otro lado $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,/$

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(3x+2) & \text{si } x \leq 2 \\ g(\ln(x-2)) & \text{si } x > 2 \end{cases} = \begin{cases} 6x+3 & \text{si } x \leq 2 \\ 2\ln(x-2)-1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 2 (20 puntos)

Sea $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 3\sqrt{5-x}$

1. Probar que f es inyectiva.

   Solución.

   Considero $x_1, x_2 \in (-\infty, 1]$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Se tiene así:

   $$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3\sqrt{5-x_1} = 3\sqrt{5-x_2} \Leftrightarrow \sqrt{5-x_1} = \sqrt{5-x_2} \Leftrightarrow 5-x_1 = 5-x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2,$$

   de lo cual se concluye que f es inyectiva.

2. Hallar el conjunto imagen de f.

   Solución

   Notemos que x pertenece al dominio de f si y sólo si $x \leq 1$. Luego

   $$x \leq 1 \Leftrightarrow 5-x \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt{5-x} \geq 2 \Leftrightarrow 3\sqrt{5-x} \geq 6.$$

   Por lo tanto $Im(f) = [6, +\infty)$

3. Modificar el codominio para que la función sea biyectiva y para dicho codominio hallar f^{-1}.

   Solución

   De lo hallado en la parte anterior se desprende que el codominio buscado es $[6, +\infty)$. Considerando $f : (-\infty, 1] \to [6, +\infty)$, tenemos que su inversa es $f^{-1} : [6, +\infty) \to (-\infty, 1]$, con $f^{-1}(y) = x$ tal que $f(x) = y$.

$$f(x) = y \Leftrightarrow 3\sqrt{5-x} = y \Leftrightarrow 9(5-x) = y^2 \Leftrightarrow 9x = 45 - y^2 \Leftrightarrow x = \frac{45-y^2}{9}.$$

Por lo tanto $f^{-1} : [6, +\infty) \to (-\infty, 1]$, con $f^{-1}(y) = \frac{45-y^2}{9}$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Probar por inducción completa que para todo número n **par**, con $n \in \mathbb{N}$, se tiene que $3^n - 1$ es divisible por 4.

Solución

Como queremos probar la propiedad para los naturales pares (es decir, de la forma $n = 2m$ con $m \in \mathbb{N}$, podemos formularla como

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ se tiene que } 3^{2m} - 1 = 4k, \text{ con } k \in \mathbb{N}$$

Paso base: Veamos que la igualdad vale para $m = 1$. En ese caso se verifica que $3^2 - 1 = 8 = 4k$, para $k = 2$.

Paso inductivo: Sabiendo que $3^{2m} - 1 = 4k$, con $k \in \mathbb{N}$ queremos probar que $3^{2(m+1)} - 1 = 4k'$, con $k' \in \mathbb{N}$. Para ello notamos que

$$3^{2(m+1)} - 1 = 3^{2m}3^2 - 1 = (3^{2m} - 1 + 1)3^2 - 1 = 3^2(4k) + 3^2 - 1.$$

Como el último miembro podemos escribirlo como $4(3^2k + 2)$, tomando $k' = 3^2k + 2$ tenemos el resultado buscado.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4x - 5}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1})$

Solución

1. Hallando las raíces del numerador y denominador podemos factorizar ambos polinomios. Así, para todo $x \neq 5$ se tiene que

   $$\frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4x - 5} = \frac{(x+2)(x-5)}{(x+1)(x-5)} = \frac{x+2}{x+1}.$$

   Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x^2 - 4x - 5} = \lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{7}{6}$.

2. Observemos en primer lugar que

   $$\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1} = \frac{x^2 + 3x - x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 3x} + \sqrt{x^2 + 1}}$$

   Cuando $x \to \infty$ el numerador es equivalente a $3x$ y el denominador a $x + x$. Tenemos entonces que

   $$\lim_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2}$$

Ejercicio 5 (5 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} e^{(x^2-4)} & \text{si } x \leq 2 \\ ax - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases},$$

donde a es un número real.

Hallar a para que la función f sea continua.

Solución: Por propiedades de suma, producto y composición de funciones contínuas sabemos que f es contínua para todo $x \neq 2$. Para garantizar la continuidad en $x = 2$ necesitamos que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = f(2).$$

Tenemos además que $\lim_{x \to 2^-} f(x) = f(2) = e^{(2^2-4)} = 1$. Por lo tanto debemos hallar a para que

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} ax - 5 = 1,$$

lo cual ocurre si y solo si $a(2) - 5 = 1$, es decir, si $a = 3$.

No Prueba	Apellido y Nombre	Cédula

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (10 puntos) Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones definidas como:

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{si } x\leq -4 \\ \ln(x+4) & \text{si } x>-4 \end{cases}, \qquad g(x)=3x-5$$

Hallar $f\circ g$ y $g\circ f$.
Solución.
$f\circ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/\, f\circ g(x)=f(g(x))=f(3x-5)=\begin{cases} 2(3x-5)+3 & \text{si } 3x-5\leq -4 \\ \ln(3x-5+4) & \text{si } 3x-5>-4 \end{cases}$
Operando y notando que $3x-5\leq -4 \Leftrightarrow x\leq 1/3$ se tiene que:

$$f\circ g(x)=\begin{cases} 6x-7 & \text{si } x\leq \frac{1}{3} \\ \ln(3x-1) & \text{si } x>\frac{1}{3} \end{cases}$$

Por otro lado $g\circ f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,/$

$$g\circ f(x)=g(f(x))=\begin{cases} g(2x+3) & \text{si } x\leq -4 \\ g(\ln(x+4)) & \text{si } x>-4 \end{cases}=\begin{cases} 6x+4 & \text{si } x\leq -4 \\ 3\ln(x+4)-5 & \text{si } x>-4 \end{cases}$$

Ejercicio 2 (20 puntos)
Sea $f:(-\infty,2]\to\mathbb{R}$ tal que $f(x)=2\sqrt{11-x}$

1. Probar que f es inyectiva.

   Solución.

   Considero $x_1,x_2\in(-\infty,2]$ tales que $f(x_1)=f(x_2)$. Se tiene así:

   $$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow 2\sqrt{11-x_1}=2\sqrt{11-x_2}\Leftrightarrow \sqrt{11-x_1}=\sqrt{11-x_2}\Leftrightarrow 11-x_1=11-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2,$$

   de lo cual se concluye que f es inyectiva.

2. Hallar el conjunto imagen de f.

   Solución

   Notemos que x pertenece al dominio de f si y sólo si $x\leq 2$. Luego

   $$x\leq 2\Leftrightarrow 11-x\geq 9\Leftrightarrow \sqrt{11-x}\geq 3\Leftrightarrow 2\sqrt{11-x}\geq 6.$$

   Por lo tanto $Im(f)=[6,+\infty)$

3. Modificar el codominio para que la función sea biyectiva y para dicho codominio hallar f^{-1}.

   Solución

   De lo hallado en la parte anterior se desprende que el codominio buscado es $[6,+\infty)$. Considerando $f:(-\infty,1]\to[6,+\infty)$, tenemos que su inversa es $f^{-1}:[6,+\infty)\to(-\infty,1]$, con $f^{-1}(y)=x$ tal que $f(x)=y$.

$$f(x)=y \Leftrightarrow 2\sqrt{11-x}=y \Leftrightarrow 4(11-x)=y^2 \Leftrightarrow 4x=44-y^2 \Leftrightarrow x=\frac{44-y^2}{4}.$$

   Por lo tanto $f^{-1}:[6,+\infty)\to(-\infty,1]$, con $f^{-1}(y)=\frac{44-y^2}{4}$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Probar por inducción completa que para todo número n **impar**, $n\geq 3$, con $n\in\mathbb{N}$, se tiene que 3^n-3 es divisible por 12.

Solución

Como queremos probar la propiedad para los naturales impares (es decir, de la forma $n=2m+1$ con $m\in\mathbb{N}$, podemos formularla como

$$\forall m\in\mathbb{N} \text{ se tiene que } 3^{2m+1}-3=12k, \text{ con } k\in\mathbb{N}$$

Paso base: Veamos que la igualdad vale para $m=1$ (y por lo tanto $n=3$). En ese caso se verifica que $3^3-3=24=12k$, para $k=2$.

Paso inductivo: Sabiendo que $3^{2m+1}-3=12k$, con $k\in\mathbb{N}$ queremos probar que $3^{2(m+1)+1}-3=12k'$, con $k'\in\mathbb{N}$. Para ello notamos que

$$3^{2(m+1)+1}-3=3^{2m+1}3^2-3=(3^{2m+1}-3+3)3^2-3=3^2(12k)+3^3-3.$$

Como el último miembro podemos escribirlo como $12(3^2k+2)$, tomando $k'=3^2k+2$ tenemos el resultado buscado.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Calcular los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+3x})$
2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{x^2+x-12}$

Solución

1. Observemos en primer lugar que

$$\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+3x}=\frac{x^2+4-x^2-3x}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+3x}}=\frac{-3x+4}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+3x}}$$

   Cuando $x\to\infty$ el numerador es equivalente a $-3x$ y el denominador a $x+x$. Tenemos entonces que

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+3x})=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x}{2x}=-\frac{3}{2}$$

2. Hallando las raíces del numerador y denominador podemos factorizar ambos polinomios. Así, para todo $x \neq 3$ se tiene que

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12} = \frac{(x+2)(x-3)}{(x+4)(x-3)} = \frac{x+2}{x+4}.$$

Por lo tanto $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + x - 12} = \lim_{x \to 3} \frac{x+2}{x+4} = \frac{5}{7}$.

Ejercicio 5 (5 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & \text{si } x < 3 \\ e^{(x^2-9)} & \text{si } x \geq 3 \end{cases},$$

donde a es un número real.

Hallar a para que la función f sea continua.

Solución: Por propiedades de suma, producto y composición de funciones contínuas sabemos que f es contínua para todo $x \neq 3$. Para garantizar la continuidad en $x = 3$ necesitamos que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3).$$

Tenemos además que $\lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3) = e^{(3^2-9)} = 1$. Por lo tanto debemos hallar a para que

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^+} 2x + a = 1,$$

lo cual ocurre si y solo si $2(3) + a = 1$, es decir, si $a = -5$.