Resumen de clase anterior:

- Algunos desarrollos de Taylor importantes:

$$\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+x^4+\dots+x^n+o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\operatorname{sen}(x) = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

$$\operatorname{arctg}(x) = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o(x^{2n+1})$$

- En general, si f tiene derivada de orden $n+1$ continua en $x=0$ entonces

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$$

• Notación o minúscula: Sea $n \in \mathbb{N}$

1) $h(x) = o(x^n)$ significa que $\frac{h(x)}{x^n} \to 0$

(En particular, $h(x) = o(1) \Leftrightarrow h(x) \to 0$)

2) $f(x) = g(x) + o(x^n)$ significa $f(x) - g(x) = o(x^n)$

3) Si $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0 \Rightarrow o(\alpha x^n) = o(x^n)$
$\alpha . o(x^n) = o(x^n)$

4) $x^m . o(x^n) = o(x^{n+m})$, $\forall m \in \mathbb{N}$
$\frac{o(x^n)}{x^m} = o(x^{n-m})$, $\forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$,

5) Si $h(x) = o(x^n) \Rightarrow h(x) = o(x^m)$, $\forall m : 0 \leq m \leq n$
(En particular $h(x) = o(x^n) \Rightarrow h(x) \to 0$)

Nota: 1) Todos los límites son con $x \to 0$
2) Resultados análogos valen con $x \to a$.

Clase 39

Aplicación al cálculo de límites

Clase pasada: $\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x} = \log(3/2)$

$\left(\text{Idea: } 3^x = e^{\log(3)x} \;,\; 2^x = e^{\log(2)x} \right.$
$\left. \text{y usar Taylor} \right)$

Ejemplo: Se define $\cot(x) := \frac{1}{tg(x)} = \frac{\cos(x)}{sen(x)}$

Calcular: $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}\left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right)$

$$\frac{1}{x}\left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{\cos(x)}{sen(x)} - \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{x\cos(x) - sen(x)}{x\, sen(x)}\right)$$

$$= \frac{x\cos(x) - sen(x)}{x^2\, sen(x)} = (*)$$

$$\begin{cases} \cos(x) = 1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + o(x^2) \\ \operatorname{sen}(x) = x + 0x^2 - \frac{1}{6}\cdot x^3 + o(x^3) \end{cases}$$

$$(*) = \frac{\cancel{x} - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3) - \cancel{x} + \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^4)}$$

$$= \frac{-\frac{1}{3}\cdot x^3 + o(x^3)}{x^3 + o(x^4)} = \frac{-\frac{1}{3} + \overbrace{o(1)}^{0}}{1 + \underbrace{o(x)}_{0}} = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\cot(x) - \frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{3}.$$

<u>Ejemplo</u>: Probar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+ax)}{x} = a$

<u>Solución</u>: $\log(1+x) = x + o(x)$

$$\frac{\log(1+ax)}{x} = \frac{ax + o(ax)}{x} \overset{\text{si } a\neq 0}{=} \frac{ax + o(x)}{x}$$

$$= \frac{a + o(1)}{1} = \underset{\downarrow\,0}{a + o(1)} \to a$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+ax)}{x} = a \quad \text{si } a \neq 0$$

<u>Si $a=0$</u>: $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log(\overbrace{1+ax}^{\overset{1}{\shortparallel}})}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 = a.$

<u>Ejemplo</u>: Probar que $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+ax)^{1/x} = e^a$

<u>Solución</u>:

$$(1+ax)^{1/x} \underset{(*)}{=} e^{\log((1+ax)^{1/x})} = e^{\frac{1}{x}\log(1+ax)}$$

Por el ejemplo anterior $\frac{1}{x}\log(1+ax) \to a$

$$\Rightarrow (1+ax)^{1/x} \to e^a$$

[<u>Obs</u>: Si x está muy cerca de cero, $1+ax>0$
entonces vale $(*)$ en un entorno de cero.]

Ejemplo: Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{tg(2x)}{tg(3x)}$

$$\frac{tg(2x)}{tg(3x)} = \frac{sen(2x) \cdot cos(3x)}{cos(2x) \cdot sen(3x)} = \frac{sen(2x)}{sen(3x)} \cdot \frac{cos(3x)}{cos(2x)}$$

$$sen(x) = x + o(x)$$

$$\frac{tg(2x)}{tg(3x)} = \frac{2x + o(x)}{3x + o(x)} \cdot \frac{cos(3x)}{cos(2x)}$$

$$= \frac{2 + \overset{\to 0}{o(1)}}{3 + \underset{\downarrow 0}{o(1)}} \cdot \underbrace{\frac{cos(3x)}{cos(2x)}}_{\downarrow 1} = \frac{2}{3} \text{ si } x \to 0.$$

Acotaciones para el resto de taylor y aplicaciones

- Queremos estimar

$$E_n(x) = f(x) - T_n(f(x))$$

se le llama el resto de taylor

= el error de aproximar $f(x)$ por su polinomio de taylor.

Podemos escribir: $f(x) = T_n(f(x)) + E_n(x)$

Teo. (Fórmula de Lagrange para el resto de taylor)

Si f tiene derivada de orden $n+1$ continua en $x=0$, entonces:

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

para algún $c \in [0, x]$ si $x > 0$

o $c \in [x, 0]$ si $x < 0$

($c = c(x, n)$ depende de x y n)

O sea, podemos escribir

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

<u>Corolario</u> (Recíproco del teo. 7.4)

$$f(x) = T_n(f) + E_n(x)$$

$$\text{Si } \frac{E_n(x)}{x^n} = \underbrace{f^{(n+1)}(c)}_{\substack{\text{acotado} \\ \text{pues} \\ f^{(n+1)} \text{ cont.}}} \cdot \frac{x}{\underbrace{(n+1)!}_{\downarrow \, 0}} \longrightarrow 0 \text{ si } x \to 0$$

$$\Rightarrow E_n(x) = o(x^n).$$

Aplicaciones

<u>Ejemplo:</u> Calcular la constante de Euler e con un error menor que 0,001.

<u>Solución:</u> $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + E_n(x)$

$$\underset{(x=1)}{\Rightarrow} \quad e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + E_n(1)$$

Por Teo. anterior ; con $f(x) = e^x$:

$$E_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot 1^{n+1} = \frac{e^c}{(n+1)!} \qquad \text{con } c \in [0,1]$$

$$\Rightarrow \quad 0 < E_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \underset{\text{queremos}}{<} \frac{1}{1000}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3000 < (n+1)!$$

$2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$,

$6! = 720$, $7! = 5040 > 3000$

$\Rightarrow n+1 = 7$ sirve , tomamos $\boxed{n = 6}$

$$e \simeq 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{1957}{720}$$

$$= 2{,}71\underline{8} \dots$$

Funciones con primitivas no elementales

Hecho: No hay fórmula elemental$^{(*)}$ para expresar $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

(*) No se puede expresar esa integral usando polinomios, e^x, $\log(x)$, $\operatorname{sen}(x)$, $\cos(x)$, $\operatorname{arcsen}(x)$, $\arccos(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$ y un número finito de sumas, restas, multiplicación, división y composición de esas funciones

Ejercicio: Calcular $\int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$

(si el cálculo es aproximado, estimar el error)

Solución: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{e^c}{4!}x^4$

para algún c entre 0 y x.

$x = -t^2$: $e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2!} - \frac{t^6}{3!} + \frac{e^c}{4!}t^8$

para algún $c \in [-t^2, 0]$

$$\int_0^{1/2} e^{-t^2}dt = \int_0^{1/2}\left(1-t^2+\frac{t^4}{2}-\frac{t^6}{6}\right)dt + \underbrace{\int_0^{1/2}\frac{e^c t^8}{4!}dt}$$

ojo! e^c depende de t y no se puede sacar para afuera de la integral.

Si $0\leq t\leq \frac{1}{2} \Rightarrow c\in[-t^2,0]\subseteq[-\frac{1}{4},0]$

cuando $t=1/2$

$$0\leq \frac{e^c t^8}{4!}\leq \frac{e^0 t^8}{4!}=\frac{t^8}{4!}=\frac{t^8}{24}$$

$$\Rightarrow 0\leq \int_0^{1/2}\frac{e^c t^8}{4!}\leq \int_0^{1/2}\frac{t^8}{24}dt = \left.\frac{t^9}{9.24}\right|_{t=0}^{t=\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2^9.9.24} = \frac{1}{110592} < \frac{1}{100000}$$