Resumen de la clase anterior

- $T_n(f(x);a) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k$

<u>Propiedad</u>: Es el único polinomio de grado $\leq n$ que coincide con f y sus n primeras derivadas en $x=a$.

<u>Caso especial</u>: $T_n(f(x);0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{k}(0)}{k!} x^k$

<u>Notación alternativa</u>: $T_n f(x) = T_n(f(x)) = T_n(f(x);0)$

<u>Obs</u>. Si $g(x) = f(x+a) \Rightarrow T_n g(x) = T_n(f(x);a)$

<u>Probamos que</u>: Si $T_n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, entonces:

i) $T_{n-1}(f'(x)) = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}$

ii) $T_{n+1}(F(x)) = F(0) + \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot \frac{x^{k+1}}{k+1}$

donde F es una primitiva cualquiera de f.

Enunciamos: El operador de Taylor T_n es lineal:

i) $T_n(f(x)+g(x)) = T_n(f(x)) + T_n(g(x))$

ii) $T_n(a f(x)) = a T_n(f(x))$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Casos especiales:

- $T_n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$
- $T_{2n+1}(\operatorname{sen}(x)) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$
- $T_{2n}(\cos(x)) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
- $T_n(\log(1+x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$

Clase 38

Sustitución: Sea $g(x) = f(\alpha x)$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow T_n g(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha a) \cdot \alpha^k (x-a)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha a)}{k!} (\alpha x - \alpha a)^k$$

$$= T_n f(\alpha x; \alpha a)$$

En particular: $T_n g(x;0) = T_n f(\alpha x; 0)$

$$T_n g(x) = T_n f(\alpha x)$$

Ejemplo: Sabemos $T_n(e^x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$$\Rightarrow T_n(e^{-x}) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^n}{n!}$$

Ojo!: $T_n(e^{x^2}) \neq 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \dots$

Ejemplo: Coseno hiperbólico: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

Seno hiperbólico: $\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

Obs: $\operatorname{senh}'(x) = \cosh(x)$, $\cosh'(x) = \operatorname{senh}(x)$

$$T_n(\cosh(x)) = \frac{1}{2}\left(T_n(e^x) + T_n(e^{-x})\right)$$

linealidad

$$= \frac{1}{2}\Big(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!} +$$

sustitución

$$1 - \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\Big)$$

$$T_{2n}(\cosh(x)) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

derivación

$$T_{2n-1}(\operatorname{senh}(x)) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Obs. $\left(\frac{x^{2k}}{(2k)!}\right)' = \frac{\cancel{2k}\, x^{2k-1}}{(2k-1)!\,\cancel{(2k)}} = \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}$

<u>Teo 7.4.</u> Sean f, g con derivada de orden n en $x=0$

Sea P un polinomio de grado $\leq n$.

Si $f(x) = P(x) + x^n g(x)$ con $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

entonces $P(x) = T_n f(x)$.

<u>Idea de la prueba:</u> Probar por inducción que todas las derivadas de $x^n g(x)$ hasta orden n se anulan en $x=0$.

Luego $f^{(k)}(0) = P^{(k)}(0)$ para $k = 0, 1, \dots, n$

Por teo. de la clase anterior $P(x) = T_n f(x)$. $\square$

<u>Ejemplo:</u> Vamos a calcular $T_n\left(\frac{1}{1-x}\right)$

$P(x) = x^{n+1} - 1$ tiene raiz $x = 1$

Bajamos por Ruffini:

	1	0	0	0	$\cdots$	0	-1
1		1	1	1		1	1
	1	1	1	1		1	$/$

$x^{n+1} - 1 = (x-1)(x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1)$

$$\Rightarrow \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = x^n + x^{n-1} + \dots + x + 1$$

$$\frac{1-x^{n+1}}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$$

$$\underbrace{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}_{\frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \underbrace{\frac{x^{n+1}}{1-x}}_{x^n g(x)}} \quad (*)$$

Con $g(x) = \dfrac{x}{1-x} \to 0$ si $x \to 0$

Por tanto. $T_n\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ (1)

Obs: De aquí podemos sacar el poli. de Taylor de $\log(1+x)$

Por sustitución $x \to -x$ en (1):

$$T_n\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

$$t_{2n}\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + x^{2n} \quad (2)$$

$$\Rightarrow t_{2n+1}(\log(1+x)) = 0 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Prim.

$\log(1+0)$

Ejemplo: Hallar el poli. de Taylor de $\operatorname{arctg}(x)$

Recordar $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg}(x) + C$

En (*) cambiamos x por $-x^2$:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \frac{(-x^2)^{n+1}}{1-(-x^2)}$$

$$\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2} = \underbrace{(-1)^{n+1}\frac{x^2}{1+x^2}}_{\downarrow\, 0} \cdot x^{2n}$$

Por teo. 7.4. $t_{2n}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n}$

$$\Rightarrow T_{2n+1}(\operatorname{arctg}(x)) = \underset{\substack{\| \\ 0}}{\operatorname{arctg}(0)} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

La clase que viene probaremos el siguiente resultado:

<u>Teo 7.4</u> (Recíproco):

Si f tiene derivada de orden $n+1$ continua en 0 entonces se cumple:

$$f(x) = T_n f(x) + x^n g(x)$$

para alguna función $g(x)$ que verifica que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$.

<u>Notación</u>: $h(x) = o(x^n)$ significa que
"o minúscula" $\frac{h(x)}{x^n} \to 0$ cuando $x \to 0$.

Con esa notación podemos reescribir lo anterior como:
$$f(x) = T_n f(x) + o(x^n)$$

Ejemplo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Aplicación al cálculo de límites

Ejemplo: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x}$

$$a^x = e^{\log(a)x} = 1 + \log(a)x + o(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} + \log(3)x + o(x) - (\cancel{1} + \log(2)x + o(x))}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\log(3) - \log(2))x + o(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \log(3) - \log(2) + \overbrace{\frac{o(x)}{x}}^{\to 0}$$

$$= \log(3) - \log(2) = \log(3/2)$$

<u>Sin la notación o minúscula:</u>

$$a^x = e^{\log(a) x} = 1 + \log(a) x + x \overset{0}{\overset{\uparrow}{g}}(x)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + \log(3)x + x \overset{0}{\overset{\uparrow}{g_1}}(x) - 1 - \log(2)x - x \overset{0}{\overset{\uparrow}{g_2}}(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\log(3) - \log(2))x}{x} + \frac{x g_1(x) - x g_2(x)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \log(3) - \log(2) + \overbrace{g_1(x) - g_2(x)}^{\to 0}$$

$$= \log(3) - \log(2) \; .$$

(**Obs:** Si $h_1 = o(x^n)$ y $h_2 = o(x^n)$

$$\Rightarrow h_1 + h_2 = o(x^n)$$)