Aplicaciones del Álgebra Lineal
2^{DO} semestre - 2024

Práctico 8: Perron - Frobenius.

Ref. ALA, JAP, Capítulo IV, Secciones 2 y 3.

Ejercicio 1 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $\rho(A)$ es valor propio de A. Probar que $\rho(A + n.Id) = \rho(A) + n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2 Probar que el producto de matrices de permutación, es una matriz de permutación.

Ejercicio 3 Probar que si $v \in K^o$, entonces $\lambda.v \in K^o$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 4 Sea P$\in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ matriz de permutación. Calcular $\text{P}^{n!}$. Justificar.

Ejercicio 5 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, no negativa.

a. Probar que, si A es irreducible y p es un entero positivo, entonces A^p es irreducible.

b. ¿Será verdad el recíproco? O sea, si A^p es irreducible para algún entero positivo p, entonces A es irreducible.

Ejercicio 6 Supongamos que A y B son matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, no negativas.

a. Demostrar o dar un contraejemplo: si A y B son irreducibles, entonces $A + B$ es irreducible.

b. Demostrar o dar un contraejemplo: si A y B son irreducibles, entonces $A.B$ es irreducible.

Ejercicio 7 Demostrar el final del Teorema "light" del Teorema de Perron-Frobenius. O sea que para todo valor propio $\lambda \neq \rho(A)$, se verifica que $|\lambda| < \rho(A)$.

Ejercicio 8 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz no negativa. Probar que son equivalentes:

a. A es primitiva.

b. Existe k_0 tal que para todo $k \geq k_0$, $A^k > 0$.

c. Existe k, tal que $A^k > 0$.

Nota: *Decimos que* $A \geq 0$ *es primitiva si es irreducible y para todo* $\rho(A) \neq \lambda \in Spec(A)$ *se tiene que* $||\lambda|| < \rho(A)$.

Ejercicio 9

a. Caracterizar las matrices 2x2 que son reducibles.

b. Caracterizar las matrices 2x2 que son primitivas.

Marcelo Lanzilotta