Aplicaciones del Álgebra Lineal
2^{DO} semestre - 2023

Práctico 8: Conos.

Ref. ALA, JAP, Capítulo IV, Sección 1.

Ejercicio 1 Sea $T : V \to V$ una transformación lineal sobre un espacio vectorial V, y sea K un cono en V.

a. Demostrar que la preimagen de K, o sea $T^{-1}(K)$ también es un cono.

b. Dar condiciones sobre K y T para que el cono $T^{-1}(K)$ sea sólido.

c. Investigar si $T(K)$ tiene que ser siempre un cono (o no).

Ejercicio 2

a. Dar ejemplos en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ de vectores extremales en conos.

b. Probar que un vector interior de un cono no es extremal.

c. Sea $x \in K^o$, e $y \in K$. Probar que $x + y \in K^o$.

Ejercicio 3 Sea K un cono. Probar que:

a. Si $u, v \in \partial K$, y $x = u + v \in \partial K$, entonces $\alpha.u + \beta.v \in \partial K$, para todo $\alpha, \beta \geq 0$,

b. Probar que $\hat{K} = \{w \in K \ / \ w = \alpha.u + \beta.v \in K, \text{ con } \alpha \geq 0 \text{ y } \beta \geq 0\}$ es un cono incluido en ∂K.

Ejercicio 4 Sea $K \subset V = \mathbb{R}^n$, un cono y sea $W < V = \mathbb{R}^n$, un subespacio propio de V. Probar que $K \cap W$ es un cono de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Ejercicio 5 Probar que todo cono en $\mathbb{R}$ está generado por vectores extremales.

Ejercicio 6

a. Considere el cono $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x^2 + y^2 \leq z^2, \text{ con } 0 \leq z\}$. Probar que este cono no es poliédrico.

b. En un cono poliédrico, ¿cuáles son los vectores extremales?

Ejercicio 7 Sea K un cono, y sea S un cono incluido en ∂K. Sea u un vector de K que no está en S, tal que existe v otro vector de K, con $u + v \in \partial K$.

a. Probar que $u \in \partial K$.

b. Probar que: $S' = \{w + \alpha.u \ / \text{ con } w \in S, \alpha \geq 0\}$ es un cono, tal que $S \subsetneq S' \subset \partial K$.

Marcelo Lanzilotta