Práctico 6 - Ecuaciones diferenciales ordinarias

Los ejercicios 13 y 14 son los "entregables" de este práctico. Todo estudiante inscripto en el curso va a tener asignado un único ejercicio del práctico 4, 5, o 6 para entregar antes del comienzo del segundo período de parciales. **El 21 de noviembre vamos a avisar qué ejercicio le corresponde a cada estudiante, por lo que recomendamos fuertemente haber terminado y tener escrito los ejercicios 13 y 14 para esa fecha.**

Ejercicio 1 (Forma estándar)**.** Se considera que la *forma estándar* de expresar una EDO (ecuación diferencial ordinaria) con condición inicial es

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde y puede ser escalar o vectorial. Expresar las siguientes EDO en forma estándar:

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 5y = \cos t, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} y''' + e^t y'' - (t^2+1)y' + 5y = t^2, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 0, \\ y''(1) = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' = u' + e^t v, \\ v'' = e^t u + v', \\ u(0) = 0, \\ v(0) = 1, \\ u'(0) = 2, \\ v'(0) = -1. \end{cases}$$

Ejercicio 2 (Orden de Euler implícito)**.** Demostrar que el método de Euler hacia atrás es de primer orden.

Ejercicio 3 (Órdenes experimentales)**.** Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = -y^2, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

a) Resolver la ecuación analíticamente.

b) Para $y_0 = 2$, resolver la ecuación numéricamente usando

   (I) el método de Euler hacia adelante;

   (II) el método de Euler hacia atrás;

   (III) el método del trapecio.

   En todos los casos, evaluar el error global en $t = 1$, utilizando pasos constantes $h = 1/10$, $1/20$, $1/40$, $1/80$.

c) Asumiendo que el error global en $t = 1$ es de la forma $|e| \simeq Ch^\alpha$, donde C y α son constantes positivas, realizar un ajuste de mínimos cuadrados de los resultados experimentales para cada uno de los métodos obtenidos.

   [Sugerencia: al tomar logaritmo en la expresión del error se puede obtener un problema lineal, aunque no equivalente. Ver el Ejercicio 12 (Concentración de sustancia) del Práctico 6.]

d) Verificar que los órdenes de convergencia experimentales son consistentes con los obtenidos teóricamente.

Ejercicio 4 (Método del trapecio)**.** Hallar el valor aproximado $y(1)$ de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = -2ty^2(1+t) - \dfrac{y}{1+t}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

resolviéndola con el método del trapecio con paso $h = 0{,}1$ (en la iteración de punto fijo, hacer solo tres iteraciones). Calcular el error cometido resolviendo exactamente la ecuación.

[Sugerencia: realizando el cambio de variable $z = y(1+t)$ se obtiene una ecuación de variables separables.]

Ejercicio 5 (Implementación de Euler hacia atrás)**.** Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} y'' + 4t^2 y = -2\operatorname{sen}(t^2) - 8t^3, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Hallar aproximadamente el valor $y'(t_1)$, donde t_1 es la menor raíz de $y(t)$ en el intervalo $[0,1]$. Para ello, escribir la ecuación como un sistema de primer orden, y utilizar el método de Euler hacia atrás con paso $h = 0{,}1$ (en la iteración de punto fijo realizar tres iteraciones). Interpolar linealmente para hallar aproximadamente t_1.

Ejercicio 6 (Runge-Kutta)**.** Realizar 10 pasos del método de Runge-Kutta de orden 4 discutido en el teórico para determinar aproximadamente el valor $y(3)$ de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t-y}{t}, \\ y(2) = 3. \end{cases}$$

Hallar el error cometido resolviendo analíticamente la ecuación.

[Sugerencia: realizando el cambio de variable $z = y/t$, se obtiene una ecuación de variables separables.]

Ejercicio 7 (Método *leapfrog*)**.** La diferencia centrada con paso h constante

$$y'(t_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

da lugar al método *leapfrog de dos pasos*

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2hf(t_k, y_k) \tag{1}$$

para resolver la ecuación diferencial ordinaria $y' = f(t,y)$. Dado y_0, para calcular el iterado y_1 se suele usar un método de paso simple y luego se puede utilizar (1) para calcular y_k con $k \geq 2$.

a) Demostrar que $y(t_{k+1}) = y(t_{k-1}) + 2hy'(t_k) + O(h^3)$ y deducir el orden del método leapfrog de dos pasos. Para estimar el error de truncamiento local, se asume que en (1) se cuenta con los valores exactos de y_{k-1} e y_k y se estima el error al calcular y_{k+1}.

b) Estudiar computacionalmente la estabilidad absoluta del método leapfrog de dos pasos. Para ello, considerar el problema test $y' = \lambda y$, $y(0) = 1$ (con $\lambda < 0$ a elegir) e implementar (1) usando el método de Euler hacia adelante para computar y_1. Para varios valores de h a elegir, graficar la solución computada en el intervalo $[0, 10]$, y observar el comportamiento para t grande. Usar el método de Euler hacia atrás para computar y_1 y comparar. ¿Cambia en algo el comportamiento?

c) El comportamiento de este método es muy distinto si permitimos que λ sea complejo. Elegir $\lambda = \alpha i$ ($\alpha \neq 0$) como un complejo con parte imaginaria pura y repetir la parte anterior, graficando las partes real e imaginaria de la solución por separado.

Si no se les asignan valores, en Octave tanto `i` como `j` pueden designar a la unidad imaginaria. Para extraer las partes real e imaginaria de variables complejas, se pueden utilizar los comandos `real` e `imag`, respectivamente.

Ejercicio 8 (*Solvers* para problemas rígidos)**.** El problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \quad y' = -1000(y - \operatorname{sen} t) + \cos t, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

con $t \in [0, 1]$, es moderadamente rígido.

a) Hallar la solución exacta, ya sea a mano o con el comando `dsolve`.

b) Computar la solución usando `ode23`. ¿Cuántos pasos se necesitan?

c) Computar la solución usando `ode23s`, que está diseñado para ecuaciones rígidas. ¿Cuántos pasos se necesitan?

d) Graficar las soluciones obtenidas en las dos partes anteriores, y hacer zoom en una región en la que la solución varíe rápidamente y en una región en la que varíe lentamente. ¿Cómo son los pasos de ambos algoritmos en estas regiones?

Ejercicio 9 (Modelo predador-presa)**.** Un modelo clásico en ecología es el de *predador-presa de Lotka-Volterra.* Consideremos un ecosistema simple que consiste en conejos que tienen un suministro infinito de alimento y zorros que deben cazar a los conejos para alimentarse. Esto se modela con un par de EDOs no lineales de primer orden,

$$\begin{cases} c'(t) = 2c(t) - \alpha c(t)z(t), \\ z'(t) = -z(t) + \alpha c(t)z(t), \\ c(0) = c_0, \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Aquí, $c(t)$ y $z(t)$ denotan las poblaciones de conejos y zorros en tiempo t respectivamente, y $\alpha \geq 0$ es una constante. Si $\alpha = 0$, las poblaciones no interactúan: los conejos se reproducen[1] y los zorros se mueren de hambre. Si $\alpha > 0$, los zorros encuentran a los conejos con una probabilidad proporcional al producto de las dos poblaciones. Estos encuentros implican una reducción en la población de conejos y un aumento en la de zorros.

[1] Por simplicidad, nuestro modelo asume que la única causa de muerte de un conejo es ser comido por un zorro, de modo que en este caso la población de conejos crecería indefinidamente.

Las soluciones a este PVI son órbitas periódicas, con un período que depende de (c_0, z_0). Es decir, existe un $T > 0$ (que depende de c_0 y de z_0) tal que

$$c(t+T) = c(t), \quad z(t+T) = z(t) \quad \forall t > 0.$$

a) Computar la solución con $c_0 = 300$, $z_0 = 150$ y $\alpha = 0{,}01$. Debería encontrarse que T es cercano a 5. Hacer dos gráficos: uno que tenga a c y z en función de t, y un diagrama de fase con c en el eje de las x y z en el de las y.

b) Computar y graficar la solución con $c_0 = 15$, $z_0 = 22$ y $\alpha = 0{,}01$. Debería encontrarse que T es cercano a 6,62.

c) Computar y grafique la solución con $c_0 = 102$, $z_0 = 198$ y $\alpha = 0{,}01$. Determinar el período T.

d) El punto $(c, z) = (1/\alpha, 2/\alpha)$ es un punto de equilibrio estable. Si las poblaciones tienen este valor, entonces no cambian. Si las poblaciones son inicialmente cercanas a este valor, permanecerán cerca de él para todo tiempo. Sean $u(t) = c(t) - 1/\alpha$ y $v(t) = z(t) - 2/\alpha$. Las funciones $u(t)$ y $v(t)$ satisfacen otro par de EDOs no lineales, pero si se ignoran los términos que incluyen uv, el sistema se vuelve lineal[2]. ¿Cuál es este sistema lineal? ¿Cuál es el período de sus soluciones periódicas? Comparar el resultado obtenido con los valores computados en las partes anteriores.

Ejercicio 10 (Del examen de diciembre de 2023)**.** Sea $f\colon [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tan regular como sea necesario. Para resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

fijamos un valor $\theta \in [0, 1]$ y consideramos el método con paso $h > 0$ constante

$$y_{k+1} = y_k + h\left[\theta f(t_k, y_k) + (1-\theta) f(t_{k+1}, y_{k+1})\right].$$

En todos los pasos se utiliza el mismo valor de θ para computar la solución numérica.

a) ¿Para cuál o cuáles valores de θ el método es implícito?

b) ¿Para cuál o cuáles valores de θ el método es incondicionalmente absolutamente estable?

c) Discutir el orden del método según el valor de θ.

[Puede ser útil identificar métodos conocidos para ciertos valores de θ, como $\theta = 0$, $\theta = 1/2$, o $\theta = 1$.]

Ejercicio 11 (Son todos Runge-Kutta)**.** Mostrar que los métodos de Euler hacia adelante, de Euler hacia atrás, y del trapecio, son de Runge-Kutta.

[2] De hecho, para quienes ya hayan cursado o estén cursando Ecuaciones Diferenciales, esto es simplemente linealizar la EDO para u y v.

Ejercicio 12 (Del examen de febrero de 2024)**.** Sea $f\colon [t_0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tan regular como sea necesario. Para resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

consideramos el siguiente método de Runge-Kutta con paso constante h:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(t_k, y_k), \\ K_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2},\ y_k + \frac{h}{4}(K_1 + K_2)\right), \\ y_{k+1} &= y_k + hK_2. \end{aligned}$$

a) Indicar si se trata de un método explícito o implícito. Justificar.

b) Analizar la estabilidad absoluta de este método.

c) Se considera el problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{1}{y(t)}, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

cuya solución se sabe que satisface $y'(t) > 0$ para todo $t > 0$. Determinar el valor de y_1 usando el método de Runge-Kutta mencionado arriba con paso $h = 1$.

Ejercicio 13 (Un problema de segundo orden no lineal)**.** Se sabe que existe una única función suave $y\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} y'' = y^2 - 1 \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} . \tag{2}$$

El objetivo de este ejercicio es hallar y de tres formas distintas.

a) *Método de disparo.* Supongamos que conocemos el valor de $\eta = y'(0)$. Entonces, se podría utilizar un *solver* como `ode23` o `ode45` para resolver el problema de valor inicial

$$y'' = y^2 - 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \eta, \tag{3}$$

en el intervalo $[0, 1]$. Cada valor de η determina una solución diferente $y(x; \eta)$ y un valor correspondiente para $y(1; \eta)$. La condición de frontera deseada $y(1) = 1$ lleva a la definición de una función de η:

$$f(\eta) := y(1; \eta) - 1.$$

Escribir una función de Octave cuyo argumento sea η, resuelva el PVI (3), y devuelva $f(\eta)$. Luego, usar un método para resolver ecuaciones no lineales para encontrar el valor η^* que haga que $f(\eta^*) = 0$. Finalmente, usar este η^* en el problema de valor inicial para obtener la solución y al problema (2). Reportar el valor de η^* obtenido.

b) *Método de diferencias finitas.* Dividimos el intervalo $[0,1]$ en $n+1$ subintervalos iguales de longitud $h := 1/(n+1)$:

$$t_i = ih, \quad i = 0, \dots, n+1,$$

y llamemos $y_i = y(t_i)$, $i = 0, \dots, n+1$. Demostrar que, para cada $i = 1, \dots, n$, se tiene

$$y''(t_i) = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2).$$

Esta expresión permite reemplazar la ecuación diferencial con un sistema no lineal de ecuaciones $n \times n$:

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = h^2(y_i^2 - 1), \quad i = 1, \dots, n.$$

Las condiciones de frontera en (3) implican $y_0 = 0$ y $y_{n+1} = 1$. Así, podemos considerar la matriz tridiagonal $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con -2 en la diagonal y 1 en las super- y subdiagonales. Las condiciones de frontera $y_0 = 0$ y $y_{n+1} = 1$ pueden representarse mediante un vector $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, con $b_i = 0$, $i = 1, \dots, n-1$, y $b_n = 1$. La formulación vectorial de la ecuación en diferencias no lineal es:

$$A\mathbf{y} + \mathbf{b} = h^2\left(\mathbf{y}^2 - 1\right), \tag{4}$$

donde $\mathbf{y}^2$ es el vector que contiene los cuadrados de los elementos de $\mathbf{y}$, es decir, el operador de potencia por elementos `y.^2`. Existen al menos dos formas de resolver este sistema.

c) *Iteración lineal.* Este método se basa en escribir la ecuación (4) en la forma

$$A\mathbf{y} = h^2\left(\mathbf{y}^2 - 1\right) - \mathbf{b}.$$

Empezando con una conjetura inicial para el vector solución $\mathbf{y}^0$, la iteración consiste en considerar, para cada $k \geq 0$, el vector $\mathbf{y}^{k+1}$ como la solución del sistema

$$A\mathbf{y}^{k+1} = h^2\left((\mathbf{y}^k)^2 - 1\right) - \mathbf{b}.$$

Podemos usar un método eficiente para sistemas tridiagonales (basado en el algoritmo de Thomas) para la resolución del sistema en cada paso. Resulta que esta iteración converge linealmente y proporciona un método robusto para resolver las ecuaciones en diferencias no lineales. Implementar esta iteración en Octave, eligiendo un criterio de parada y tolerancia que considere adecuados. Graficar la solución obtenida con $n = 100$ y compararla con la obtenida en la parte a).

d) *Método de Newton.* Escribimos la ecuación (4) en la forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{y}) := A\mathbf{y} + \mathbf{b} - h^2(\mathbf{y}^2 - 1) = \mathbf{0}.$$

Observar que la jacobiana de $\mathbf{F}$ es

$$\frac{\partial \mathbf{F}_i}{\partial \mathbf{y}_j} = A - h^2\mathtt{diag}(2\mathbf{y}), \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Implementar este método en Octave, eligiendo un criterio de parada y tolerancia que considere adecuados. Graficar la solución obtenida con $n = 100$ y compararla con la obtenida en las partes a) y c).

Ejercicio 14 (El *salto del siglo*)**.** En los juegos olímpicos de 1968, celebrados en Ciudad de México, Bob Beamon destrozó el récord mundial vigente a la fecha (de $8,35\,\mathrm{m}$) al saltar $8,90\,\mathrm{m}$[3]. Después de semejante hazaña, llamada *el salto del siglo*, algunas personas sugirieron que la menor resistencia del aire debido a la altitud de 2250 m de la Ciudad de México fue un factor contribuyente. Este problema examina esa posibilidad.

Consideramos un modelo matemático simple que ignora los aspectos técnicos del salto y representa al saltador como un proyectil. Tomamos un sistema de coordenadas cartesianas en $\mathbb{R}^2$, con origen en la tabla de despegue (desde donde se realiza el salto). La velocidad inicial del saltador tiene magnitud v_0 y forma un ángulo θ_0 respecto al eje x. Las únicas fuerzas que actúan después del despegue son la gravedad y la resistencia del aire, D, que es proporcional al cuadrado de la magnitud de la velocidad. No hay viento. Las ecuaciones que describen el movimiento del saltador son

$$\begin{cases} x' = v\cos\theta, \\ y' = v\sin\theta, \\ \theta' = -\dfrac{g}{v}\cos\theta, \\ v' = -\dfrac{D}{m} - g\sin\theta. \end{cases} .$$

Arriba, D es la fuerza de rozamiento con el aire, que supondremos modelada por

$$D = \frac{c\rho s}{2} v^2.$$

Las constantes para este ejercicio son la aceleración de la gravedad, $g = 9{,}81\,\mathrm{m/s^2}$, la masa, $m = 80\,\mathrm{kg}$, el coeficiente de resistencia, $c = 0{,}72$, el área de sección transversal del saltador, $s = 0{,}50\,\mathrm{m^2}$, y el ángulo de despegue, $\theta_0 = 22{,}5^\circ = \pi/8$ radianes. Escribir una función de Octave que, tomando como entradas la velocidad inicial v_0 y la densidad del aire ρ, devuelva la longitud del salto con estas constantes. Se puede usar el *solver* que se considere adecuado. La longitud de cada salto es $x(t_f)$, donde el tiempo en el aire, t_f, se determina por la condición $y(t_f) = 0$. Implementar un evento para que el solver compute la solución solamente en el intervalo $[0, t_f]$.

Calcular cuatro saltos diferentes, con valores distintos v_0, ρ.

a) Un salto en la altura: $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ y $\rho = 0{,}94\,\mathrm{kg/m^3}$.

b) Un salto en el nivel del mar: $v_0 = 10\,\mathrm{m/s}$ y $\rho = 1{,}29\,\mathrm{kg/m^3}$.

c) El salto del siglo: $\rho = 0{,}94\,\mathrm{kg/m^3}$. Usando un método para hallar raíces de funciones de una variable, determinar v_0 para que la longitud del salto sea el récord de Beamon, $8{,}90\,\mathrm{m}$.

d) El salto del siglo en el nivel del mar: $\rho = 1{,}29\,\mathrm{kg/m^3}$ y v_0 es el valor determinado en la parte c).

Extraer conclusiones: ¿qué es más importante, la densidad del aire o la velocidad inicial del saltador?

[3] Como referencia, su marca recién fue sobrepasada en 1991 por Mike Powell, que con su salto de $8,95\,\mathrm{m}$ ostenta el récord mundial vigente. El salto de Beamon sigue siendo el récord olímpico hasta el día de hoy.