Práctico 6 - Ecuaciones diferenciales ordinarias

Este práctico no tiene ejercicios "entregables". Todo estudiante inscripto en el curso va a tener asignado un ejercicio del práctico 4 o 5 para entregar el 12 de noviembre a las 23:59. **El 10 de noviembre vamos a avisar qué ejercicio le corresponde a cada estudiante.**

La primer entrega de ejercicio tiene un puntaje máximo de 15 puntos y la segunda un máximo de 20 puntos. Para la aprobación del curso se necesita un mínimo de 15 puntos en las entregas de ejercicios y 60 puntos en el total (cuestionarios+ejercicios+obligatorio).

Ejercicio 1 (Forma estándar)**.** Se considera que la *forma estándar* de expresar una EDO (ecuación diferencial ordinaria) con condición inicial es

$$\begin{cases} y' = f(t,y), \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

donde y puede ser vectorial. Expresar las siguientes EDO en forma estándar

$$\begin{cases} y'' - 3y' + 5y = \cos t, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 1. \end{cases} \qquad \begin{cases} y''' + e^t y'' - (t^2+1)y' + 5y = t^2, \\ y(1) = 1, \\ y'(1) = 0, \\ y''(1) = 3. \end{cases} \qquad \begin{cases} u'' = u' + e^t v, \\ v'' = e^t u + v', \\ u(0) = 0, \\ v(0) = 1, \\ u'(0) = 2, \\ v'(0) = -1. \end{cases}$$

Ejercicio 2 (Orden de Euler implícito)**.** Demostrar que el método de Euler hacia atrás es de primer orden.

Ejercicio 3 (Órdenes experimentales)**.** Consideremos la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = -y^2, \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

a) Resolver la ecuación analíticamente.

b) Para $y_0 = 2$, resolver la ecuación numéricamente usando

   (i) el método de Euler hacia adelante;

   (ii) el método de Euler hacia atrás;

   (iii) el método del trapecio.

   En todos los casos, evaluar el error global en $t = 1$, utilizando pasos constantes $h = 1/10$, $1/20$, $1/40$, $1/80$.

c) Asumiendo que el error global en $t = 1$ es de la forma $|e| \simeq Ch^\alpha$, donde C y α son constantes positivas, realizar un ajuste de mínimos cuadrados de los resultados experimentales para cada uno de los métodos obtenidos.

   [Sugerencia: al tomar logaritmo en la expresión del error se puede obtener un problema lineal, aunque no equivalente. Ver el Ejercicio 9 del Práctico 6.]

d) Verificar que los órdenes de convergencia experimentales son consistentes con los obtenidos teóricamente.

Ejercicio 4 (Método del trapecio)**.** Hallar el valor aproximado $y(1)$ de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = -2ty^2(1+t) - \dfrac{y}{1+t}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

resolviéndola con el método del trapecio con paso $h = 0{,}1$ (en la iteración de punto fijo, hacer solo tres iteraciones). Calcular el error cometido resolviendo exactamente la ecuación.

[Sugerencia: realizando el cambio de variable $z = y(1+t)$ se obtiene una ecuación de variables separables.]

Ejercicio 5. Consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} y'' + 4t^2 y = -2\operatorname{sen}(t^2) - 8t^3, \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = -2. \end{cases}$$

Hallar aproximadamente el valor $y'(t_1)$, donde t_1 es la menor raíz de $y(t)$ en el intervalo $[0,1]$. Para ello, escribir la ecuación como un sistema de primer orden, y utilizar el método de Euler hacia atrás con paso $h = 0{,}1$ (en la iteración de punto fijo realizar tres iteraciones). Interpolar linealmente para hallar aproximadamente t_1.

Ejercicio 6 (Runge-Kutta)**.** Realizar 10 pasos del método de Runge-Kutta de orden 4 discutido en el teórico para determinar aproximadamente el valor $y(3)$ de la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y' = \dfrac{t-y}{t}, \\ y(2) = 3. \end{cases}$$

Hallar el error cometido resolviendo analíticamente la ecuación.

[Sugerencia: realizando el cambio de variable $z = y/t$, se obtiene una ecuación de variables separables.]

Ejercicio 7 (Método *leapfrog*)**.** La diferencia centrada

$$y'(t_k) \approx \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$$

da lugar al método *leapfrog de dos pasos*

$$y_{k+1} = y_{k-1} + 2h_k f(t_k, y_k)$$

para resolver la ecuación diferencial ordinaria $y' = f(t,y)$. Determinar el orden de este método y analizar su estabilidad para el problema $y' = ay$ con $a < 0$.

Ejercicio 8 (*Solvers* para problemas rígidos)**.** El problema de valores iniciales

$$\begin{cases} y' = -1000(y - \operatorname{sen} t) + \cos t, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

con $t \in [0,1]$, es moderadamente rígido.

a) Hallar la solución exacta, ya sea a mano o con el comando `dsolve`.

b) Computar la solución usando `ode23`. ¿Cuántos pasos se necesitan?

c) Computar la solución usando `ode23s`, que está diseñado para ecuaciones rígidas. ¿Cuántos pasos se necesitan?

d) Graficar las soluciones obtenidas en las dos partes anteriores, y hacer zoom en una región en la que la solución varíe rápidamente y en una región en la que varíe lentamente. ¿Cómo son los pasos de ambos algoritmos en estas regiones?

Ejercicio 9 (Modelo predador-presa). Un modelo clásico en ecología es el de *predador-presa de Lotka-Volterra.* Consideremos un ecosistema simple que consiste en conejos que tienen un suministro infinito de alimento y zorros que deben cazar a los conejos para alimentarse. Esto se modela con un par de EDOs no lineales de primer orden,

$$\begin{cases} c'(t) = 2c(t) - \alpha c(t)z(t), \\ z'(t) = -z(t) + \alpha c(t)z(t), \\ c(0) = c_0, \\ z(0) = z_0. \end{cases}$$

Aquí, $c(t)$ y $z(t)$ denotan las poblaciones de conejos y zorros en tiempo t respectivamente, y $\alpha \geq 0$ es una constante. Si $\alpha = 0$, las poblaciones no interactúan: los conejos se reproducen[1] y los zorros se mueren de hambre. Si $\alpha > 0$, los zorros encuentran a los conejos con una probabilidad proporcional al producto de las dos poblaciones. Estos encuentros implican una reducción en la población de conejos y un aumento en la de zorros.

Las soluciones a este PVI son órbitas periódicas, con un período que depende de (c_0, z_0). Es decir, existe un $T > 0$ (que depende de c_0 y de z_0) tal que

$$c(t+T) = c(t), \quad z(t+T) = z(t) \quad \forall t > 0.$$

a) Computar la solución con $c_0 = 300$, $z_0 = 150$ y $\alpha = 0{,}01$. Debería encontrarse que T es cercano a 5. Hacer dos gráficos: uno que tenga a c y z en función de t, y un diagrama de fase con c en el eje de las x y z en el de las y.

b) Computar y graficar la solución con $c_0 = 15$, $z_0 = 22$ y $\alpha = 0{,}01$. Debería encontrarse que T es cercano a 6,62.

c) Computar y grafique la solución con $c_0 = 102$, $z_0 = 198$ y $\alpha = 0{,}01$. Determinar el período T.

d) El punto $(c, z) = (1/\alpha, 2/\alpha)$ es un punto de equilibrio estable. Si las poblaciones tienen este valor, entonces no cambian. Si las poblaciones son inicialmente cercanas a este valor, permanecerán cerca de él para todo tiempo. Sean $u(t) = c(t) - 1/\alpha$ y $v(t) = z(t) - 2/\alpha$. Las funciones $u(t)$ y $v(t)$ satisfacen otro par de EDOs no lineales, pero si se ignoran los términos que incluyen uv, el sistema se vuelve lineal[2]. ¿Cuál es este sistema lineal? ¿Cuál es el período de sus soluciones periódicas? Comparar el resultado obtenido con los valores computados en las partes anteriores.

[1] Por simplicidad, nuestro modelo asume que la única causa de muerte de un conejo es ser comido por un zorro, de modo que en este caso la población de conejos crecería indefinidamente.

[2] De hecho, para quienes ya hayan cursado o estén cursando Ecuaciones Diferenciales, esto es simplemente linealizar la EDO para u y v.