Capítulo 8

Polinomio de Taylor

8.1. Polinomio de Taylor y límites

Nomenclatura y notación:

- Polinomio de McLaurin: es el polinomio de Taylor alrededor de 0.
- Infinitésimo: decimos que una función f es un infinitésimo de orden n en un punto a si $f(x) \to 0$ cuando $x \to a$ y además $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{(x-a)^n} = 0$.
- $P_n(f,a)$: es el polinomio de Taylor de orden n de la función f en el punto a.

1. El polinomio de McLaurin de orden 4 asociado a una cierta función f es $3 - 5x + 4x^2 - x^3 - 2x^4$. Calcular $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$, $f^{(4)}(0)$.

2. Calcular el polinomio de Taylor de grado n de la función f en el punto a en los siguientes casos:

   a) $f(x) = x^4 - x^3 + 2$, $a = 0$ y $a = 1$, $n = 2$ *b*) mismo polinomio pero $n = 4$

   c) $f(x) = \sin(x)$, $a = \pi$, $n = 6$ *d*) $f(x) = \tan(x)$, $a = 0$, $n = 4$

   e) $f(x) = e^x$, $a = 0$ y $a = 1$, $n = 4$ *f*) $f(x) = \log(x)$, $a = 1$ y $a = e$, $n = 4$

   g) $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$, $a = 1$, $n = 4$ *h*) $f(x) = e^{x^2}$, $a = 0$ y $a = 2$, $n = 4$

   i) $f(x) = \int_1^{x^2} e^{-t^2}\, dt$, $a = 1$, $n = 3$ *j*) $f(x) = \int_1^{x^2} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$, $a = 1$, $n = 3$

3. Considere la función $f(x) = x\cos(x) - \sin(x)$.

   a) Encontrar el polinomio de McLaurin de orden 5 de f.

   b) Analiza si f presenta extremo relativo en $x = 0$.

   c) Calcular el límite:

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) + \frac{x^3}{3}}{x^5}$$

4. Calcular los siguientes límites usando polinomios de Taylor:

   $$a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \log(1+x)}{x^2} \qquad b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - \operatorname{sen} x}{x^2 + 4x^3}$$

   $$c)\quad \lim_{x\to a^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2 - a^2}} \qquad d)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x) - \cos(x)}{x^2}$$

   $$e)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x - x\cos x}{x^\alpha},\ \alpha > 0$$

   $$f)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x^2/2 + \operatorname{sen} x - 2x}{1 - \cos x - x^2/2} \qquad g)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x) - x - x^2/2}{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}$$

5. Calcular los siguientes límites usando polinomios de Taylor:

   $$a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan(x)}{\sin^3(x)} \qquad b)\quad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \qquad c)\quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

   $$d)\quad \lim_{x\to \pi/2} \frac{\log(\sin(x))}{(\pi - 2x)^2} \qquad e)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{(\log(1+x))^2}$$

6. Determinar los valores de los parámetros (a, b, y/o c, según corresponda) para obtener un infinitésimo del mayor orden posible para $x \to 0$. Hallar la parte principal.

   $$a)\quad a(e^x - 1) - bx^2 - x \qquad b)\quad x + a\operatorname{sen} x + b\operatorname{tg} x \qquad c)\quad e^x\ \operatorname{sen} x - (ax + bx^2 + cx^3)$$

   $$d)\quad \log(1+x) - \frac{ax + bx^2}{1 + cx}$$

7. Sea Q un polinomio de grado n.

   a) Probar que $P_m(Q,a)(x) = Q(x)$ para todo $m \geq n$.

   b) Sea a raíz de Q de multipilicidad k. Probar que $P_m(Q,a) = 0$ si $m < k$ y a es raíz de $P_m(Q,a)$ con multiplicidad k si $m \geq k$.

8. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones n veces derivables.

   Probar que

a) $P_n(f+g,a) = P_n(f,a) + P_n(g,a)$

b) $P_n(fg,a) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ donde $P_n(f,a)P_n(g,a) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x-a)^k$

c) Si $g(a) = 0$ entonces $P_n(f \circ g, a) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ donde $P_n(f,0) \circ P_n(g,a)(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k(x-a)^k$

9. Hallar el desarrollo de McLaurin de orden n de las siguientes funciones:

$$a)\quad \frac{1}{2-x} \qquad b)\quad (x^2+x)e^x \qquad c)\quad \log(1-x) \qquad d)\quad \frac{1}{x^2-2x+1}$$

$$e)\quad e^x - \cos(x) \qquad f)\quad \operatorname{sen}(x)\cos(x) \qquad g)\quad \operatorname{sen}^2(x) \qquad h)\quad \sqrt{1-x}$$

10. a) Calcular $P_n(f,0)$ para la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

    Sugerencia: escribir $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1-x} + \dfrac{b}{1+x}$ para algún par $a,\ b \in \mathbb{R}$.

    b) Calcular el $P_n(f,0)$ para la función $f(x) = \log\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

11. Consideremos la función: $f(x) = e^x - x - 2 + \cos x - \dfrac{x^3}{6}$

    a) Encontrar el polinomio de McLaurin de orden 4 de f.

    b) Analizar si f presenta un extremo relativo en 0.

    c) Calcular, discutiendo según $\alpha \in \mathbb{R}^+$, el límite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x^\alpha}$$

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable, tal que existe $k < n$ para el cual $f(a) = f'(a) = f''(a) = ... = f^{(k)}(a) = 0$ y $f^{(k+1)}(a) \neq 0$.

    Probar las siguientes afirmaciones:

    a) Existe $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, tal que $g(a) \neq 0$ y $f(x) = (x-a)^{k+1} g(x)$.

    b) Si $k+1$ es impar, entonces f no tiene un extremo relativo en a.

    c) Si $k+1$ es par, entonces f tiene un extremo relativo en a. Ademas si $f^{(k+1)}(a) > 0$ entonces f tiene un mínimo relativo, mientras que si $f^{(k+1)}(a) < 0$ tiene un máximo relativo.

8.2. Aproximaciones

1. **Aproximaciones racionales**

   En este ejercicio basta con dar una forma de encontrar la aproximación, no es necesario hallarla explícitamente.

   a) Dar una aproximación racional del número e con un error menor a 10^{-4}.

   b) Dar una aproximación racional del número $\sin(2)$ con un error menor a 10^{-4}.

   c) Dar una aproximación racional del número $\sqrt{8}$ con un error menor a 10^{-4}.

   d) Dar una aproximación racional del número $\log(1{,}2)$ con un error menor a 10^{-4}.

2. **Aproximacimaciones de integrales**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la función definida por $f(t) = e^{-t^2}$.

   La idea de este ejercicio es aproximar el valor de la integral $\int_0^1 f(t)\,dt$

   a) Dar una partición equi-espaciada de forma que $S^*(f,P) - \int_0^1 f(t)\,dt \leq 10^{-6}$. Sugerencia: revisar la prueba de que una función monótona es integrable.

   b) Dar un n tal que $\left| \int_0^1 P_n(f,0)(t)\,dt - \int_0^1 f(t)\,dt \right| < 10^{-6}$

3. *a*) Usando el polinomio de McLaurin de orden 3 de $\operatorname{sen}(x)$, hallar una aproximación de la solución no nula a la ecuación $x^2 = \operatorname{sen}(x)$.

   b) Llamemos r a la aproximación de la parte anterior. Ver qué estimación da una calculadora de r^2 y $\operatorname{sen}(r)$.

   c) Demostrar que:
   $$|r^2 - \operatorname{sen}(r)| < 0{,}05$$

4. **Acotaciones uniformes**

   a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función C^∞ (es decir con derivadas de todos los ordenes).

   Probar que si existe M tal que $|f^{(n)}(x)| \leq M \ \forall n$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ que verifica que $|P_n(f,0) - f(x)| \leq \epsilon$.

   b) Sea $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\Psi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & \text{si } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   Probar que $P_n(\Psi,-1) = 0$ para todo n. Deducir que las derivadas de Ψ no están acotadas,

8.3. Complementarios

1. Calcule los siguientes límites

$$a)\quad \lim_{x\to 0} \frac{(\cos(x)-1)(\log(1+x)-x)-x^4}{x^5}$$

$$b)\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1}{x(x+1)}-\frac{\log(x+1)}{x^2}\right)$$

$$c)\quad \lim_{x\to 0}(\cos(x)+\sin(x))^{\frac{1}{x}} \qquad d)\quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{1-cos(x)}}$$

2. Encontrar una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable que no tenga derivada segunda en 0 y que verifique $|f(x)|\le x^3$.