Aplicaciones del Álgebra Lineal
2^{DO} semestre - 2024

Práctico 7: Matrices unitarias y hermitianas.

Ref. ALA, JAP, Capítulo III, Sección 2

Ejercicio 1 Probar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ verifica que $A.A^* = \lambda.I_n$, con $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces A es normal.

Ejercicio 2 Caracterizar en términos de sus entradas las matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, que son:

(i) normales; (ii) unitarias; (iii) hermitianas.

Ejercicio 3 Probar que todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

Ejercicio 4 Se considera $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Si para todo $v \in \mathbb{C}^n$, $||Uv|| = ||v||$, probar que U es unitaria.

Sugerencia: como primer paso pobar el resultado anterior para $n = 2$, considerando como posibles vectores $v \in \mathbb{C}^2$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, etc.

Ejercicio 5 Probar o dar un contraejemplo a las afirmaciones siguientes:

a. Producto de matrices unitarias es unitaria.

b. Producto de matrices normales es normal.

c. Producto de matrices hermitianas es hermitiana.

Ejercicio 6 Probar que si $U \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es una matriz ortogonal, entonces existe $\theta \in \mathbb{R}$, tal que $U = T(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ o bien $U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.T(\theta)$

Ejercicio 7 Calcular la forma de Schur para cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 8 Muestre el Teorema de Cayley-Hamilton a partir del teorema de Schur (sin usar Jordan, ¡por supuesto!).

Ejercicio 9 Decimos que una matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es *unitariamente diagonalizable* si existe una matriz unitaria U tal que $U^*.A.U$ es diagonal. Si los valores propios de A son $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, entonces, probar que son equivalentes:

a. A es normal;

b. A es unitariamente diagonalizable;

c. se verifica: $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2$;

d. $\mathbb{C}^n$ acepta una base ortonormal de vectores propios de A.

Ejercicio 10 Probar o dar contraejemplo a las afirmaciones siguientes. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es hermitiana, entonces para toda $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$:

a. la matriz SAS^* es hermitiana.

b. si S es invertible, la matriz SAS^{-1} es hermitiana.

Ejercicio 11 Una matriz hermitiana A se llama *definida positiva* si $x^*Ax > 0$ para todo vector $0 \neq x \in \mathbb{C}^n$. Demuestre que son equivalentes:

a. A es definida positiva;

b. todos los valores propios de A son reales positivos.

Ejercicio 12 *Raíz cuadrada de matrices hermitianas* Demuestre que una matriz hermitiana A es definida positiva si y solo si existe una matriz hermitiana B definida positiva tal que $B^2 = A$.

Ejercicio 13 Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ hermitiana, y sea $x \in \mathbb{C}^n$, con $||x|| = 1$. Se considera $\alpha = x * .A.x$. Probar que existen valores propios λ_1, λ_2 de A tal que $\lambda_1 \geq \alpha \geq \lambda_2$.

Marcelo Lanzilotta