# Clase 30:

# Condición suficiente de diferenciabilidad

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Afirmación: Existen la derivadas parciales de f en todo punto del plano y ninguna es continua en (0,0).

$(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2 \cdot (x^2+y^2) - 2x\, x^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2y^2 - 2x^4}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 + 3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h - 0}{h}$$

$$= 1$$

$$f_x(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Ejercicio: $f_y(x,y)$.

¿Es $f_x(x,y)$ continua en $(0,0)$?

¿$\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}$?

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \dfrac{0}{y^4} = 0 \\ \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \dfrac{x^4}{x^4} = 1 \end{array}\right\}$$

Los límites direccionales no coinciden

$\Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y)$

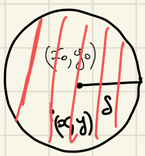
$f_x(x,y)$ no es continua en $(0,0)$.

Ejercicio: ver que pasa con $f_y(x,y)$

**Teorema: (Condición suficiente de diferenciabilidad)**

Sea $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ tales que $\exists\ B((x_0,y_0),\delta)$ en donde $\forall\,(x,y)\in B((x_0,y_0),\delta)$ existen las derivadas parciales de $f$, $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ y ambas son continuas en $(x,y)$

$\Rightarrow$ $f$ es diferenciable en $(x_0,y_0)$

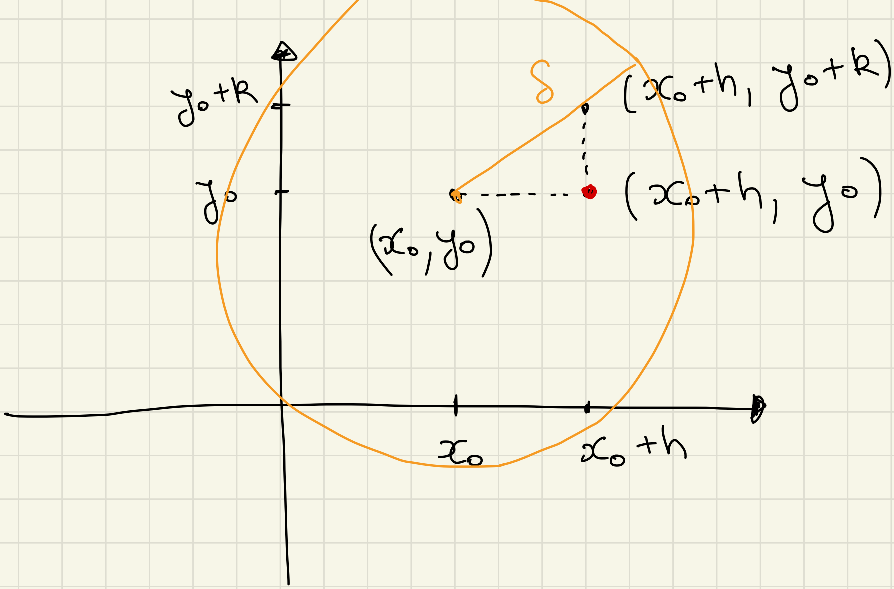



$\forall\,(x,y)\in B((x_0,y_0),\delta)$ $\exists$ $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ y son continuas en $(x,y)$

Dem: Por definición $f$ es diferenciable si

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0 \quad \text{siendo}$$

$$r(h,k) = f(x_0+h,\, y_0+k) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\,h - f_y(x_0,y_0)\cdot k$$




$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) =$$

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

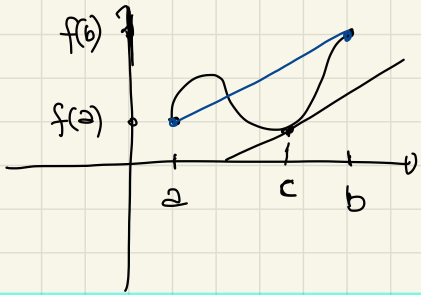
Sea $\varphi(x) = f(x, y_0)$

$$\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)$$

$$f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

# Teorema de valor medio (Lagrange).

Si $\varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua y derivable en $(a,b)$




$\exists\ c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

⊛

$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad \varphi(x) = f(x, y_0)$

$\left.\begin{array}{l} \varphi \text{ es continua en } [x_0, x_0+h] \\ \varphi \text{ es derivable en } (x_0, x_0+h) \\ \qquad \varphi'(x) = f_x(x, y_0) \end{array}\right\} \underset{TVM}{\Longrightarrow}$ $\exists\ c \in (x_0, x_0+h)$ tal que

$$\varphi'(c) = \frac{\varphi(x_0+h) - \varphi(x_0)}{h}$$

$$\varphi'(x) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{def de} \\ \text{derivada}}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x+\Delta x) - \varphi(x)}{\Delta x}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def } \varphi}}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

$(x, y_0)$
$\cap$
$B((x_0,y_0), \delta)$

$\underset{\text{existe } f_x(x,y_0)}{=} f_x(x, y_0)$

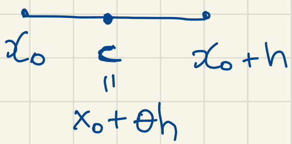
$$f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0) = \varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$$

$$\overset{\circledast}{=} \varphi'(x_0+\theta h)\cdot h \qquad \theta\in(0,1)$$

$c = x_0+\theta h$

$\theta\in(0,1)$

$$= f_x(x_0+\theta h, y_0)\,h$$




$$f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0+h,y_0) = \psi(y_0+k)-\psi(y_0)$$

$\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

es continuo en $[y_0, y_0+k]$

es derivable en $(y_0, y_0+k)$

$$\overset{\text{TVM para }\psi}{=} \psi'(y_0+\tilde\theta k)\,k \qquad \tilde\theta\in(0,1)$$

$$= f_y(x_0+h, y_0+\tilde\theta k)\,k$$

$\psi(y) = f(x_0+h, y)$

$\psi'(y) = f_y(x_0+h, y)$

$$r(h,k) = \underbrace{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)}_{\text{pink} + \text{green}} - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)\cdot k$$

$$= \overbrace{f_x(x_0+\theta h, y_0)h + f_y(x_0+h, y_0+\tilde\theta k)k} - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)\cdot k$$

$$\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{f_x(x_0+\theta h, y_0)h + f_y(x_0+h, y_0+\tilde{\theta}k)k - f_x(x_0,y_0)h - f_y(x_0,y_0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$\theta \in (0,1)$

$\tilde{\theta} \in (0,1)$

$$= \frac{h}{\sqrt{h^2+k^2}} \Big( \overbrace{f_x(x_0+\theta h, y_0) - f_x(x_0,y_0)}^{\substack{\to 0 \\ (h,k)\to(0,0)}} \Big)$$

$f_x$ es continua en $(x_0,y_0)$

$$+ \frac{k}{\sqrt{h^2+k^2}} \Big( \underbrace{f_y(x_0+h, y_0+\tilde{\theta}k) - f_y(x_0,y_0)}_{\substack{\downarrow\ (h,k)\to(0,0) \\ 0}} \Big)$$

Son acotados

$f_y$ es continua en $(x_0,y_0)$

$$h^2 \leq h^2+k^2 \Rightarrow \frac{h^2}{h^2+k^2} \leq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{h^2}{h^2+k^2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{|h|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

$\Rightarrow f$ es diferenciable en $(x_0,y_0)$