Tp du cours: Introducción al método de descomposición de dominios

Universidad de la Républica, Montevideo, Uruguay, Octubre 2023

25 de octubre de 2023

0.1. Ejercicio 1: Método de Schwarz sin solapamiento

Queremos resolver el problema siguiente:

$$\begin{cases} -u''(x) = f(x) \text{ si } x \in (0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 0. \end{cases}$$

usando el algoritmo: Para $k = 0, \cdots$ hasta la convergencia resolver

$$\begin{cases} -u_1^{k''}(x) = f(x) \text{ si } x \in (0,\gamma) \\ u_1^{k'} + \alpha u_1^k = u_2^{k-1'} + \alpha u_2^{k-1} \text{ si } x = \gamma \\ u_1^k(0) = 0 \end{cases}$$

y

$$\begin{cases} -u_2^{k''}(x) = f(x) \text{ si } x \in (\gamma,1) \\ u_2^{k'} - \alpha u_2^k = u_1^{k-1'} - \alpha u_1^{k-1} \text{ si } x = \gamma \\ u_2^k(1) = 0 \end{cases}$$

On note : $[0,1] = [1,\gamma] \cap [\gamma,1]$. El objeto del ejercicio es resolver este problema usando un método de Schwarz sin solapamiento.

1) Utilisando elementos finitos $\mathbb{P}_1$.

2) Utilisando elementos finitos de Hermite.

Realizar un programa informático en Octave o Matlab.
Testear para varios valores de α, en particular $\dfrac{1}{\gamma}$. Considerar un caso donde conocen la solución exacta, por ejemplo $u(x) = x * (1-x)$ para empezar.

Presentar un informe describiendo la formalización del método utilizado, su implementación numérica y informática, así que resultados numéricos con una estimación numérica del error.

0.2. Ejercicio 2: Método de Schwarz Waveform

Queremos resolver la ecuación de evolucion siguiente:

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{L}u = \partial_t u - \nu \partial_x^2 u + \alpha u = f \ \ x \in (a,b), t \in (0,T] \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, $\nu > 0$ y $a, b \in \mathbb{R}$.

Realisar un programa informático implementando el algoritmo siguiente: para $k = 1, \cdots$ hasta la convergencia,

$$\begin{cases} \partial_t u_1^k + \mathcal{L}u_1^k = f \ \ x \in (a_1 = a, b_1) \\ u_1^k(a_1) = 0 \\ u_1^k(b_1) = u_2^{k-1}(b_1) \\ u_1^k(0,x) = u_0(x) \ \ x \in (a_1, b_1) \end{cases} \tag{1}$$

y

$$\begin{cases} \partial_t u_2^k + \mathcal{L}u_2^k = f \ \ x \in (a_2, b_2 = b) \\ u_2^k(b_2) = 0 \\ u_2^k(a_2) = u_1^{k-1}(a_2) \\ u_2^k(0,x) = u_0(x) \ \ x \in (a_2, b_2) \end{cases} \tag{2}$$

con $a_2 < b_1$, es decir con un solapamiento de $l = b_1 - a_2$. Para la realización informática se consideraran una discretización en tiempo con un esquema de Crank-Nicolson y diferencias finitas en la variable de espacio. Efectuar los test numericos para varias soluciones exactas(ajustando f y T). Considerar dos casos:

1) Un paso de tiempo identico en cada subdominio.

2) Un paso de tiempo diferente en cada subdominio. Utilizar la interpolación lineal para calcular los valores a transmitir en la frontera artificial.

Presentar un informe describiendo la formalización del método utilizado, su implementación numérica y informática, así que resultados numéricos con una estimación numérica del error.