Clase 29:

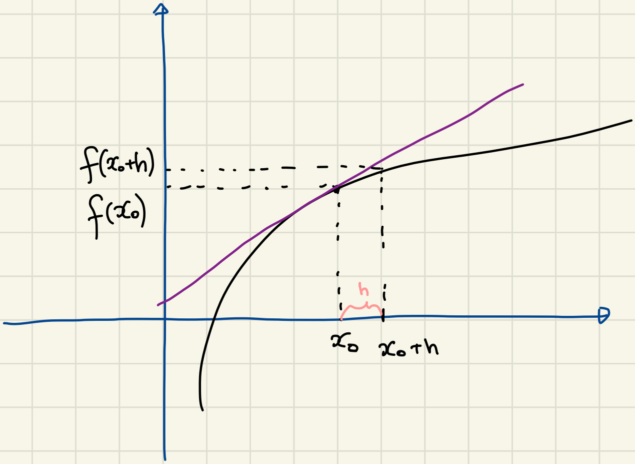
Condiciones necesarias diferenciabilidad

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$



$$y = f'(x_0)h + f(x_0)$$

$x = x_0 + h.$ $\qquad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h)$

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

f es derivable sii existe $A \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + r(h)$$

en donde $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\quad a \in \mathbb{R}^n$

- f es $\boxed{\text{diferenciable}}$ en a $\Longleftrightarrow$

  $\exists$ una transformación lineal $df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

  tal que

$h \in \mathbb{R}^n$ $\qquad f(a+h) = f(a) + df_a(h) + r(h)$

en donde $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$

- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $\boxed{\text{diferenciable}}$ en $a = (x_0, y_0)$

$\Longleftrightarrow$ $\exists$ $A, B \in \mathbb{R}$ tales que.

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \underbrace{Ah + Bk}_{df_a(h,k)} + r(h,k)$$

en donde $\displaystyle\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$

Teorema (Condiciones necesarias de diferenciabilidad)

Sea $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en (x_0, y_0).

$\Longrightarrow$ 1) f es continua en (x_0, y_0)

2) Existen las derivadas parciales y

son $A = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ y $B = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

3) Existen las derivadas direccionales y

si $v = (v_1, v_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, v_2$$

Dem:

1) f es diferenciable en (x_0, y_0)

$\Longrightarrow$

$\exists\, A, B \in \mathbb{R}$ tq

$$f(x_0+h, y_0+k) \overset{(*)}{=} f(x_0, y_0) + Ah + Bk + r(h,k)$$

con $\displaystyle\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$

Para probar que f es continua en (x_0,y_0) debemos probar que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Notación $(h,k)=(\Delta x, \Delta y)$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \overset{\substack{x = x_0+h \\ y = y_0+k}}{=} \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0+h, y_0+k)$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{(h,k)\to(0,0)} f(x_0,y_0) + \underbrace{Ah}_{\to 0} + \underbrace{Bk}_{\to 0} + \underbrace{r(h,k)}_{\to 0}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} r(h,k) = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \underbrace{\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\|(h,k)\|}_{\to 0}$$

$$= f(x_0,y_0) \implies f \text{ es continua en } (x_0,y_0)$$

2) Para ver que existen las derivadas parciales, hallamos el siguiente límite.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

$$\overset{(*)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{f(x_0, y_0)} + A.h + B.0 + r(h,0) - \cancel{f(x_0, y_0)}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{A\cancel{h}}{\cancel{h}} + \frac{r(h,0)}{h}$$

$$= A + \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{r(h,0)}{h}}_{=0} = A$$

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$ x ser f diferenciable

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{r(h,0)}{\|(h,0)\|} = 0$$ por un límite direccional

Ejercicio: Probar que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = B$

3) Sea $v = (v_1, v_2)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0,y_0) \overset{\times\,\text{def}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{f(x_0+hv_1, y_0+hv_2) - f(x_0,y_0)}^{\circledcirc}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\cancel{f(x_0,y_0)} + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\,h\,v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\,h\,v_2 + r(hv_1,hv_2)}^{\circledcirc} - \cancel{f(x_0,y_0)}}{h}$$

f es diferenciable en (x_0,y_0).

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2 + \frac{r(hv_1,hv_2)}{h}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)v_2 + \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{r(hv_1,hv_2)}{h}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(hv_1, hv_2)}{h}$$

La definición de diferenciabilidad de f en (x_0, y_0) nos garantiza que

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(hv_1, hv_2)}{\|(hv_1, hv_2)\|} = 0$$

ya que dicho límite es un límite direccional de

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|}$$

que vale 0 por definición.

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(hv_1, hv_2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{r(hv_1, hv_2)\cdot \|(hv_1, hv_2)\|}{h\cdot \|(hv_1, hv_2)\|}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{r(hv_1, hv_2)}{\|(hv_1, hv_2)\|} \frac{\cancel{h}\|(v_1, v_2)\|}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{r(hv_1, hv_2)}{\|(hv_1, hv_2)\|}}_{\to 0} \cdot \|(v_1, v_2)\| = 0$$

Ejemplo:

1) ¿ $f(x,y) = 2x+3y+4$ es diferenciable en $(0,0)$?

$f(x,y)$ es diferenciable en $(0,0)$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f(h,k) = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\, k + r(h,k)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

$$r(h,k) = \underbrace{f(h,k)}_{=1} - \underbrace{f(0,0)}_{} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h}_{=2} - \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}_{=3}$$

$$r(h,k) = 2h + 3k + 4 - 4 - 2h - 3k.$$

$$= 0$$

y efectivamente entonces.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$$

2) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

¿es f diferenciable en $(0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

f es diferenciable en $(0,0)$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{f(h,k) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k}{\|(h,k)\|}$$

$$= 0$$

$$\frac{r(h,k)}{\|(h,k)\|} = \frac{\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} - 0 - 0 - 0}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{hk}{h^2+k^2}.$$

y ya sabemos que

$$\nexists \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{h^2+k^2}$$

$\Rightarrow$ f **NO** es diferenciable en $(0,0)$.

3) Probar que

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es diferenciable en $(0,0)$.