Capítulo 7

Cálculo de integrales

7.1. Teorema fundamental

1. Sin calcular la integral, derivar las siguientes funciones:

$$a)\quad f(x)=\int_1^x \sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad b)\quad f(x)=\int_x^3 \sqrt{t^2-t+1}\,dt$$

$$c)\quad f(x)=\int_{\cos(x)}^3 \sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad d)\quad f(x)=\int_{x^2}^2 \frac{t^7}{1+t^4}\,dt \qquad e)\quad f(x)=\int_{e^x}^2 \frac{t^7}{1+t^4}\,dt$$

$$f)\quad f(x)=\int_{\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{t^7}{1+t^4}\,dt \qquad g)\quad f(x)=\int_{e^x}^{x^3} \frac{\sin(t)}{3+e^t}\,dt \qquad h)\quad f(x)=\int_{\sqrt{x^2+1}}^{3x} \frac{\sin(t)}{3+e^t}\,dt$$

2. Sabiendo que la integral $\int_0^1 \sqrt{t^2-t+1} = \frac{1}{8}(4+\log(27))$, derivar en $x=1$ las siguientes funciones

$$a)\quad f(x)=\int_0^{x^2} \sqrt{t^2-t+1}+x\,dt \qquad b)\quad f(x)=\int_0^{2x-1} \sqrt{t^2-t+1}+x^2\,dt$$

$$c)\quad f(x)=\int_x^0 x^2\sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad d)\quad f(x)=\int_{x^2}^0 x\sqrt{t^2-t+1}\,dt$$

$$e)\quad f(x)=\int_{\sin(\pi x)}^x e^x\sqrt{t^2-t+1}\,dt \qquad f)\quad f(x)=\int_{\log(x)}^{x^2} e^x\sqrt{t^2-t+1}\,dt$$

3. Sea $f : J \to \mathbb{R}$ una función continua. En cada caso determinar $f(1)$.

$$a)\quad \int_1^{e^x+x} f(t)\,dt=\sin(\pi x) \qquad b)\quad \int_0^{x^3-x^2+1} f(t)\,dt=\sin(\pi x)$$

$$c)\quad \int_{\log(1+3x)+1}^{1} f(t)\,dt = \sin(\pi x) \qquad d)\quad \int_{e^{x+\sin(x)}}^{1} f(t)\,dt = \sin(\pi x)$$

4. Determinar (si existen) una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y un número real $c\in\mathbb{R}$ tales que

$$a)\quad \int_0^x f(t)dt = c-e^{-x^2} \qquad b)\quad \int_x^1 f(t)\,dt = \cos^2(x)+c \qquad c)\quad \int_x^1 f(t)\,dt = \sqrt{x^4+1}+c$$

$$d)\quad \int_c^x f(t)\,dt = 2+x^2 \qquad e)\quad \int_c^x f(t)\,dt = (x-1)^4 \qquad f)\quad \int_c^x f(t)\,dt = \sin^2(x)+1$$

5. Determinar (si existe) una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$a)\quad \int_1^{\cos(x)} f(t)\,dt = 2\sin^2(x) \qquad b)\quad \int_0^{x^2} f(t)\,dt = \log(x^2+1)$$

$$c)\quad \int_0^{x^2} f(t)\,dt = x\sin(x^2) \qquad d)\quad \int_0^{x^2} f(t)\,dt = x^2\cos(x)$$

6. *a*) Demueste que los valores de las siguientes expresiones no dependen del valor de x

$$a)\quad \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt+\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad x\in(0,+\infty) \qquad b)\quad \int_{-\cos(x)}^{\sin(x)} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt\,,\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

b) Calcule $(f^{-1})'(0)$ para

$$a)\quad f(x)=\int_0^x 1+\sin(\sin(t))\,dt \qquad b)\quad f(x)=\int_1^x 1+\cos(\cos(t))\,dt$$

$$c)\quad f(x)=\int_0^{e^x\log(x)} \sqrt{t^2+e^t}\,dt \qquad d)\quad f(x)=\int_1^{\arctan(x)} \sqrt{t^2+e^t}\,dt$$

7. Sea F la función definida como

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_1^{x^2} e^{\frac{-t^2}{2}}\,dt$$

Entonces la derivada de la función inversa de F en 0 vale:

$$a)\quad \sqrt{e} \qquad b)\quad 2\sqrt{e} \qquad c)\quad \frac{1}{2\sqrt{e}} \qquad d)\quad \frac{3\sqrt{e}}{2} \qquad e)\quad \frac{2\sqrt{e}}{3}$$

8. Sea $F(x) = \int_0^x f$. En cada uno de los siguientes casos indicar para qué valores de x se verifica que $F'(x) = f(x)$.

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1 \\ 1 \text{ si } 1 < x \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$c) \quad f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q}, \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

9. Sea f una función continua, monótona estricta en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

   a) Examen, febrero 2017. Probar que

   $$\int_a^x f(t)\,dt + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,dt - xf(x) + af(a) = 0 \ \forall x \in [a,b]$$

   Interprete geométricamente el resultado.

   b) Calcular $\int_1^2 \log(t)\,dt$, utilizando el resultado de la parte anterior.

10. Sea $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $G(x) = \int_x^{x+1} e^{-t^2}\,dt$

    a) Probar que G es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular $G'(x)$.

    b) Graficar y estudiar extremos relativos y absolutos de G.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada positiva y tal que $f(1) = 0$. Definimos $g(x) = \int_0^x f(t)dt$

    Indicar cuáles de los siguientes enunciados son ciertos

    a) La función g es continua

    b) La función g es derivable

    c) La gráfica de g tiene tangente horizontal en 1

    d) La función g tiene un mínimo local en 1

    e) La función g tiene un máximo local en 1

    f) La función g tiene un punto de inflexión en 1

    g) La grafica de g' corta al eje x en el punto $x = 1$

12. A partir de las derivadas de las inversas trigonometricas, calcular:

$$a) \quad \int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$b) \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \ \ a,b \in [-1,1] \qquad c) \quad \int_a^b \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \ \ a,b \in [-1,1]$$

13. La primer figura corresponde al gráfico de una función f continua definida en $\mathbb{R}$ y la figura de abajo corresponde al gráfico de una primitiva F de f definida en $\mathbb{R}$.

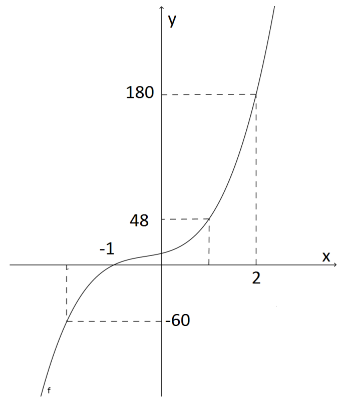


Figura 7.1: Gráfico de f

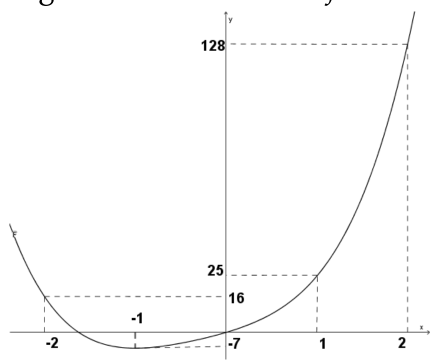


Figura 7.2: Gráfico de F

a) Calcule $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ y $\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$.

b) Calcule el área de la región limitada por el gráfico de la función f y el eje Ox en el intervalo $[-2,2]$.

c) Determine la ecuación de la recta tangente al gráfico de F en el punto $(1,25)$.

14. A partir de la fórmula de Barrow, calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int_0^2 x^4 - x^5 + 3\,dx \qquad b)\ \int_0^1 x^6 - 3x^3 + 2\,dx \qquad c)\ \int_1^2 x^5 - 4x^3 + x\,dx$$

$$d)\ \int_1^4 3\sqrt{x} + \sqrt[5]{x}\,dx \qquad e)\ \int_5^{10} \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 dx \qquad f)\ \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$$

$$g)\ \int_1^3 e^{2x}\,dx \qquad h)\ \int_0^1 \sin(\pi x)\,dx \qquad i)\ \int_1^2 \cos(2x)\,dx$$

15. Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ una función positiva y derivable, probar que

a) $\int_a^b 2f'(t)f(t)dt = f^2(b) - f^2(b)$, $\int_a^b nf'(t)f^{n-1}(t)dt = f^n(b) - f^n(a)$

b) $\int_a^b \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \log(f(b)) - \log(f(a))$

c) $\int_a^b \frac{f'(t)}{2\sqrt{f(t)}}dt = \sqrt{f(b)} - \sqrt{f(a)}$

d) $\int_a^b f'(t)e^{f(t)}\,dt = e^{f(b)} - e^{f(a)}$

e) Calcular las siguientes integrales

$$a) \int \sin^6(x)\cos(x)\,dx \qquad b) \int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)}\,dx \qquad c) \int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$$

$$d) \int \frac{x-2}{(x^2-4x+5)}\,dx \qquad e) \int \tan(x)\,dx \qquad f) \int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}\,dx$$

$$g) \int \sqrt{e^x}\,dx \qquad h) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad i) \int \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)}}\,dx$$

$$j) \int \cos(x)e^{\sin(x)}\,dx \qquad k) \int xe^{x^2}\,dx \qquad l) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$$

7.2. Métodos de integración

1. Calcular a patir de la fórmula de partes, las siguientes integrales:

$$a) \int x\sin(x)\,dx \qquad b) \int x\log(x)\,dx \qquad c) \int xe^x\,dx$$

$$d) \int \sin^2(x)dx \qquad e) \int \cos^2(x)dx \qquad f) \int \log(x)\,dx$$

$$g) \int \cos(2x)\operatorname{sen}(3x)\,dx \qquad h) \int x^2e^x\,dx \qquad i) \int \cos(x)e^{2x}\,dx \qquad j) \int \log^2(x)\,dx$$

2. Calcular las integrales a partir del método de sustitución

$$a) \int e^x\sin(e^x)\,dx \qquad b) \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx \qquad c) \int xe^{-x^2}\,dx$$

$$d) \int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}\,dx \qquad e) \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}}\,dx \qquad f) \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$g) \int x\sqrt{1-x^2}\,dx \qquad h) \int x\sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$i)\ \int \frac{1}{a^2x^2+b^2}\,dx \qquad j)\ \int \tan(x)\,dx \qquad k)\ \int \frac{1}{\cos(x)}\,dx \qquad l)\ \int \cos^7(x)\,dx$$

$$m)\ \int \frac{\log(\log(x))}{x\log(x)}\,dx \qquad n)\ \int \log(\cos(x))\tan(x)\,dx$$

3. Calcular, utilizando fracciones simples, las siguientes integrales de funciones racionales:

$$a)\ \int \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx \qquad b)\ \int \frac{x}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx$$

$$c)\ \int \frac{x^4}{(x+1)(x+2)(x+3)}\,dx \qquad d)\ \int \frac{6x^3}{x^3-6x^2+11x-6}\,dx$$

$$e)\ \int \frac{1}{x^2+x+2}\,dx \qquad f)\ \int \frac{4x-3}{3x^2+3x+2}\,dx \qquad g)\ \int \frac{4x-1}{x^2+4x+8}\,dx$$

$$h)\ \int \frac{dx}{(2x^2+1)(x-1)} \qquad i)\ \int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}\,dx$$

4. Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int x\sqrt{3x+10} \qquad b)\ \int \sqrt[3]{x}(2x+1)$$

$$c)\ \int x^3\sin(x^2+1)\,dx \qquad d)\ \int \sin(x)\cos(x)e^{\cos(x)}dx \qquad e)\ \int \log(x^2+1)dx$$

$$f)\ \int \sin\left(\sqrt{x-1}\right)dx \qquad g)\ \int e^{\sqrt{x}}\,dx$$

5. Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int x\arctan(x)\,dx \qquad b)\ \int \arctan\left(\frac{1}{x}\right)dx \qquad c)\ \int x\log\left(\sqrt{x^2+1}\right)dx$$

$$d)\ \int \frac{x}{\cos^2(x)}\,dx \qquad e)\ \int \frac{\arcsin(x)}{x^2}\,dx$$

$$f)\ \int \frac{\sqrt{x}}{x-4}dx \qquad g)\ \int \frac{2\,dt}{e^{-t}+1}\,dt \qquad h)\ \int \frac{2e^x+2e^{-x}}{e^{-x}+3e^x}\,dx$$

6. Las funciones trigonométricas hiperbólicas serán útiles en este ejercicio. Recordemos que estas funciones están definidas como $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\cosh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$, $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$

   Estas funciones verifican que $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$, $\cosh'(x) = \sinh(x)$, $\sinh'(x) = \cosh(x)$

   Calcular las siguientes integrales

a) $\int \sqrt{1+x^2}\,dx$ *b*) $\int \sqrt{x^2-1}\,dx$ *c*) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ *d*) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

7. *a*) Sea $I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n\,dx$.
   Demostrar que $(2n+1)I_n = 2nI_{n-1}$. Calcular I_2, I_3.
   Determinar una fórmula general en función de n.

   b) Sea $I_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $I_n(x) = \int_0^x t^n e^t\,dt$
   Probar que $I_n(x) = x^n e^x - nI_{n-1}(x)$ para todo $n \geq 1$

   c) Sea $I_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función definida por $I_n(x) = \int_1^x \log^n(t)\,dt$
   Probar que $I_n(x) = x\log(x)^n - nI_{n-1}(x)$ para todo $n \geq 1$

8. Probar que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

   a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1}(x)\,dx = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$ *b*) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}(x)\,dx = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$

9. Sea $f(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx$, $n \geq 1$.
   Demostrar que:

   a) $f(n+1) < f(n)$

   b) $f(n) + f(n+2) = \frac{1}{n-1}$ si $n > 2$

   c) $\frac{1}{n+1} < 2f(n) < \frac{1}{n-1}$ si $n > 2$

10. *a*) Sea $I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx$ $n \in \mathbb{N}$. Integrando por partes deducir la fórmula de recurrencia

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)}\left(\frac{x}{(x^2+1)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}(x)\right) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   b) Calcular

   a) $\int \frac{1}{(x^2+9)^2}\,dx$ *b*) $\int \frac{2x+3}{(x^2+9)^2}dx$ *c*) $\int \frac{1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx$

7.3. Áreas

1. Hallar el área encerrada entre los gráficos de las siguientes funciones

   a) $f(x) = e^{x-1} - 1$ y $g(x) = 1 - x^2$ en el intervalo $[0, 2]$

b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ y $g(x) = \frac{1}{x-1}$ en el intervalo $[2, 4]$

c) $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ en el intervalo $[0, \pi/2]$

2. Hallar el área encerrada entre las siguientes curvas

   a) la parábola $y = x^2$ y la recta $2x + 3$.

   b) la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ y la recta $x = 3$.

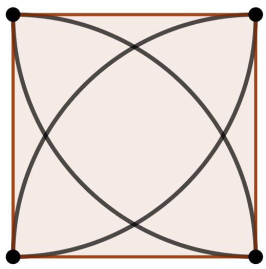
   c) la curva $y = e^x$, la curva $y = e^{-x}$ y la recta $x = 1$.

   d) las curvas $y = x^4 - x^2$, $y = 3 + x^2$

   e) las curvas $y = x^2 - 1$, $y = \frac{3}{x^2+1}$

3. Calcular el área del círculo de radio r. Calcular el área de la elípse de ejes de medida $2a$ y $2b$

4. En la siguiente figura se muestra un cuadrado y 4 cuartas circunferencias, con centro en cada uno de los vertices del cuadrado y radio de igual medida que el radio del cuadrado.



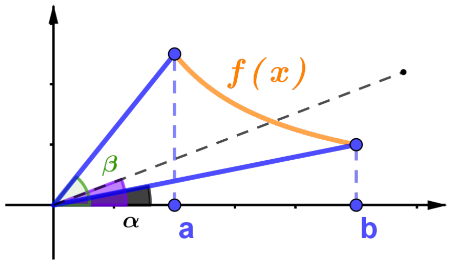
   Determinar el área de cada una de las regiones

5. Sea C un cuadrado de lado a y D la región de los puntos que están más próximos al centro del cuadrado que a sus lados. Calcular el área de D.

6. Calcular el área de las siguientes regiones del plano

$$a) \quad \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 3\}$$

$$b) \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 3x,\, x \leq 2y,\, x \leq \frac{1}{y}\right\} \qquad c) \quad \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1,\, \frac{(x-3)^2}{3^2} + y^2 \leq 1\right\}$$



7.3.1. Áreas en coordenadas polares

Consideremos un región como en la siguiente figura.

Esto quiere decir que la figura está delimitada por dos rayos desde el orígen (de pendientes α y β) y el gráfico de una función f.

Además, la función f cumple la propiedad de que cada rayo de ángulo entre α y β corta una única vez el gráfico de f.

En este caso su área se podría calcular integrando en 2 regiones, la primera es el área de la región entre las rectas, es decir, $\int_0^a \tan(\beta)t - \tan(\alpha)t dt$, y la segunda es el área entre el grafico de f y la recta de menor pendiente, es decir, $\int_a^b f(t) - \tan(\alpha)t\,dt$.

Como para cada ángulo θ el rayo $(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ corta solo una vez el gráfico de f, existe una funcion biyectiva $h : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ tal que $h(\theta) = x$ si y solo si $f(x) = \tan(\theta)x$.

De esta forma, de manera intuitiva el área en cuestión se podria calcular "barriendo" ángulos en vez de rectas verticales.

Probar que el área de la figura es $\int_\beta^\alpha h^2(\theta) + f^2(h(\theta))\,d\theta$.

Otra manera de interpretar este problema es cuando pensamos una función g como un valor del ángulo (es decir $g(\theta) = f \circ h(\theta)$)

1. Probar que el área encerrada en este caso es $\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\,d\theta$
2. Calcular el área encerrada por la ecuación $r = 2\lambda\sin^2(\theta)$ donde λ es una constante.

7.4. Longitud de curva

El objetivo de esta sección es definir longitudes de curvas de forma similar al cálculo de áreas a partir de particiones y sumas.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Dada una partición $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, se define $l(f, P)$ como la longitud de la poligonal que pasa por los puntos $(x_i, f(x_i))$, es decir,

$$l(f,P) = \sum_{i=0}^{n-1} d((x_i, f(x_i)), (x_{i+1}, f(x_{i+1}))) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (f(x_{i+1}) - f(x_i))^2}$$

1. Calcular $l(f,P)$ y $l(f,Q)$ para la función $f(x) = x^2 - x$ y las particiones $P = \{0,1,3\}$, $Q - \{0,1,2,3\}$.

2. Probar que si P es una partición del intervalo $[a,b]$ y f es una función lipschitziana con constante de Lipschitz λ, entonces $l(f,P) \leq (b-a)\sqrt{\lambda^2+1}$.

3. Probar que dadas P, Q dos particiones del intervalo $[a,b]$ tales que Q es más fina que P (es decir $P \subset Q$) se tiene que $l(f,P) \leq f(f,Q)$.

4. Probar que dada una partición P del intervalo $[a,b]$, si f es monótona entonces $l(f,P) \leq (a-b) + |f(a) - f(b)|$.

Se dice que una curva es rectificable en el intervalo $[a,b]$ cuando el conjunto $\{l(f,P) : P \text{ particion del intervalo } [a,b]\}$ esta acotado superiormente. En este caso llamos longitud de la curva de f en el intervalo [a,b] a dicho supremos.

$$l(f,[a,b]) = \sup\{l(f,P) : P \text{ partición del intervalo } [a,b]\}$$

5 Deducir de las partes anteriores que si una función es monótona o Lipschitz entonces su gráfico es rectificable. Deducir que si una función es derivable con derivada acotada entonces su gráfico es rectificable.

6 Sea f una función rectificable en el intervalo $[a,b]$ y $c \in (a,b)$. Probar que

$$l(f,[a,c]) + l(f,[c,b]) = l(f,[a,b])$$

7 Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, con derivada continua y monótona, y $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$. Definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$

   a) Probar que

   $$(x_{i+1} - x_i)\text{ínf}(f',[x_i,x_{i+1}]) \leq |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq (x_{i+1} - x_i)\sup(f',[x_i,x_{i+1}]).$$

   b) Probar que $S_*(h,P) \leq l(f,P) \leq S^*(h,P)$.

   c) Probar que para toda partición Q del intervalo [a,b] se tiene que $l(f,P) \leq S^*(h,Q)$.

   d) Concluir que

   $$l(f,[a,b]) = \int_a^b h(t)dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2}$$

   A partir de esta fórmula podemos calcular longitudes, por ejemplo arcos de circunferencia.

8 Calcular la longitud de arco para las siguientes funciones

$$a)\quad f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{1}{4x}\text{ en }[1,3] \qquad b)\quad f(x)=\frac{x^4}{4}+\frac{1}{8x^2}\text{ en }[1,2]$$

9 Calcule la longitud del hipercicloide de 4 puntas $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$

10 **Definición de funciones trigonometricas**

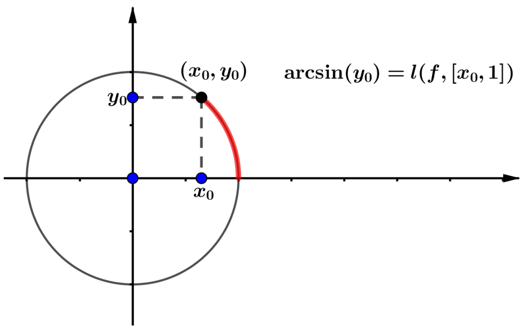
En este ejercicio no se debe usar ninguna propiedad de las funciones trigonometricas antes de probarla, de hecho, esta es una manera de definir dichas funciones.

Definimos las funciones $\arcsin, \arccos : [-1,1]\to\mathbb{R}$ a partir de longitudes de arco del círculo.

Notemos $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ a la función definida por $f(t)=\sqrt{1-t^2}$

Para la función arcsin se toma como el largo del arco de circunferencia entre el punto $(1,0)$ y el punto (x_0,y_0), más precisamente

$$\arcsin(y)=\begin{cases} l(f,[x,1]) & \text{si } y\geq 0 \quad \text{donde } x=\sqrt{1-y^2}\\ -l(f,[x,1]) & \text{si } y<0 \quad \text{donde } x=\sqrt{1-y^2}\end{cases}$$



Para la función arc cos, se toma la longitud hasta el punto $(1,0)$; más precisamente

$$\arccos(x)=l(f,[x,1])$$

Definimos además las funciones sin, cos como las funciones inversas de arcsin y arc cos respectivamente.

a) Verificar que la función arcsin y sin son impares.

b) Probar que $h(t)=\arccos(-t)+\arcsin(t)$ es una función constante para $t\in[0,1]$.

c) Calcular $\arccos'(x)$ y $\arcsin'(x)$.

d) Calcular $\sin'(0)$, $\cos'(0)$.

e) Probar que $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ para $\alpha\in[0,\arcsin(1)]$.

7.5. Aplicaciones

1. Un cohete acelera al quemar su combustible de a bordo, de manera que su masa disminuye con el tiempo. Suponga que la masa inicial es m , el combustible se consume con una rapidez r y los gases de escape son expulsados con una velocidad constante v_c (respecto al cohete). Un modelo para la velocidad del cohete en el tiempo t esta dada por la ecuación
$$v(t) = -gt - v_c \log\left(\frac{m - rt}{m}\right)$$
donde g es la aceleración debida a la gravedad y t no es demasiado grande.

   Si $g = 9{,}8 m/s^2$, $m = 30{,}000 kg$, $r = 160 kg/s$, y $v_c = 3000 m/s$, encuentre la altura de cohete un minuto después del despegue.

2. Los astrónomos usan una técnica llamada estereografía estelar para determinar la densidad de estrellas de un cúmulo de estrellas, a partir de la densidad observada en dos dimensiones, que se puede analizar de una fotografía. Suponga que en un cúmulo esférico de radio R la densidad de estrellas depende solo de la distancia r al centro del cúmulo. Si la densidad percibida de las estrellas está dada por $y(s)$, donde s donde s es la distancia plana observada desde el centro del cúmulo, y $x(r)$ es la densidad real, se puede demostrar que
$$y(s) = \int_s^R \frac{2r}{\sqrt{r^2 - s^2}} x(r) dx$$
Si la densidad real de las estrellas del cúmulo es $x(r) = \frac{1}{2}(R - r)^2$, encuentre la densidad percibida $y(s)$.

3. El promedio de rapidez de moleculas de una gas perfecto es
$$\overline{v} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{M}{2RT}\right)^{3/2} \lim_{x \to +\infty} \int_0^x v^3 e^{-Mv^2/(2RT)} dv$$
donde M es el peso molecular del gas, R es la constante del gas, T es la temperatura del gas y v es la velocidad molecular

   Demuestre que
$$\overline{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

4. El centro de gravedad de una superficie plana se define, conceptualmente, de la siguiente manera:

   Un trozo de cartón rígido, plano y horizontal, permanecerá en equilibrio si se sostiene en un punto determinado. Este punto de apoyo es el centro de gravedad de la superficie plana del carton.

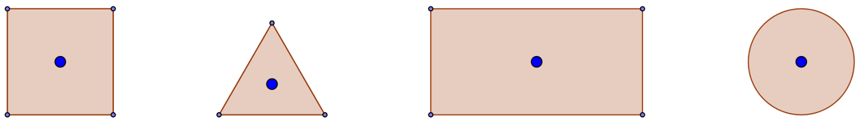
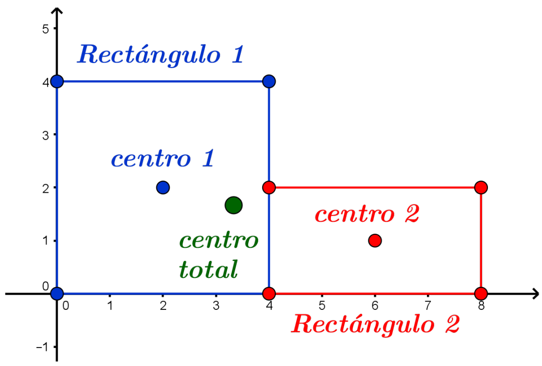


Figura 7.3: Centro de masa de algunas figuras simétricas

Claramente para una figura simétrica (cuadrado, rectangulo, circunferencia y un triangulo equilatero) el centro de gravedad coincide con el centro geométrico de la figura.

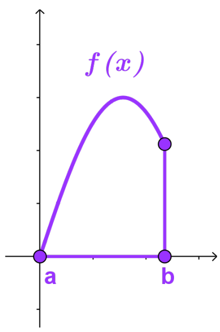
Si se pegan 2 rectangulos como en el de la figura entonces el centro de gravedad es centro total.



Para una superficie como la de la figura el centro de gravedad es (M_x, M_y), donde

$$M_y = \frac{\int_a^b f(x)^2\,dx}{M} \qquad \text{y} \qquad M_x = \frac{\int_a^b f(x)x\,dx}{M} \qquad \text{con} \qquad M = \int_a^b f(x)\,dx$$

Bosquejar un argumento sobre esta fórmula apartir del caso de los rectángulos.



a) Hallar el centro de gravedad de la superficie comprendida bajo una arcada de la sinusoide ($f(x) = \sin(x)$)

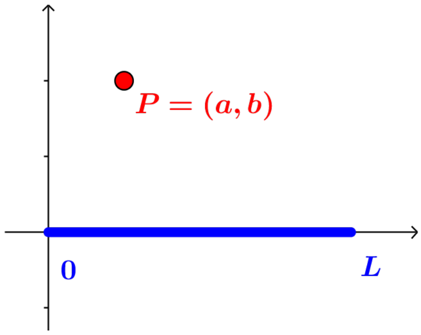
b) Calcular el centro de gravedad de la figura comprendida entre la parábola x^2-1 y el eje Ox.

c) Calcular el centro de gravedad de un semicírculo. Calcular el centro de gravedad de una semi elipse

5. Una varilla con carga de longitud L produce un campo eléctrico en el punto $P=(a,b)$ dado por

$$E(P)=\int_{-a}^{L-a}\frac{\lambda b}{4\pi\epsilon_0(x^2+b^2)^{3/2}}\,dx$$

donde λ es la densidad de carga por longitud unitaria en la varilla y ϵ_0 es la permisividad del espacio libre. Calcule $E(P)$.



7.6. Complementarios

1. Realice una lista de las integrales que sabe calcular. Compare con sus compañeros.

2. Calcular las siguientes integrales

$$a)\quad \int\frac{\log(x^2)}{x}\,dx \qquad b)\quad \int\frac{\log(x)}{x^2}\,dx$$

3. Calcular las siguientes integrales

$$a)\quad \int\frac{1}{1+e^x}dx \qquad b)\quad \int\frac{1}{1+\sin(x)}\,dx \qquad c)\quad \int\sqrt{e^x+1}dx$$

4. a) Probar que $\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx \quad \forall m,n\in\mathbb{N}$. Calcular $\int_0^1 x^2(1-x)^{30}\,dx$.

   b) Sea f una función continua. Probar que $\int_0^\pi xf(\sin(x))\,dx=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin(x))\,dx$, y calcular $\int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$

   c) Demostrar que $\int_0^1(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}(x)\,dx, \quad n\in\mathbb{N}$

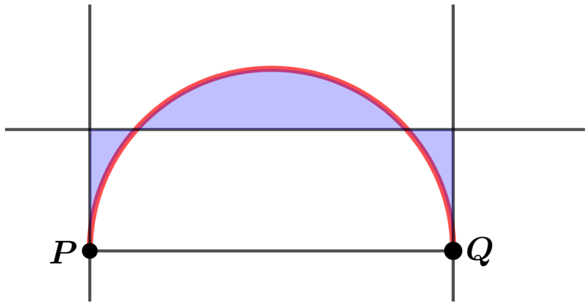
5. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \quad \int \frac{\sec^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}\,dx \qquad b) \quad \int \operatorname{tg}^3(2x+1)\sec^2(2x+1)\,dx$$

   Recordar que $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

6. Calcular la longitud de arco de la parabola $y = -x^2 + 4$ para $x \in [-2, 2]$

7. Se considera un semicírculo de radio 1. Su diametro está marcado por los puntos P y Q. Se traza una recta paralela a PQ y se pintan las regiones mostradas en la figura



   Determinar la altura a la que debe estar la recta para que el área pintada sea mínima.

8. **Función** Γ

   Sea $t > 0$, definimos $g_t(s) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como $g_t(s) = \displaystyle\int_1^s e^x x^{t-1}\,dx$

   Probar que existen y son finitos los límites $\lim\limits_{s\to 0} g_t(s)$, $\lim\limits_{s\to+\infty} g_t(s)$

   Definimos la función $\Gamma : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ como

$$\Gamma(t) = \lim_{s\to+\infty} g_t(s) - g_t\left(\frac{1}{s}\right) = \lim_{s\to+\infty} \int_{\frac{1}{s}}^{s} e^x x^{t-1}\,dx$$

   Calcular $\Gamma(1), \Gamma(2)$.

   Probar que $\Gamma(n+1) = (n+1)\Gamma(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Concluir que $\Gamma(n) = n!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.