Clase 28

teo. Sea f cont. en $[a,b]$ y supongamos existen f' y f'' en (a,b).
Sea $c \in (a;b)$ un pto. crítico de f.

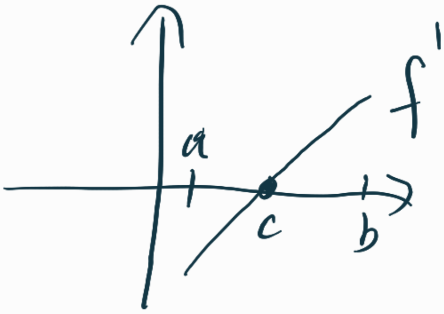
a) $f'' < 0$ en $(a,b) \Rightarrow c$ es máximo relativo

b) $f'' > 0$ en $(a,b) \Rightarrow c$ es mínimo relativo

Dem. a) Sabemos que $f'(c) = 0$.

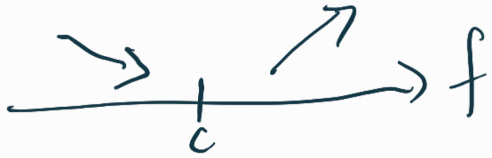
Como $f''(x) = (f')'(x) > 0, \ \forall x \in (a,b)$

$\Rightarrow f'$ es creciente en $[a,b]$



y $f'(c) = 0 \Rightarrow f' < 0$ en $[a,c)$ y

$f' > 0$ en $(c,b] \Rightarrow$



$\Rightarrow f$ tiene un mínimo relativo en c. ∎

pto. crítico

Obs. Si f'' continua en c entonces

- $f''(c)<0 \Rightarrow f''<0$ en un entorno de c $\Rightarrow$ c es máximo relativo

conservación del signo

- $f''(c)>0 \Rightarrow f''>0$ en un entorno de c $\Rightarrow$ c es un mínimo relativo.

los reales sin el cero.

Ejemplo. Sea $f: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R} \,/\, f(x) = x + 1/x$.
Hallar los extremos relativos y absolutos de f.

Solución: Como $\mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, entonces los extremos relativos son puntos críticos.

Ptos. críticos de f: $f'(x) = 1 - 1/x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow 1 = 1/x^2 \underset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} x^2 = 1 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$f''(x) = 2/x^3$

· $f''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow -1$ es máximo relativo.

$$\cap$$

· $f''(1) = 2 > 0 \Rightarrow 1$ es mínimo relativo

$$\cup$$

<u>Obs</u>. también sale estudiando el signo de la derivada:

$$f'(x) = 1 - 1/x^2 = \frac{x^2-1}{x^2}$$

$\operatorname{sgn}(x^2-1)$	+	0	−		−	0	+
		-1				1	
$\operatorname{sgn}(x^2)$	+		+	0	+		+
				0			
$\operatorname{sgn}(f')$	+	0	−	∄	−	0	+
		-1		0		1	
crecimiento de f	↗		↘	∄	↘		↗
		-1		0		1	

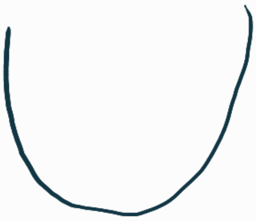
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x + \overbrace{1/x}^{\to 0} = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x + \underbrace{1/x}_{\substack{\downarrow\\ 0}} = +\infty$$

Por lo tanto f no tiene extremos absolutos, solo relativos.

Funciones cóncavas y convexas

Idea informal:

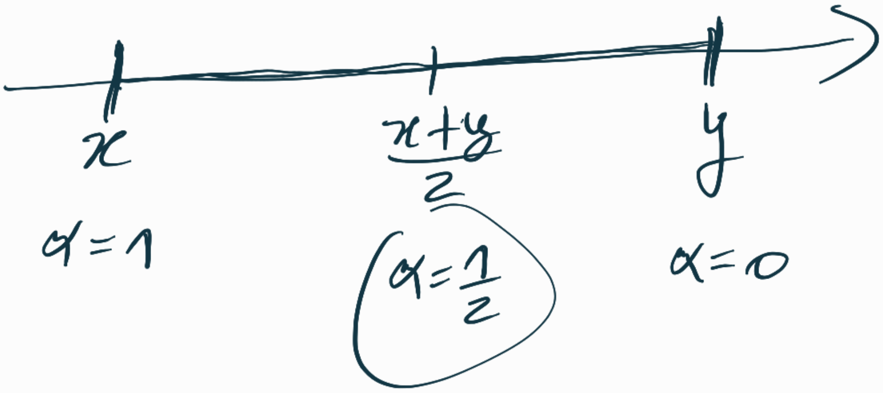


Convexa
"feliz"
Ej: $f(x) = x^2$

Cóncava
"triste"
Ej: $f(x) = -x^2$

Ejerc.: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. todo punto $z \in [x,y]$ se puede escribir como: $z = \alpha x + (1-\alpha) y$ con $0 \leq \alpha \leq 1$. De hecho,

$$[x,y] = \{ \alpha x + (1-\alpha) y : 0 \leq \alpha \leq 1 \}$$

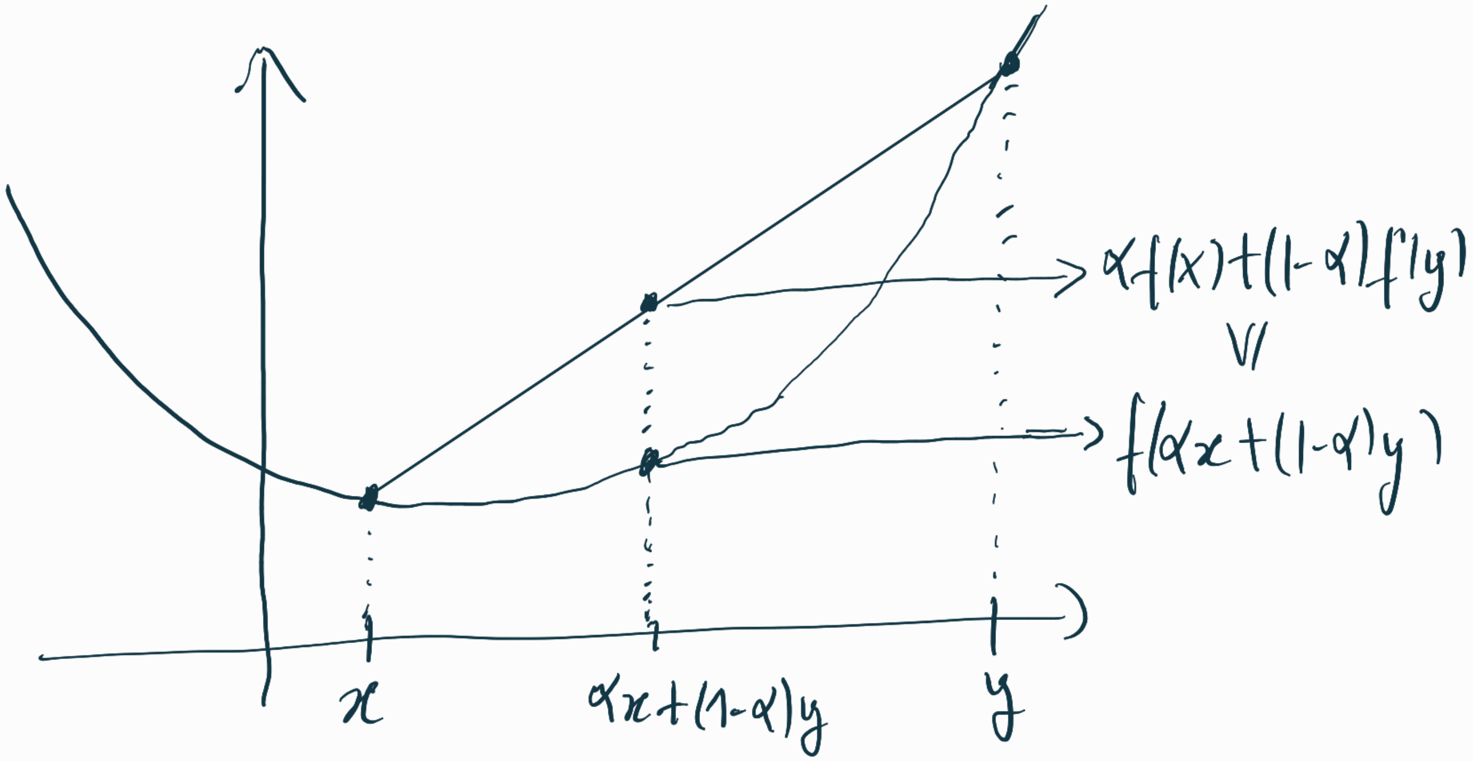


Def. Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Decimos que la f es <u>convexa</u> en I si $\forall x, y \in I$:

$$\underbrace{f(\alpha x+(1-\alpha)y)}_{\text{gráfico}} \leq \underbrace{\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)}_{\text{cuerda}}$$

$$\forall \alpha : 0 \leq \alpha \leq 1$$

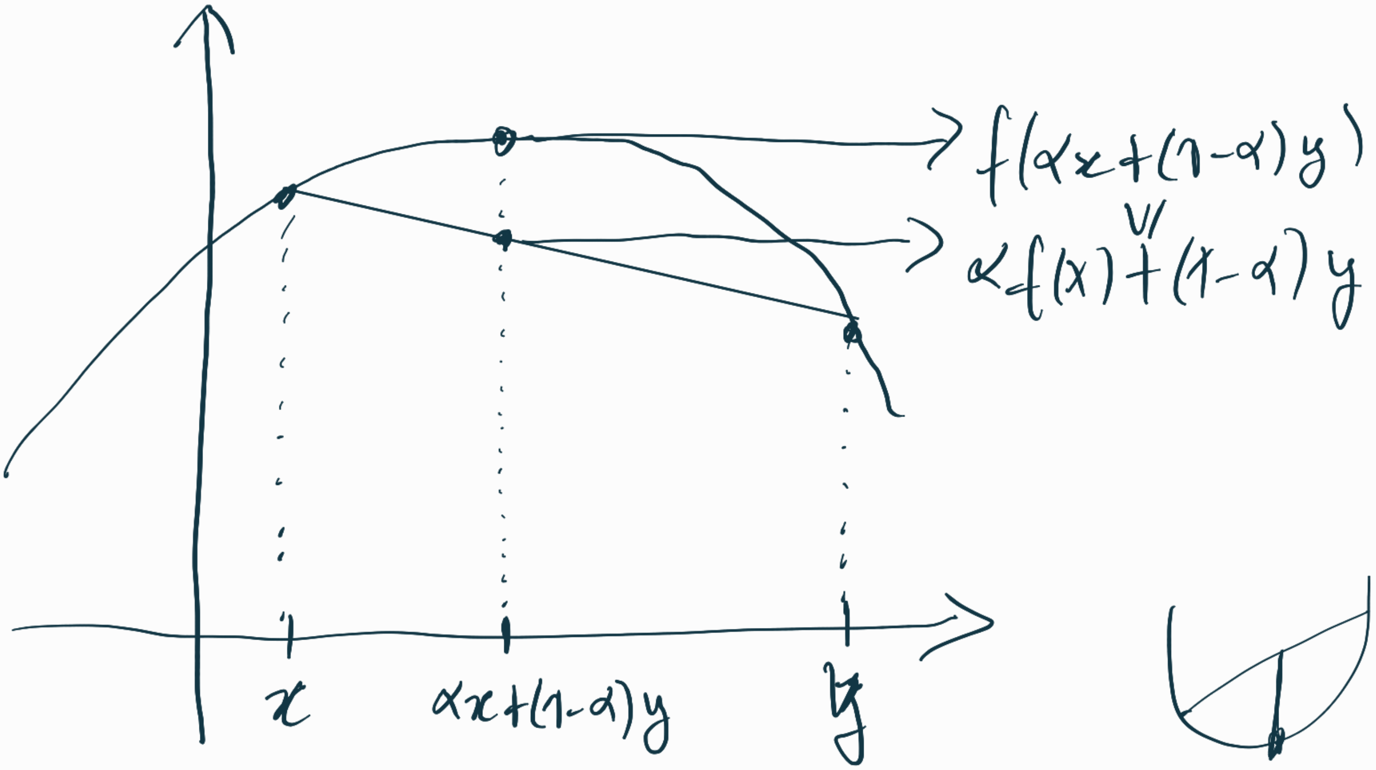
<u>Interpretación</u>:



Def. Sea $f : I \to \mathbb{R}$. Decimos que la f es <u>cóncava</u> en I si $\forall x, y \in I$:

$$\overbrace{f(\alpha x+(1-\alpha)y)}^{\text{gráfico}} \geq \overbrace{\alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)}^{\text{cuerda}}$$

$$\forall \alpha : 0 \leq \alpha \leq 1.$$



Caso especial (tomando $\alpha = 1/2$)

- Si f es convexa $\Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

- Si f es cóncava $\Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$

Teo. Sea f con derivada segunda en (a,b).

Si $f''>0$ en $(a,b) \Rightarrow f$ es convexa en (a,b)

Si $f''<0$ en $(a,b) \Rightarrow f$ es cóncava en (a,b)

Ejemplo: Probar que $\forall x, y > 0$:

$$\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\text{media aritmética}} \leq \underbrace{\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}}_{\text{media cuadrática}}$$

Solución: Considero $f(x) = x^2$.

$$f'(x) = 2x \; , \; f''(x) = 2 > 0$$

$\Rightarrow f$ es convexa

$$\Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

Ejemplo: Probar que $\forall x, y > 0$:

$$\underbrace{\sqrt{xy}}_{\text{media geométrica}} \leq \underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\text{media aritmética}}$$

Solución: $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$

$$\iff \log\left((xy)^{1/2}\right) \leq \log\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

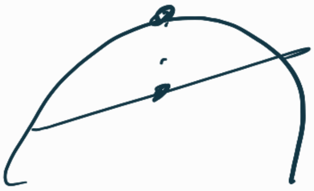
log es creciente $\left(\log'(x) = \frac{1}{x} > 0 \text{ en } \mathbb{R}^+\right)$

$$\frac{\log x + \log y}{2} \leq \log\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Consideramos $f(x) = \log(x)$ en $\mathbb{R}^+$.

$$f'(x) = 1/x \quad , \quad f''(x) = -1/x^2 < 0$$

$\Rightarrow f$ es cóncava



$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

$$\iff \log\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{\log(x)+\log(y)}{2} \text{ . } ✓$$

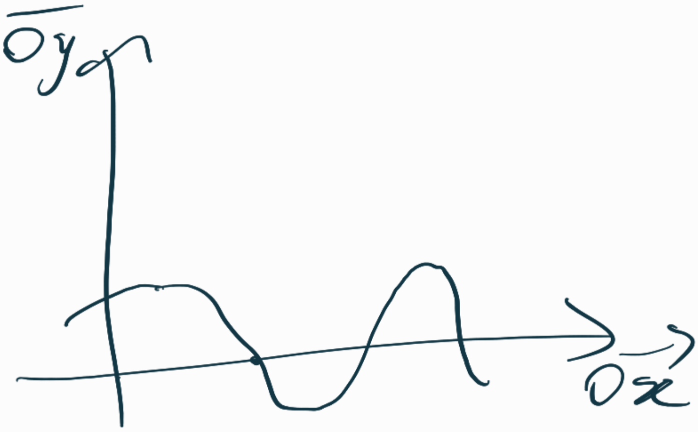
$$\boxed{\begin{array}{l} \log(x^\alpha) = \alpha \log(x) \\ \log(xy) = \log(x)+\log(y) \end{array}}$$

$$\log\left((xy)^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\log(xy) = \frac{1}{2}\left(\log(x)+\log(y)\right)$$

Graficando funciones

. Los resultados anteriores nos permiten graficar funciones con ayuda de las derivadas primera y segunda.

1) Identificar el recorrido y los cortes del gráfico con los ejes Ox y Oy



Corte con Ox : $(x,0)$ con $f(x)=0$

Corte con Oy : $(0,f(0))$ si $0\in$ dominio(f)

2) Determinar asíntotas

Asíntotas verticales $x=c$ $\longrightarrow$ $\lim_{x\to c^+} f(x)=\pm\infty$

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\pm\infty$$

Asíntotas oblicuas $y = mx + n \longrightarrow |f(x) - (mx+n)| \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$

3) Con f' y f'', determinar ptos críticos, máximos y mínimos relativos, concava y convexa.

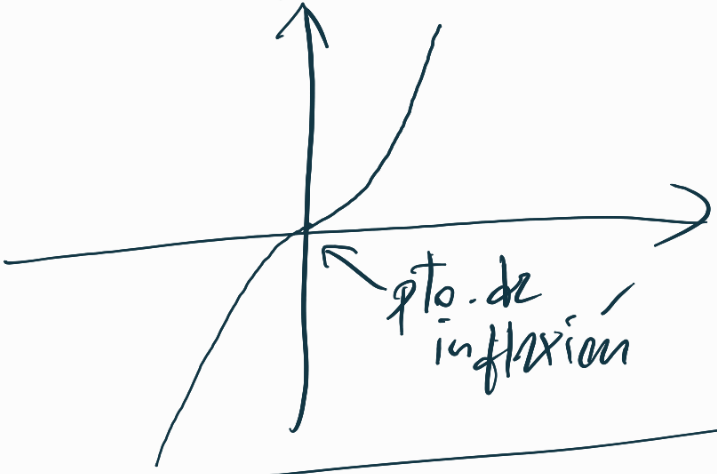
Determinar los ptos de inflexión

Pto. de inflexión: Un pto c / $f''(c) = 0$ y f'' cambia de signo en c

Ej: $f(x) = x^3$, $f''(x) = 6x$

$\mathrm{sgn}(f'')$ $\xrightarrow[0]{-\qquad | \qquad +}$

$\Rightarrow 0$ es pto de inflexión



Ejemplo: Graficar $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} / f(x) = x + 1/x$

Corta con Ox : $x + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{x} \Rightarrow x^2 = -1 \lightning$

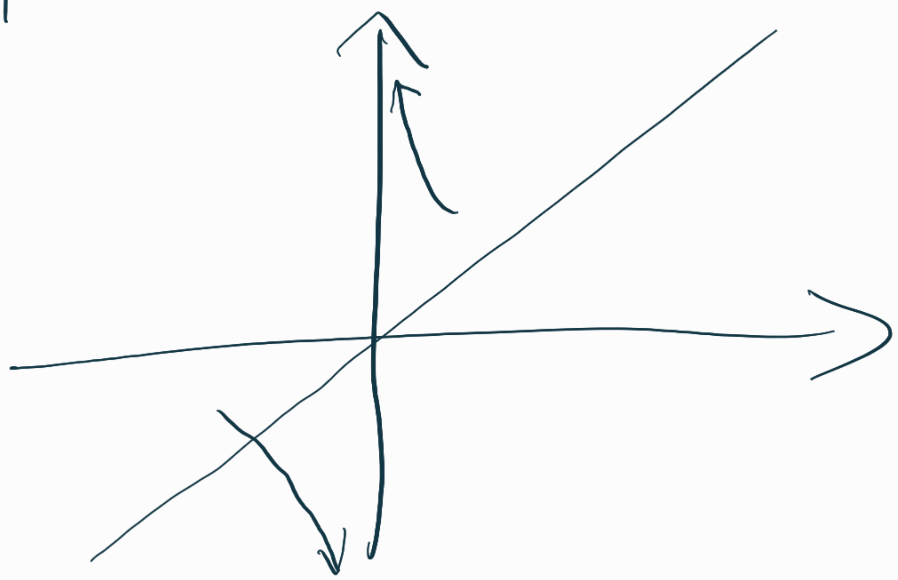
$\Rightarrow$ No corta al eje $\overline{Ox}$

$\lim\limits_{x \to 0^-} x + 1/x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0^+} \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\underline{x}} + \underset{\substack{\downarrow \\ +\infty}}{\underline{1/x}} = +\infty$

$\therefore$ La recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

$|f(x) - x| = |1/x| \to 0$ cuando $x \to \pm\infty$

$\boxed{\begin{matrix} mx+n \\ m=1 \\ n=0 \end{matrix}}$ $\therefore$ La recta $y = x$ es una asíntota.



$f'(x) = 1 - 1/x^2 = 0 \Leftrightarrow 1 = 1/x^2 \Leftrightarrow x^2 = 1$

$\Leftrightarrow x = \pm 1$ dos ptos críticos

$f''(x) = 2/x^3$

$f''(-1) = -2 < 0 \Rightarrow -1$ máximo rel.

$f(-1) = -2$.

$\boxed{\text{f tiene en } x=-1 \text{ un máximo relativo y vale } -2}$

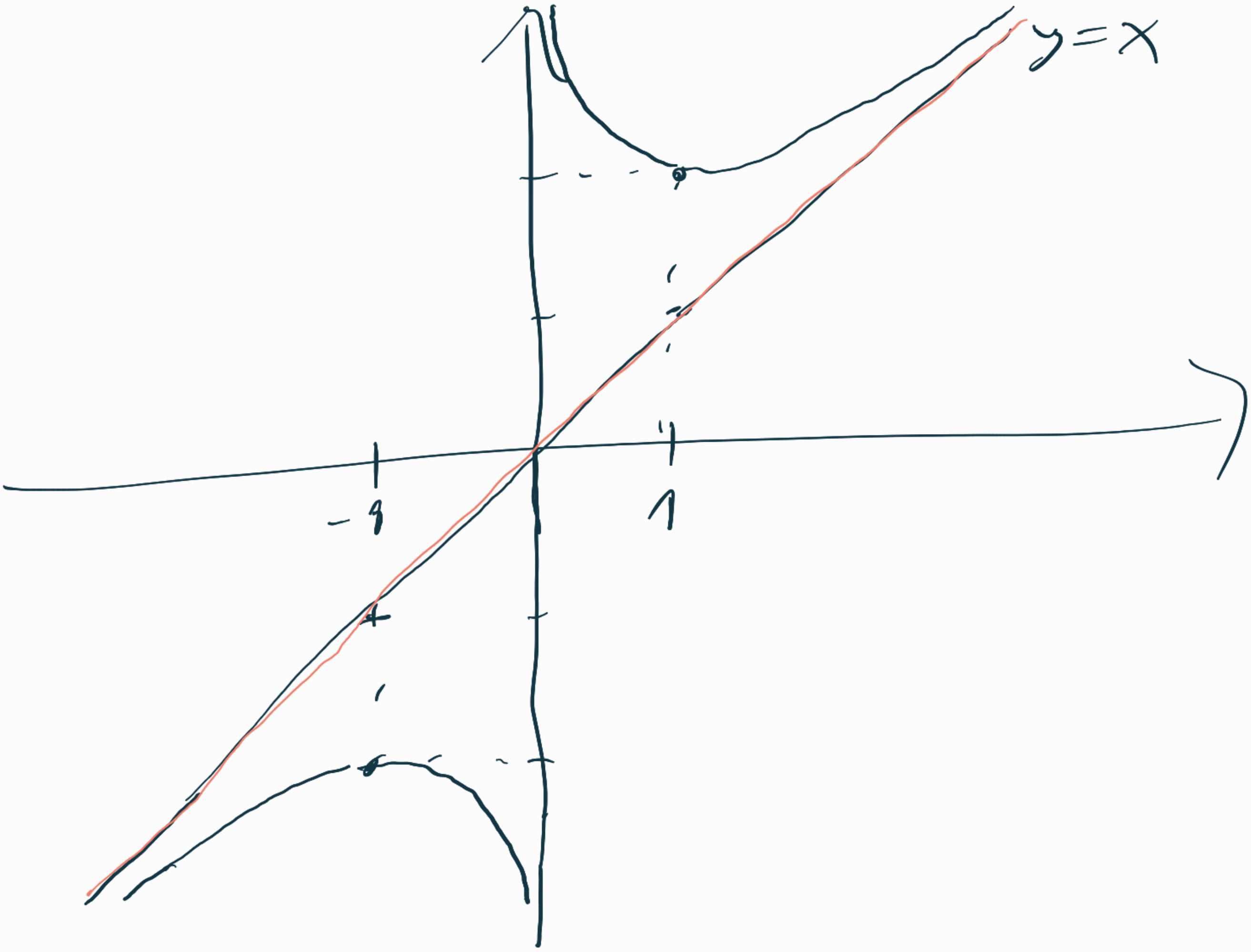
$f''(1) = 2 > 0$

$\boxed{\text{f tiene en } x=1 \text{ un mínimo rel. y vale } 2}$

$$f''(x) = 2/x^3 = \begin{cases} < 0 \text{ si } x < 0 & (\text{cóncava}) \\ > 0 \text{ si } x > 0 & (\text{convexa}) \end{cases}$$

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right) = -f(x)$$

$\therefore$ f es impar (simétrica respecto del origen)


y=x
-1
1