1. Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

$$c)\ \lim_{x\to 0}\frac{1-e^{4x}}{\sin(x)} \qquad d)\ \lim_{x\to 1}\frac{\log(x)}{\cos(\pi x)+1} \qquad e)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-\cos(x)}{\sin(\pi x)}$$

$$f)\ \lim_{x\to 1}\frac{\pi\log(x)+\sin(\pi x)}{x^3-3x+2} \qquad g)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2+\sin^2(x)} \qquad h)\ \lim_{x\to 0}\frac{x-\log(1+x)}{x^2+\cos(\pi x)-1}$$

$$i)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1} \qquad j)\ \lim_{x\to 1}\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\log(x)}$$

2. Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia calcularlos.

$$a)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x} \qquad b)\ \lim_{x\to-\infty}x^2e^x \qquad c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{(\log(x))^2}{\sqrt{x}}$$

$$d)\ \lim_{x\to+\infty}e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}} \qquad e)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}-x$$

L'hopital

$$f, g : (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

$$\lim \frac{f(x) \to 0}{g(x) \to}$$

Entonces si $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ se tiene

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{4x} \to 0}{\sin(x) \to 0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-4e^{4x}}{\cos(x)} = \frac{-4}{1} = -4 \underset{\text{Por L'hopital}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{4x}}{\sin(x)} = -4$$

$-4e^{4x} \to -4$, $\cos(x) \to 1$

d) $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{\cos(\pi x)+1}$

$\log(1) = 0$

$\cos(\pi) + 1 = 0$

Derivemos $\cos(\pi x) + 1$:

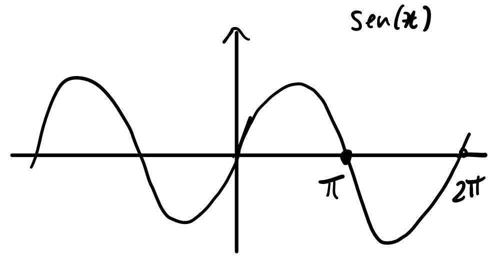
$(\cos(\pi x)+1)' = (\cos(\pi x))' =$

$= -\operatorname{sen}(\pi x)\pi$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1/x}{-\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x)} \quad ?$$

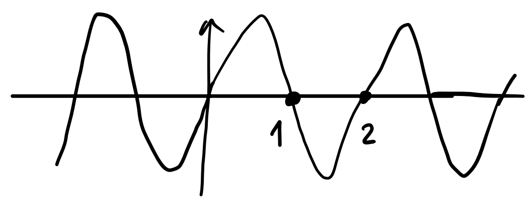
$1/x \to 1$

$-\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi) = -\pi \cdot 0 = 0$



$\operatorname{sg}\left(-\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x)\right)$ — — — 0 + + +

1



$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1/x}{-\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x)} = +\infty \underset{\text{L'hopital}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1^+} \frac{\log(x)}{\cos(\pi x)+1} = +\infty$$

$1/x \to 1$, $-\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x) \to 0^+$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1/x}{-\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x)} = -\infty \overset{\text{L'hopital}}{\Longrightarrow} \lim_{x\to 1^-} \frac{\log(x)}{\cos(\pi x)+1} = -\infty$$

$1/x \to 1$; $-\pi \cdot \operatorname{sen}(\pi x) \to 0^-$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2 + \sin^2(x)}$$

$\to e^0 - 1 - 0 = 0$

$\to 0^2 + \operatorname{sen}^2(0) = 0$

$$\left(\sin(x)\right)^2 = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$\uparrow$ Regla de la Cadena

$$\left(\sin(x)\cos(x)\right)' \overset{\text{Leibnitz}}{=}$$

$$(\sin(x))'\cos(x) + \sin(x)(\cos(x))' =$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x + 2\sin(x)\cos(x)}$$

$e^x - 1 \to 0$

$\to 2.0 + 2 \cdot \underbrace{\sin(0)}_{0} \cos(0) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2 + 2[\cos^2(x) - \sin^2(x)]} = \frac{1}{4}$$

$e^x \to 1$

$\downarrow$

$2 + 2[\cos^2(0) - \sin^2(0)] = 4$

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2 + 2[\cos^2(x) - \sin^2(x)]} = \frac{1}{4}} \overset{\text{L'hopital}}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x + 2\sin(x)\cos(x)} = \frac{1}{4}}$$

$e^x \to 1$; $e^x - 1 \to 0$; $2x + 2\sin(x)\cos(x) \to 0$

$2 + 2[\cos^2(0) - \sin^2(0)] = 4$

$2.0 + 2\cdot \sin($

L'hopital

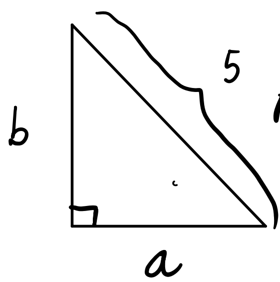
$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2 + \sin^2(x)} = \frac{1}{4}}$$

1. *a*) ¿Cuál es la mayor área posible de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm de largo?

   b) Hallar el rectángulo de menor perímetro cuya área es 4. Hallar el rectángulo de mayor área cuyo perímetro es 8.

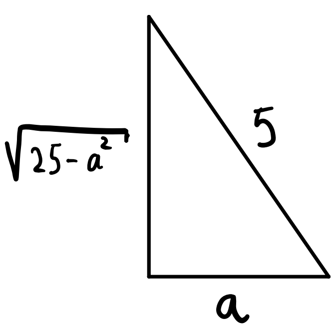
   c) Hallar el retangulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

$\boxed{1a}$



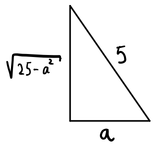
$$\text{Área}(\triangle) = \frac{ab}{2}$$

$$a^2 + b^2 = 5^2 = 25 \Longrightarrow b^2 = 25 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{25 - a^2}$$

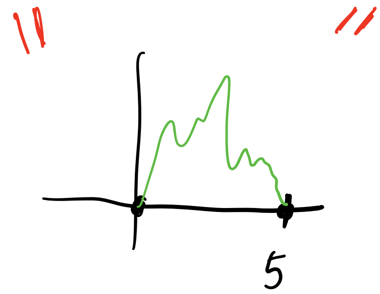


$$a \in [0, 5]$$

$$\acute{A}rea : [0,5] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\acute{A}rea\left(\right. $$

$$\left. \right) = \frac{a\sqrt{25-a^2}}{2}$$



Queremos hallar el máximo de la función

$$\acute{A}rea : [0,5] \to \mathbb{R}.$$

Dicho máximo existe porque es una función continua definida en un intervalo cerrado (Weierstrass).

Si consideramos $B(a) = \left[\acute{A}rea(a)\right]^2$

el máximo de $B(a)$ se realiza en el mismo punto a del dominio, que el máximo de $\acute{A}rea(a)$.

Reducimos entonces nuestro problema a hallar donde se realiza el máximo $B(a)$

$$B(a) = \left(\acute{A}rea(a)\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{25-a^2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2(25-a^2)}{4}$$

$$B'(a) = \frac{2a(25-a^2) + a^2(-2a)}{4} =$$

$$= \frac{50a - 2a^3 - 2a^3}{4} = \frac{a}{4}(50 - 4a^2)$$

$$50 - 4a^2 = 0 \Rightarrow 50 = 4a^2 \Rightarrow 25/2 = a^2$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 5/\sqrt{2}}$$

Los candidatos a puntos del dominio donde se realiza el máximo de la función B son: $5/\sqrt{2}$ ← punto crítico

0 ← puntos del borde

5

Como $B(0) = B(5) = 0$

El máximo de $B(a) = [Área(a)]^2$ se realiza en $a = 5/\sqrt{2}$

Entonces el máximo de $Área(a)$ es

$$Área(5/\sqrt{2}) = \frac{5/\sqrt{2} \cdot \sqrt{25 - 25/2}}{} =$$

$$\frac{\qquad}{2}$$

$$= \frac{\frac{5}{\sqrt{2}} \sqrt{25\left(1-\frac{1}{2}\right)}}{2} =$$

$$= \frac{\frac{5}{\sqrt{2}}\, 5\sqrt{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{5^2}{\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}} =$$

$$= \boxed{\frac{25}{4}}$$