Clase 25

- Extremos relativos y absolutos (Apostol 4.13)
- teo. valor medio para derivadas (Apostol 4.14)

Extremos relativos y absolutos

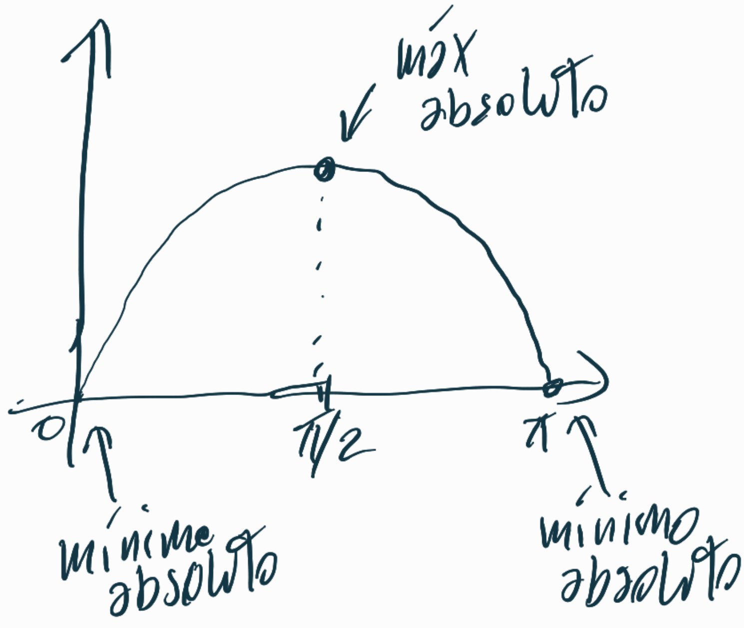
Recordar: Sea $f: I \to \mathbb{R}$ continua.

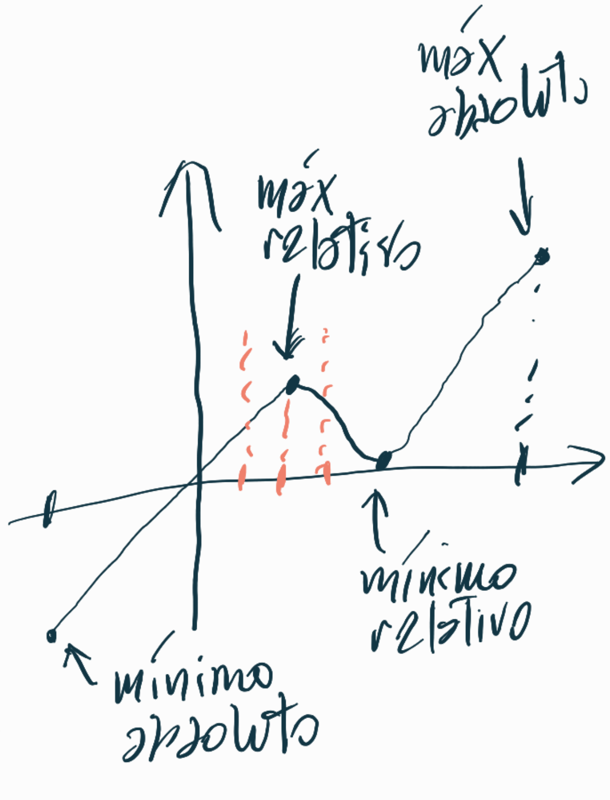
- f tiene un máximo absoluto en $x_0 \in I$ si $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x \in I$.
- f tiene un mínimo absoluto en $x_0 \in I$ si $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x \in I$.
- teo (Weierstrass): si $I = [a, b]$ es un intervalo cerrado, entonces f tiene máximo y mínimo absoluto en I.

Def. Sea $f: I \to \mathbb{R}$ y supongamos que $x_0 \in I$.

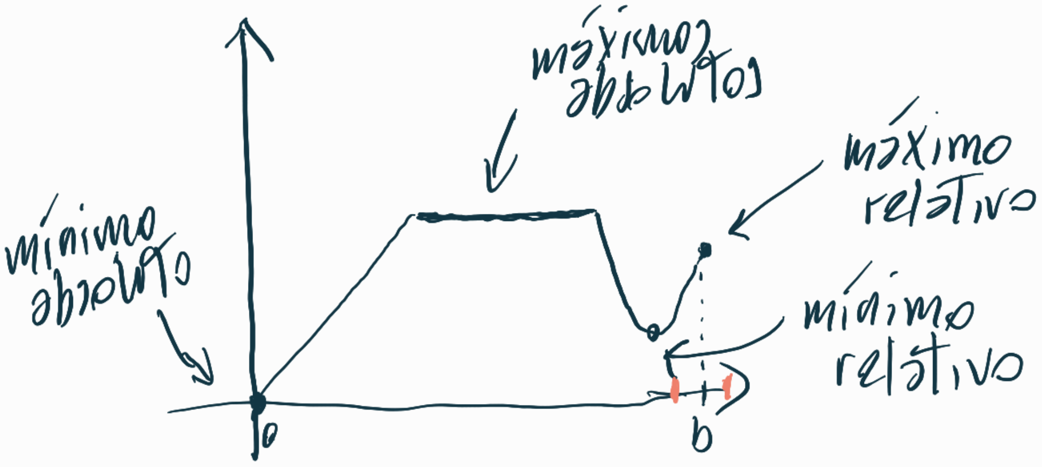
- Decimos que f tiene un máximo relativo en x_0 si $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que
$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in I \cap E(x_0, \varepsilon)$$
- Decimos que f tiene un mínimo relativo en x_0 si $\exists\ \varepsilon > 0$ tal que
$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in I \cap E(x_0, \varepsilon)$$
- Decimos que f tiene un extremo relativo en x_0 si f tiene un máximo o mínimo relativo en x_0.

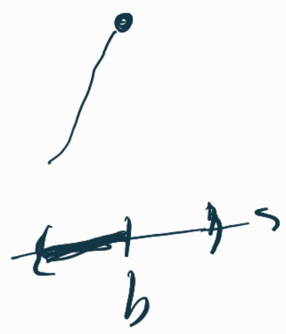
Ejemplo:

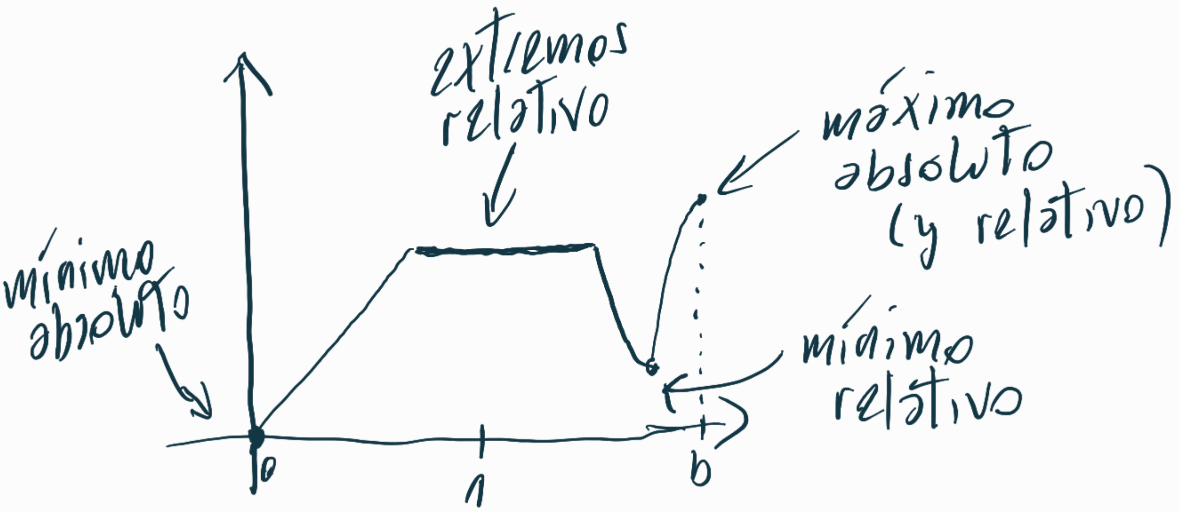




Obs: todo extremo absoluto es un extremo relativo, pero el recíproco es falso.







Teorema. (Anulación de la derivada en un extremo interior)

Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Si f tiene un extremo relativo en $c \in (a,b) \Rightarrow f'(c) = 0$.

Dem. Tenemos 3 posibilidades: 1) $f'(c)>0$

2) $f'(c)<0$

3) $f'(c)=0$.

CASO 1)

. Si $f'(c)=\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0$

Por conservación del signo existe $\varepsilon>0$ tal que

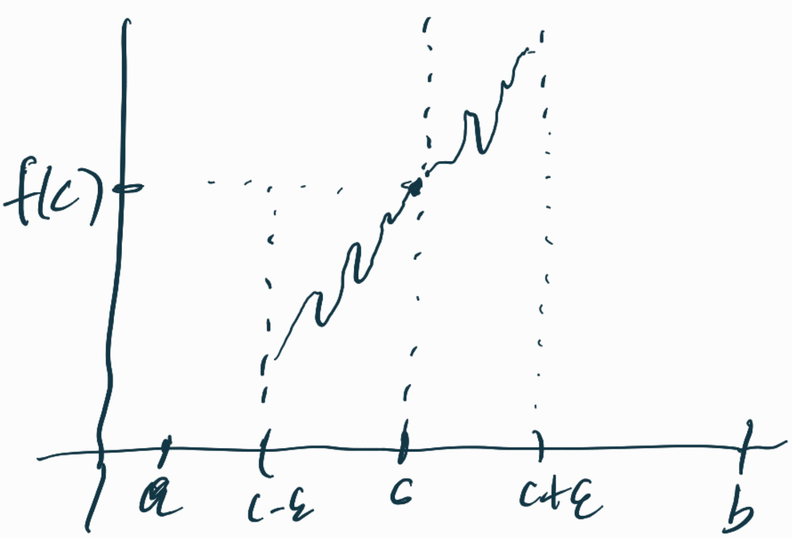
$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h}>0 \quad \forall h\in E(0,\varepsilon) \quad (I)$$

Si $0<h<\varepsilon$, por (I): $f(c+h)-f(c)>0$

$\Rightarrow f(c+h)>f(c)$, $\forall h: 0<h<\varepsilon$

Si $-\varepsilon<h<0$, por (I): $f(c+h)-f(c)<0$

$\Rightarrow f(c+h)<f(c)$, $\forall h: -\varepsilon<h<0$



(Obs: si $h\in E(0,\varepsilon)\Rightarrow c+h\in E(c,\varepsilon)$)

En ese caso f no puede tener extremo relativo en c.

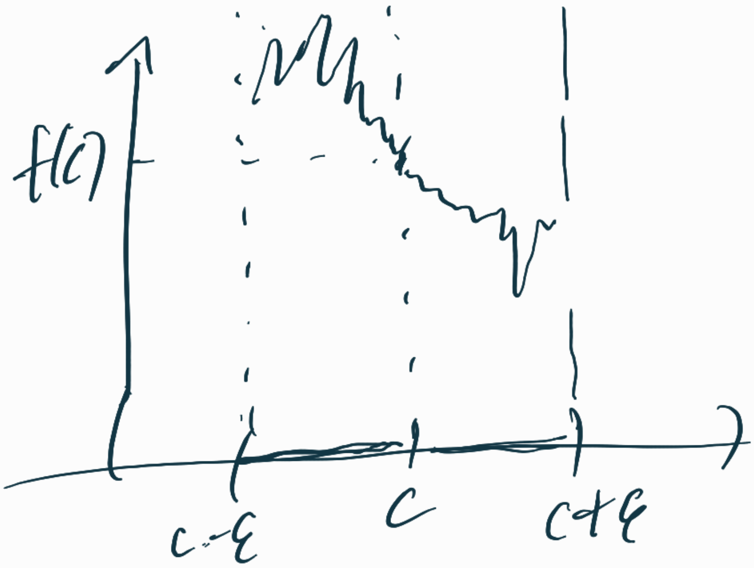
CASO 2)

. Si $f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} < 0$

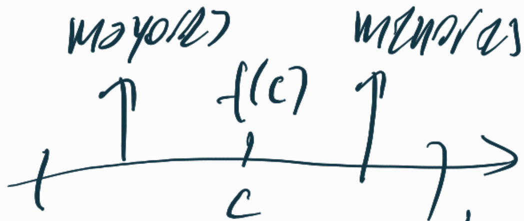
entonces análogo al caso anterior podemos probar que $\exists\, \varepsilon > 0$ t.q.

$$f(c+h) < f(c), \quad \forall h: 0 < h < \varepsilon$$

$$f(c+h) > f(c), \quad \forall h: -\varepsilon < h < 0$$



tampoco puede tener extremo relativo en c

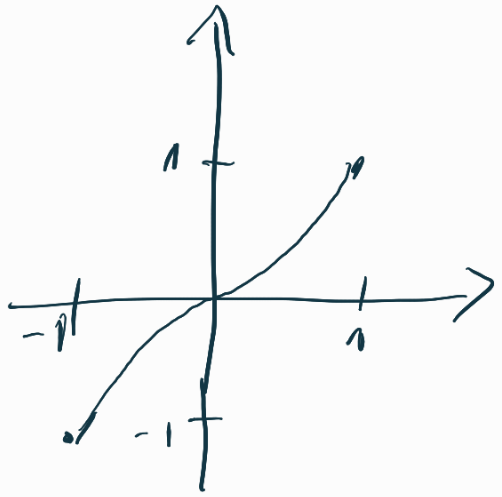


Luego, la única posibilidad es $f'(c) = 0$.

Obs: Si $f'(c)=0$ no implica que f tenga un extremo relativo en c.

Ejemplo: $f:[-1,1]\to\mathbb{R} \,/\, f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2 \Rightarrow f'(0)=0$

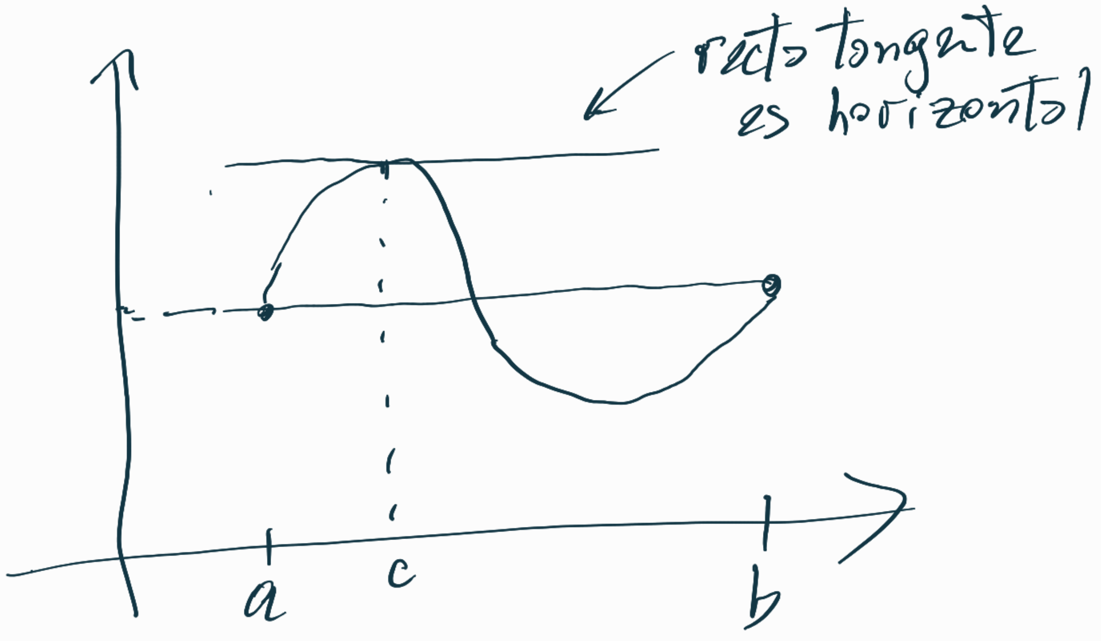


pero f no presenta extremo relativo en 0 (porque es creciente)

teorema del valor medio para derivadas

teorema de Rolle: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b).

Si $f(a)=f(b) \Rightarrow \exists\, c\in(a,b) \,/\, f'(c)=0$.



<u>Dem.</u> Por absurdo, supongamos que
$f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.

Por el teorema anterior, f no tiene extremos relativos (ni absolutos) en el intervalo (a,b).

Por Weierstrass, sabemos que f tiene máximo y mínimo absoluto en $[a,b]$ $\Rightarrow$ f tiene máximo y mínimo absolutos en a y b.

$\Rightarrow f$ sería constante en $[a,b]$

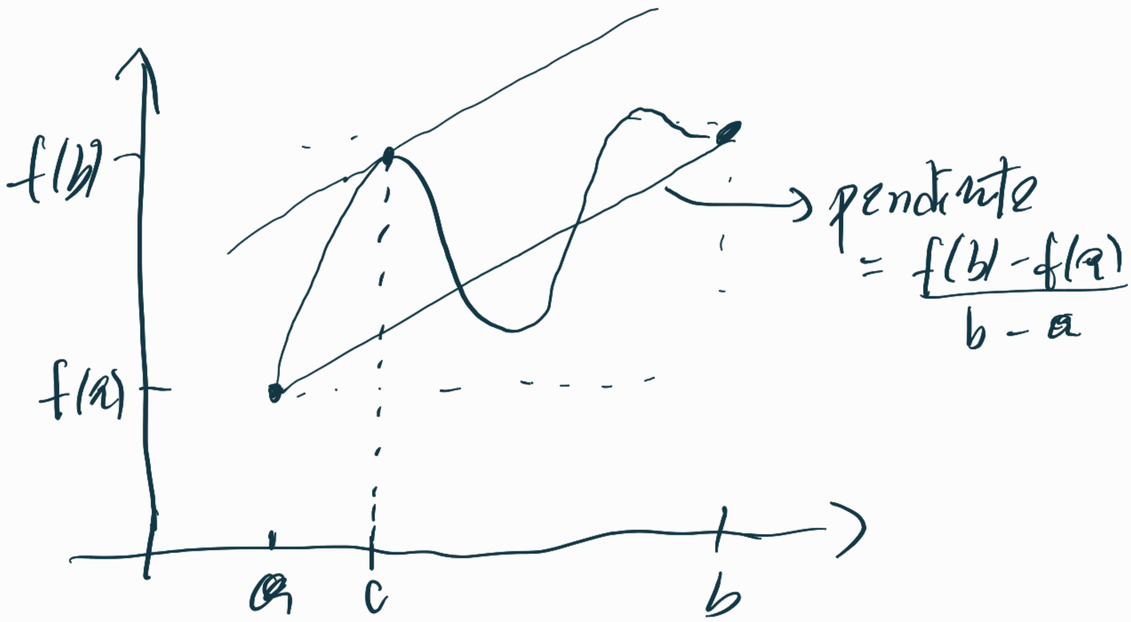
$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$ ABSURDO.

Luego, $\exists\, c \in (a,b) \,/\, f'(c) = 0$. $\square$

Teo. del valor medio para derivadas:

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) $\Rightarrow$ $\exists\, c \in (a,b)$ /

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Dem. Consideramos $h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)x$

$$h(a) = f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)a$$

$$= \frac{b f(a) - \cancel{a f(a)} - a f(b) + \cancel{a f(a)}}{b-a}$$

$$= \frac{b f(a) - a f(b)}{b-a}$$

$$h(b) = \frac{f(b)(b-a) - (f(b)-f(a))b}{b-a}$$

$$= \frac{\cancel{bf(b)} - af(b) - \cancel{bf(b)} + bf(a)}{b-a}$$

$$= \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}$$

Por Rolle: $\exists\, c \in (a,b) \,/\, h'(c) = 0$

Como $h'(x) = f'(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$

$$\Rightarrow h'(c) = 0 = f'(c) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$$

$$\Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \square$$