Óptimo como punto silla del Lagrangeano (Ejercicio)

10 de octubre de 2023

1. Función genérica

Consideremos una función $\varphi : X \times Z \to \mathbb{R}$, con $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Z \subseteq \mathbb{R}^m$.

a) Pruebe que siempre se cumple la siguiente desigualdad [1][p.151]:

$$\sup_z \inf_x \varphi(x, z) \leq \inf_x \sup_z \varphi(x, z). \tag{1}$$

b) Suponga que la función $\varphi(x, z)$ es diferenciable, convexa en $x \in X$ y cóncava en $z \in Z$; con X y Z conjuntos convexos. Pruebe que todo punto $(\tilde{x}, \tilde{z})$, tal que $\nabla\varphi(\tilde{x}, \tilde{z}) = 0$, es punto silla de ϕ. Esto es:

$$\varphi(\tilde{x}, z) \leq \varphi(\tilde{x}, \tilde{z}) \leq \varphi(x, \tilde{z}), \quad \forall\ z \in Z,\ x \in X. \tag{2}$$

c) Pruebe que (2) implica:

$$\sup_z \inf_x \varphi(x, z) \geq \inf_x \sup_z \varphi(x, z). \tag{3}$$

Concluya que:

$$\sup_z \inf_x \varphi(x, z) = \inf_x \sup_z \varphi(x, z). \tag{4}$$

Es decir: si se cumple (2), supremo e ínfimo pueden intercambiarse sin afectar el resultado.

2. Lagrangeano

Consideremos ahora el siguiente problema con restricciones lineales de igualdad, donde f se asume convexa y diferenciable:

$$\min_{x \in X} f(x) \tag{5}$$

$$\text{sujeto a: } Ax - b = 0,\ b \in \mathbb{R}^m \tag{6}$$

Sea $\varphi(x, z)$ el Lagrangeano del Problema (5), donde $z \in \mathbb{R}^m$ representa a los multiplicadores asociados a la restricción (6).

d) Observe que el lado izquierdo de la igualdad en (4) es el máximo del dual de (5), y muestre que el lado derecho corresponde al mínimo del primario (ver [1][p.237]).

e) Muestre que se cumplen las condiciones en b). Luego (4) garantiza la dualidad fuerte en (5).

Referencias

[1] S. Boyd, V. Vanderberghe *Convex Optimization,* Cambridge University Press, 2006.