Aplicaciones del Álgebra Lineal
2^{DO} semestre - 2023

Práctico 5: Sucesiones de Matrices y Modelo de Leontieff.

Ref. ALA, JAP, Capítulo I, Sección 4 y Capítulo II, Sección 1

Ejercicio 1 Calcule $f(A)$, donde $f(t) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{6^s}.t^s$, y $A = J_4(3) \oplus J_2(1)$.

Ejercicio 2 Demuestre que la serie $f(A) = \sum_{s=0}^{+\infty} \mu_s A^s$ diverge si el radio de convergencia $r(f) < \rho(A)$.

Ejercicio 3 Considere las series:

$$\operatorname{sen} t = \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s . \frac{1}{(2s+1)!} . t^{2s+1}; \quad \cos t = \sum_{s=0}^{+\infty} (-1)^s . \frac{1}{(2s)!} . t^{2s}.$$

a. Demostrar que para toda matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ las series convergen, o sea $\operatorname{sen} A$ y $\cos A$, están bien definidas.

b. Probar que $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = I_n$.

c. Probar que $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A . \cos A$.

Ejercicio 4 Encuentre condiciones necesarias y suficientes (en función de sus coeficientes) para que una matriz $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tenga diagonal dominante.

Ejercicio 5

a. Si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es una M-matriz probar que B, su matriz de comparación, tiene diagonal dominante.

b. Si $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ es una M-matriz probar que B, su matriz de comparación, tiene diagonal dominante.

Ejercicio 6 Recordemos que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tiene diagonal dominante, si existe $\vec{d} = (d_1, d_2, \cdots, d_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$, tal que $d_j.||a_{jj}|| > \sum_{i \neq j} d_i.||a_{ij}||$, para todo $j = 1, 2, \cdots, n$. Al vector $\vec{d}$, lo llamaremos vector de dominación.

a. Probar que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tiene diagonal dominante, y d es vector de dominación, entonces:

i) Existen infinitos vectores de dominación de A.

ii) Existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $d' \in B(d, \epsilon) \subset (\mathbb{R}^+)^n$, d' también es vector de dominación de A.

b. Si A tiene diagonal dominante, ¿existe $\hat{d} \in \mathbb{R}^n$ vector de dominación con $||\hat{d}|| = 1$?

Ejercicio 7 Sea $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, con $b_{ii} \geq 0$, y $b_{ij} \leq 0$, si $i \neq j$. Probar que las afirmaciones a) y e) del Teorema 1.7, del Capítulo II, del libro de referencia, son equivalentes. O sea, probar que son equivalentes:

a) B es una M-matriz.

e) La parte real de cada valor propio de B es positiva.

Marcelo Lanzilotta