Clase 22:

Funciones en $\mathbb{R}^n$

CDIVV - 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Def: Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una función

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$a(k) = a_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \ldots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$$

notación

Proposición: $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \underset{\mathbb{R}^n}{L} \iff \lim_{k \to +\infty} a_{k,i} = L_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

$$L = (L_1, \ldots, L_n)$$

Def: Sea a_k una sucesión en $\mathbb{R}^n$

k_j una sucesión de naturales estrictamente creciente

a_{k_j} es una **subsucesión de a_k**

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{k} & \mathbb{N} & \xrightarrow{a} & \mathbb{R}^n \\ j & \longrightarrow & k_j & \longrightarrow & a_{k_j} \end{array}$$

estrictamente creciente

Teorema: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.

Dem: Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es

$$a_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n})$$

Para cada $i = 1, \dots, n$ $\{a_{k,i}\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}$.

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ está acotada $\overset{def}{\iff}$ $\exists K \in \mathbb{N}$ tq

$$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap\!|}{B(0,K)}}$$

$\Rightarrow$ $\{a_{k,i}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$, $\forall i=1,\dots,n$

$\{a_{k,1}\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$ y por lo tanto tiene una subsucesión convergente.

Llamemos $\mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}$ al conjunto de indices de la subsucesión convergente de $a_{k,1}$

Si consideramos la subsucesión de

$\{a_{k,2}\}_{k\in\mathbb{N}_1}$ que consiste restringir los índices a $\mathbb{N}_1$ obtenemos una sucesión acotada. $\Rightarrow$ tiene una subsucesión

convergente y llamamos $\mathbb{N}_2$

$$\mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}$$

a los índices.
Siguiendo esta construcción obtenemos-

$$\mathbb{N}_n \subseteq \dots \subseteq \mathbb{N}_2 \subseteq \mathbb{N}_1 \subseteq \mathbb{N}$$

tal que

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ verifica que

$\{a_{ki}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ es convergente $\forall\, i$, Corolario: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto compacto

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K \Rightarrow$ existe

$\{a_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ subsucesión

convergente de $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

a un $L \in K$.

Dem: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto $\Rightarrow$ K es acotado

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K \Rightarrow$ existe $\{a_{k_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$

Teorema arriba

una subsucesión convergente.

$$\lim_{i\to+\infty} a_{k_i} = L$$

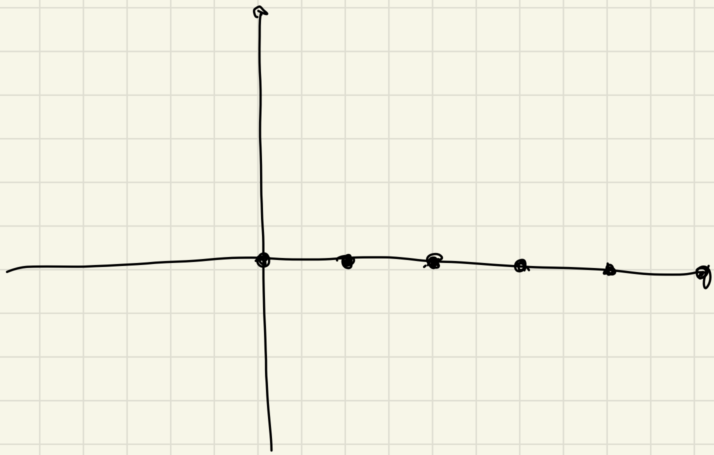
K es cerrado (por ser compacto)

$\Rightarrow$ K es cerrado por sucesiones

$\Rightarrow$ $L \in K$

C cerrado pero no acotado.

- $C \subseteq \mathbb{R}^n$ $\qquad a_k = (k, 0, 0, \dots, 0)$



$$C = \{ (k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : k \in \mathbb{N} \}.$$

C es cerrado pero no acotado

$$a_k = (k, 0, \dots, 0)$$

$$\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$$

<u>NO</u> tiene una subsucesión convergente.

C es acotado pero no cerrado

$$C = \{ (x, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n : x \in (0,1) \}.$$

$$a_k = \left(\frac{1}{k}, 0, \dots, 0\right)$$

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$ pero ninguna subsucesión converge en C

Funciones en $\mathbb{R}^n$

El objetivo es estudiar funciones

$$f: \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{D}{\cap}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

- gráficas
- límites
- continuidad
- derivabilidad (diferenciabilidad)
- integrabilidad

Ejemplos: • $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$$

• $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y,z) = xy - z^2 x$$

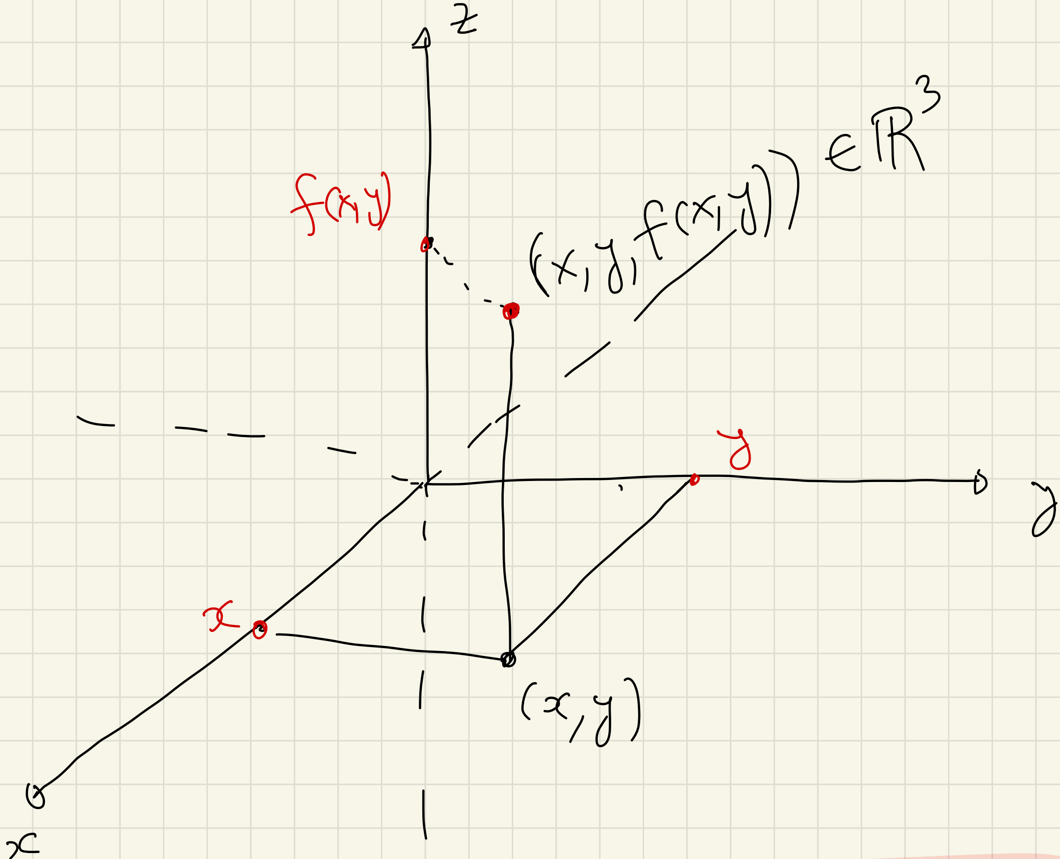
• $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y - x^3 y$$

Gráfica

$$f: \underset{\mathbb{R}^2}{\underset{\cap}{D}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$G(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) \}.$$

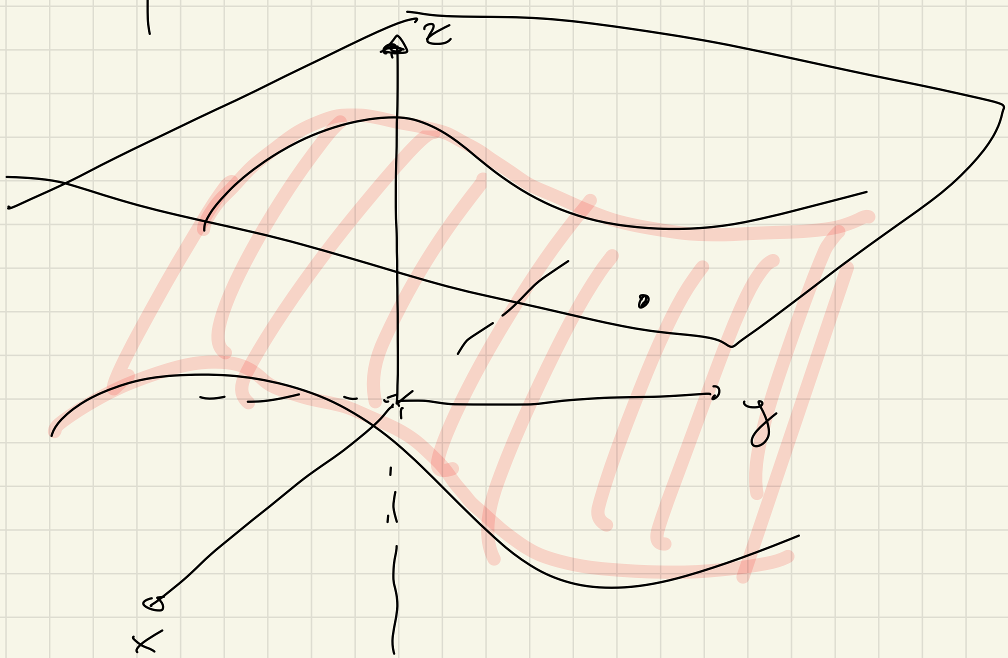


Objetivo: Graficar $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$

$$C_k = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y) = k\}$$

fijo

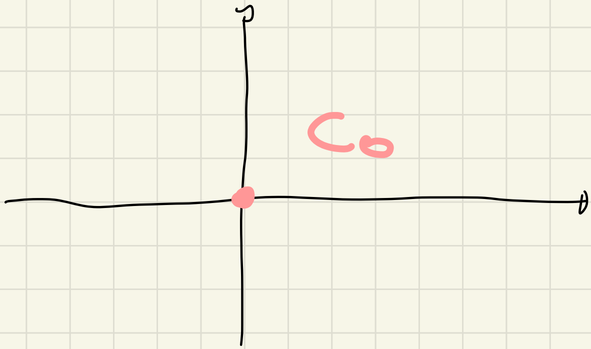
Curvas de nivel de f



$$C_k = \{(x,y,z) : \sqrt{x^2+y^2} = z = k\}$$

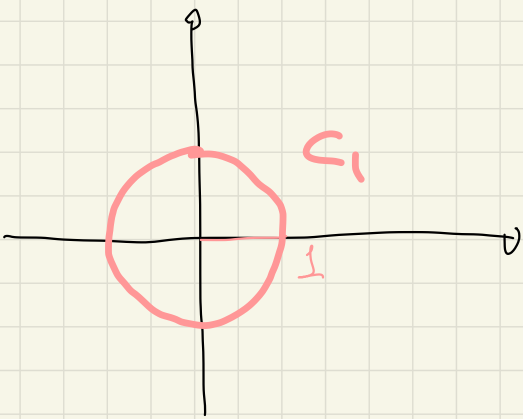
$k=0$ $\quad C_0 = \{(x,y,0) : \sqrt{x^2+y^2} = 0\}$

$= (0,0,0)$

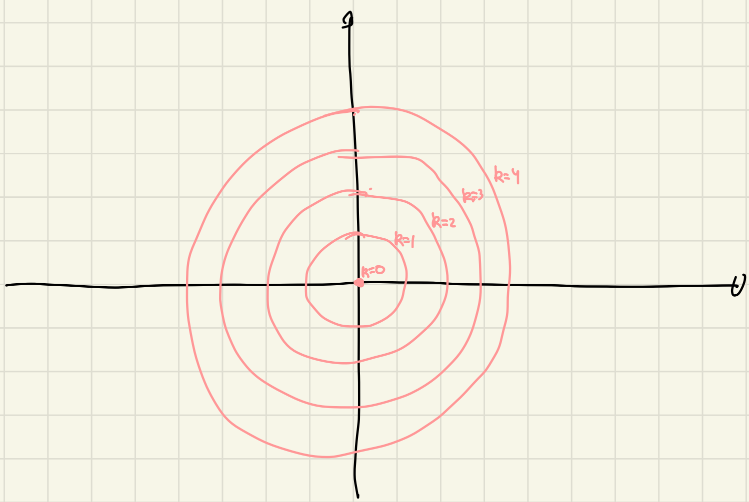


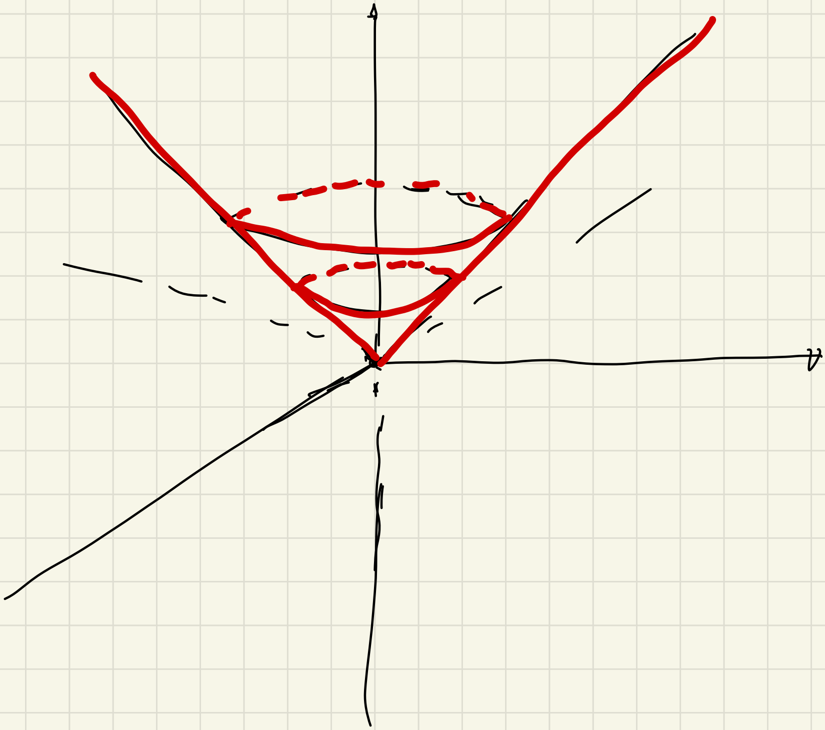
$k=1$ $\quad C_1 = \{(x,y,1) : \sqrt{x^2+y^2} = 1\}$

$x^2+y^2=1$

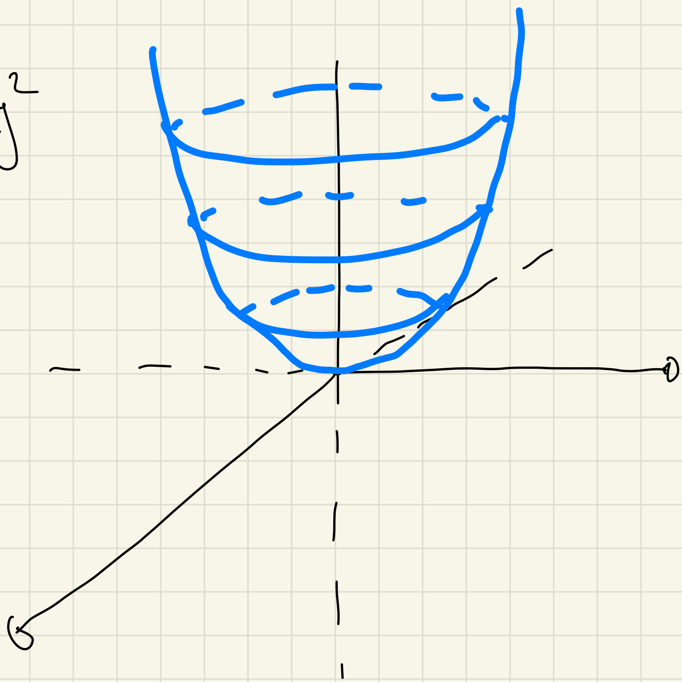


$\sqrt{x^2+y^2} = k$



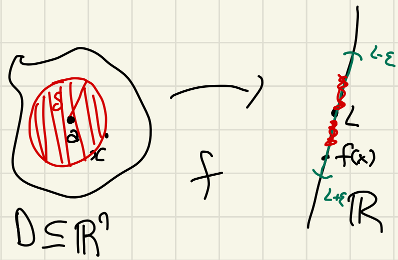


$$f(x, y) = x^2 + y^2$$



Límite de una función

- $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$.
  $D \subseteq \mathbb{R}^n$



- $a \in \mathbb{R}^n$ punto de acumulación de D

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\iff$$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tal que

$\forall \, x \in B^*(a, \delta) \cap D$ se cumple

que $|f(x) - L| < \varepsilon \qquad \left(f(x) \in B(L, \varepsilon) \right)$