Clase 21:

Sucesiones en $\mathbb{R}^n$

CDIVV – 2023 - 2sem

Eugenia Ellis

eellis@fing.edu.uy

Def: Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es una función

$$a : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$a(k) = a_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n}) \in \mathbb{R}^n$$

notación

Def: Sea $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = L \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \text{ tq } a_k \in B(L, \varepsilon) \ \forall k \geq k_0$$

$L \in \mathbb{R}^n$

$$L = (L_1, L_2, \dots, L_n)$$

$$B(L, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}^n : \| x - L \| < \varepsilon \}.$$

Ejemplo: $a_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{k+1}{2k^2}, 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^k \right)$

es una sucesión definida en $\mathbb{R}^3$

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \, ?$$

Probaremos que $\lim_{k \to +\infty} a_k = (0, 0, 3)$

$\boxed{\text{Proposición:}}$ $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathbb{R}^n$

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{\cap}{L}} \iff \lim_{k \to +\infty} a_{k,i} = L_i \in \mathbb{R}$$

$\forall i = 1, \dots, n.$

$L = (L_1, \dots, L_n)$

Dem:

$$a_k = (a_{k,1}, a_{k,2}, \dots, a_{k,n})$$

$$0 \leq |a_{k_i} - L_i| \leq \| a_k - L \| = \sqrt{(a_{k,1} - L_1)^2 + (a_{k,2} - L_2)^2 + \dots + (a_{k,n} - L_n)^2}$$

$(\Rightarrow)$ $\lim_{k\to+\infty} a_k = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$a_k \in B(L, \varepsilon) \ \forall k \geq k_0$$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$\|a_k - L\| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq

$$|a_{k,i} - L_i| < \varepsilon \ \forall k \geq k_0$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to+\infty} a_{k,i} = L_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$(\Leftarrow)$ Dado $\varepsilon > 0$, sea $k_{01} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_{k,1} - L_1| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad \forall k \geq k_{01}$$

Sea $k_{0i} \in \mathbb{N}$ tal que.

$$|a_{k,i} - L_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \qquad \forall k \geq k_{0i}$$

Sea $k_0 = \max\{k_{01}, \dots, k_{0i}, \dots, k_{0n}\}$.

Por lo tanto $\forall k \geq k_0$

$$|a_{k,i} - L_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

$$\|a_k - L\| = \sqrt{(a_{k,1}-L_1)^2 + \cdots + (a_{k,n}-L_n)^2} < \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{n} + \cdots + \frac{\varepsilon^2}{n}} = \sqrt{\frac{n\varepsilon^2}{n}} = \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$\forall k \geq k_0$

$$\|a_k - L\| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{k \to +\infty} a_k = L$$

$\square$

Ejemplo: 1) $a_k = \left((-1)^k, \frac{2}{k^2}\right)$ no converge

porque la sucesión de primeres coordenadas no converge

2) $a_k = \left(k^2, \frac{1}{k}\right)$ no converge

porque la sucesión de primeres coordenadas no converge

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\{b_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = L \qquad \lim_{k\to+\infty} b_k = L'$$

$\Rightarrow$

- $$\lim_{k\to+\infty} a_k + b_k = L + L'$$

- $\{\lambda_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ $\quad \lim_{k\to+\infty} \lambda_k = \lambda$

$$\lim_{k\to+\infty} \lambda_k a_k = \lambda L.$$

- $$\lim_{k\to+\infty} \| a_k \| = |L|$$

Sea A un conjunto en $\mathbb{R}^n$,

A es cerrado por sucesiones sii

$\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ tal que $\lim_{k\to+\infty} a_k = L$

$$\Rightarrow L \in A$$

$A = (0,2)$ ¿es cerrado por sucesiones?

NO

$a_k = \frac{1}{k}$ $\quad \{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A \quad \lim\limits_{k \to +\infty} a_k = 0$

y sin embargo $0 \notin A$

Proposición:

Un conjunto C es cerrado

$\Longleftrightarrow$

C es cerrado por sucesiones

Dem:

($\Longrightarrow$) C es cerrado, si $\{a_k\} \subseteq C$

tal que $\lim\limits_{k \to +\infty} a_k = L$. qvq $L \in C$

Supongamos que $L \notin C$, entonces

$L \in C^c$

C es cerrado $\Longrightarrow$ C^c es abierto $\Big\} \Longrightarrow$ L es un punto interior

$\exists\, \varepsilon > 0 \quad B(L, \varepsilon) \subseteq C^c$ lo cual es absurdo ya que $\lim_{k \to +\infty} a_k = L$

$(a_k) \subseteq C$

($\Leftarrow$) Para probar que C es cerrado probaremos que contiene a todos sus puntos frontera.

Sea $x_0 \in \partial C$, esto significa que $\forall\, \varepsilon > 0$

$$B(x_0, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset \quad y \quad B(x_0, \varepsilon) \cap C^c \neq \emptyset$$

Nos construimos una sucesión

$(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq C$ tq

$$a_k \in B\left(x_0, \frac{1}{k}\right) \cap C$$

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = x_0 \underset{\text{por } \textcircled{H}}{\Longrightarrow} x_0 \in C$$

C es cerrado por sucesiones

$\Rightarrow$ C es cerrado.

Def: Sea a_k una sucesión en $\mathbb{R}^n$

k_j una sucesión de naturales estrictamente creciente

a_{k_j} es una subsucesión de a_k

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{k} & \mathbb{N} & \xrightarrow{a} & \mathbb{R}^n \\ j & \longrightarrow & k_j & \longrightarrow & a_{k_j} \end{array}$$

estrictamente creciente

Teorema: Toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.