Clase 20:

Puntos de acumulación

CDIVV – 2023 - 2sem

Eugenie Ellis

eellis@fing.edu.uy

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto y $p \in \mathbb{R}^n$.
Decimos que p es $\boxed{\text{punto de acumulación}}$ de A sii $\forall \varepsilon > 0$ $B^*(p, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Notación:

$$A' = \{ p \in \mathbb{R}^n : p \text{ punto de acumulación de } A \}$$

Observación: 1) Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$
Si $p \in \mathbb{R}^n$ es un punto exterior a A
$\Rightarrow$ p NO es de acumulación

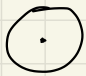
Dem: Si p es exterior a A, $\exists \varepsilon > 0$
$B(p, \varepsilon) \subseteq A^c \Rightarrow B(p, \varepsilon) \cap A = \emptyset$
$\Rightarrow$ $B^*(p, \varepsilon) \cap A = \emptyset$
$\Rightarrow$ p NO es de acumulación

2) Si $p \in \mathbb{R}^n$ es un punto interior a A

$\Rightarrow$ p es de acumulación

Dem: Si p es interior a A, $\exists \delta > 0$ tq $B(p,\delta) \subseteq A$

$\Rightarrow B^*(p,\delta) \subseteq A$



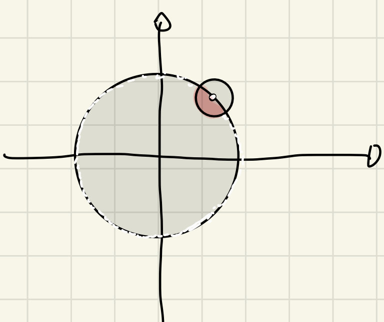
$\Rightarrow B^*(p,\delta) \cap A \neq \emptyset$

$\forall \varepsilon > 0 \quad B^*(p,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

$\Rightarrow$ p es de acumulación

Ejemplos:

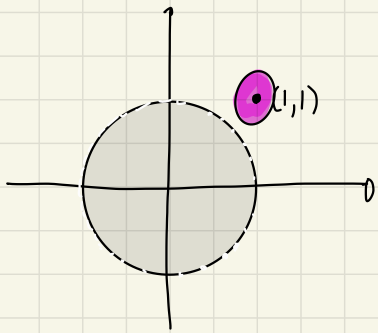
1) $A = B((0,0),1) \subseteq \mathbb{R}^2$



¿A'?

$$\overset{\circ}{A} = A \qquad A' = \overline{B((0,0),1)}$$

2) $A = B((0,0),1) \cup \{(1,1)\}$



(1,1) es un punto frontera aislado

$$B((1,1),\varepsilon) \cap A \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0$$

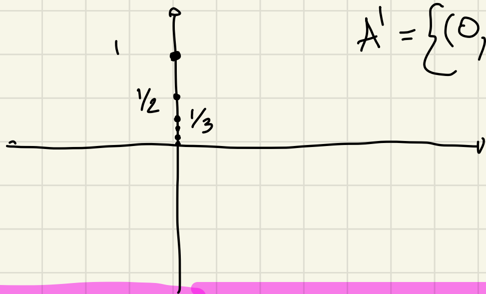
$(1,1) \in A$

pero $\underset{\substack{\not\ni \\ (1,1)}}{B^*}\left((1,1),\frac{1}{100}\right) \cap A = \emptyset$

$\Rightarrow$ (1,1) no es de acumulación

$$A' = \overline{B((0,0),1)}$$

3) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0 \quad y = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$



$A' = \{(0,0)\}$

Proposición: Un conjunto C es cerrado $\iff$ C contiene a sus puntos de acumulación.

$\Rightarrow)$ C es cerrado y p punto de acumulación de C.

Queremos probar que $p \in C$.

Supongamos que $p \notin C \Rightarrow p \in C^c$

Como C^c es un conjunto abierto

$\Rightarrow \exists\, \varepsilon > 0$ tq $B(p, \varepsilon) \subset C^c$

$\Rightarrow B(p, \varepsilon) \cap C = \emptyset$

$\Rightarrow B^*(p, \varepsilon) \cap C = \emptyset$ esto es absurdo

porque p es punto de acumulación de C

El absurdo fue suponer que $p \notin C$

Por lo tanto $p \in C$.

$(\Leftarrow)$ C contiene a sus puntos de acumulación y queremos probar que C es cerrado, es decir, que C^c es abierto.

Sea $p \in C^c \Rightarrow p$ <u>NO</u> es de acumulación de C.

<u>NO</u> se cumple que $\forall \varepsilon > 0$

$$B^*(p, \varepsilon) \cap C \neq \emptyset$$

$$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ tq } B^*(p, \varepsilon) \cap C = \emptyset$$

Además $p \notin C \Rightarrow B(p, \varepsilon) \cap C = \emptyset$

$$\Rightarrow B(p, \varepsilon) \subseteq C^c$$

$\Rightarrow C^c$ es abierto $\Rightarrow C$ es cerrado.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathring{A} = \{p \in \mathbb{R}^n : \ p$ es interior a $A\}$.

interior de A

$\partial A = \{p \in \mathbb{R}^n ; \ p$ es frontera de $A\}$.

borde o frontera de A

$\overline{A} = A \cup \partial A$

clausura de A

$A' = \{p \in \mathbb{R}^n : \ p$ es punto de acumulación de $A\}$.

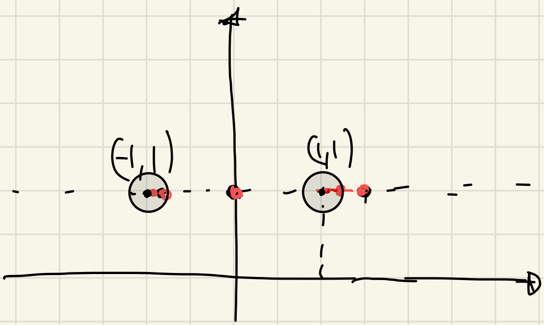
<u>Def:</u> Decimos que $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto **acotado** si existe $R \in \mathbb{N}$ tal que $A \subseteq \underset{\mathbb{R}^n}{\underset{\cap}{B(0,R)}}$

Decimos que A es $\boxed{\text{compacto}}$

si A es un conjunto cerrado y acotado

Ejemplo:

1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = (-1)^n + \frac{1}{n} \;\; y = 1, \; n \geq 1\}$



$\overset{\circ}{A} = \emptyset$

$\partial A = A \cup \{(-1,1), (1,1)\}$

$\overline{A} = A \cup \partial A = A \cup \{(-1,1), (1,1)\}$

$A' = \{(-1,1), (1,1)\}$.

A no es abierto porque sus puntos no son interiores
$A \neq \mathring{A}$

A no es cerrado porque no contiene a todos sus puntos de acumulación

$A \subseteq B((0,0),2) \Rightarrow A$ es acotado.

A no es compacto porque no es cerrado.

2) $A = B((0,0),1) \cap \mathbb{Q}^2$

$\mathring{A} = \emptyset$

$\partial A = \overline{B((0,0),1)}$

$\overline{A} = \overline{B((0,0),1)}$

$A' = \overline{B((0,0),1)}$

A es acotado.

A no es abierto

A no es cerrado.