

**Facultad de Ingeniería – Udelar**

**Departamento de Diseño industrial – IIMPI**

**MODELADO DE SISTEMAS MECÁNICOS EMPLEANDO EL  
MÉTODO DE LOS ELEMENTO FINITOS**

**CLASE N° 6**

**ASPECTOS FUNDAMENTALES PARA LA FORMULACIÓN  
DE ELEMENTOS 2D Y 3D.**

**PROFESOR**

**Dr. Henry Figueredo Losada**

**Montevideo. Uruguay.**

**Noviembre 2019**

## **TEMA III. FORMULACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS 2D-ESTÁTICOS.**

### **CLASE 6. CONCEPTOS PARA DEFINIR LA MATRIZ DE RIGIDEZ GENERAL DE ELEMENTOS FINITOS.**

#### **Sumario.**

- 1. Introducción.**
- 2. Definición de las Funciones de Forma.**
- 3. Formulación de la función de forma para un elemento de tipo viga.**
- 4. Normalización del espacio.**
- 5. Funciones de forma mediante el polinomio interpolador en la forma de Lagrange.**
- 6. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma para el elemento de tipo viga.**

#### **Objetivos.**

Conocer los conceptos más importantes para definir la matriz de rigidez de elementos finitos en general 2D y 3D.

#### **Bibliografía.**

9. Klaus-Jurgen Bathe "Finite Element Procedures", 2da Edição.
10. G.R.Liu "The Finite element Method- A practical course".
11. The Finite Element Method using MATLAB - Kwon and Bang

#### **Bibliografía opcional portugués**

12. Avelino Alves Filho "Elementos Finitos, A base da tecnologia CAE", 5ta Edição.

#### **1. Introducción.**

En las aulas anteriores comenzamos el estudio de varios elementos finitos que harán parte de la biblioteca de elementos que estamos construyendo en este curso, o sea ya tenemos definidos los elementos del tipo barra (Truss) y viga (Beam), para formular y construir estos elementos utilizamos algunos de los conceptos del estudio de la resistencia de materiales. Estos elementos más simples (resortes, barras y vigas) abordados anteriormente permiten la aplicación del método directo para la determinación de la matriz de rigidez, permitiendo establecer relaciones directas entre fuerzas nodales aplicadas en el elemento y sus correspondientes desplazamientos nodales. Recordando ahora el concepto fundamental del MEF para resolver ecuaciones diferenciales y transformar un problema continuo en un conjunto de ecuaciones discretas, dividiendo el dominio original en subdominios (elementos finitos) en las que las ecuaciones de gobierno se mantienen y son trasladadas a cada subregión,

a los nodos de la discretización, pasando de ser un problema continuo a ser un problema discreto y nodal.

Para poder realizar este proceso se utilizan algunos conceptos matemáticos y físicos que en conjunto permitirán establecer un procedimiento general para determinar la función aproximada a la función solución del problema.

Dado que el empleo de funciones de aproximación a la función incógnitas es clave para la formulación del MEF, en esta clase se estudian en detalles.

## 2. Definición de las Funciones de Forma.

Empleando las funciones de aproximación como una condición necesaria dentro del problema discreto y nodal fig 5.1, podemos señalar que la solución numérica de una ecuación diferencial en un dominio continuo se aproxima mejor a la solución analítica cuando me mejor se aproxime la función de aproximación seleccionada a la función solución del problema. Estas funciones de aproximación son conocidas como funciones de “forma”.

Las funciones de forma se utilizan tanto para la discretizar el espacio (dominio), como para la aproximación de la función incógnita dentro del subdominio (elemento finito) fig 5.2.

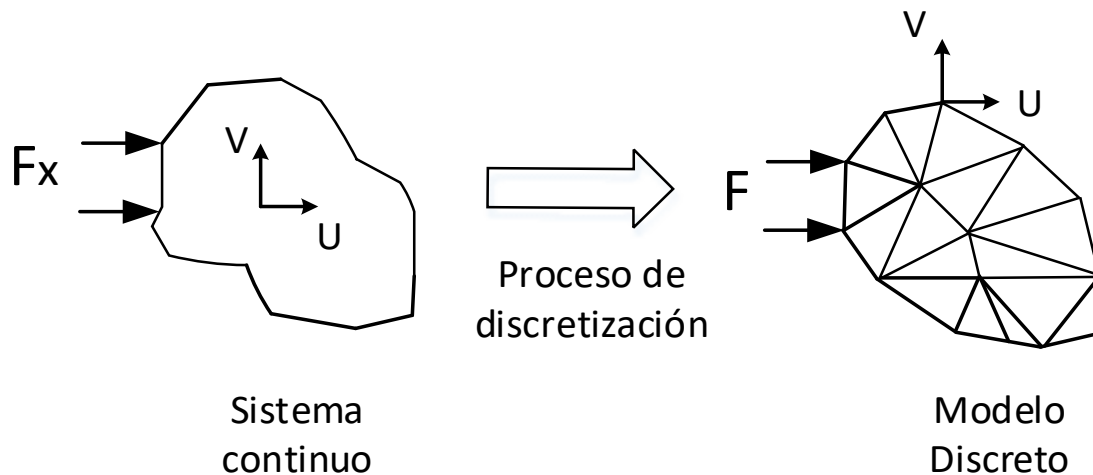


Figura 5.1 Proceso de discretización pasando de ser un problema continuo a ser un problema discreto y nodal.

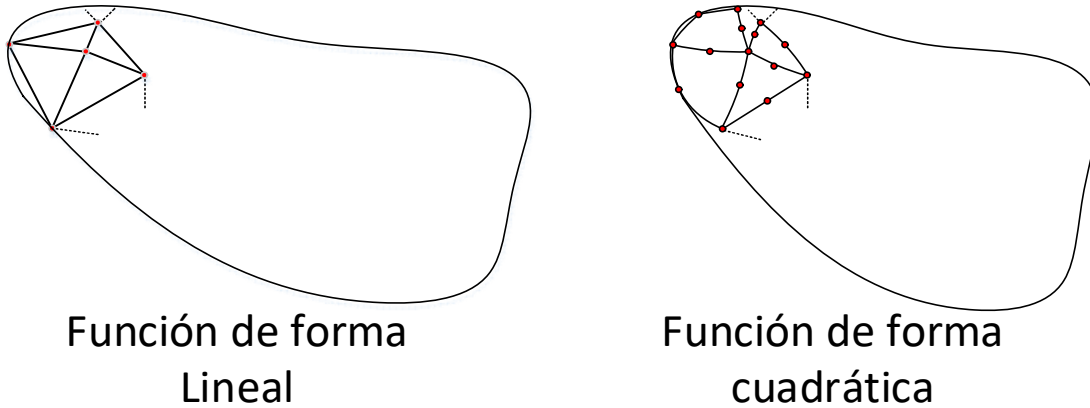


Figura 5.2 Aproximación de la geometría mediante una discretización de elementos.

### Aproximación de una función

En las aplicaciones de ingeniería, somos colocados delante de situaciones donde la información se ha recogido mediante  $n$  pares de observaciones de las variables  $x$  y  $y$  para un conjunto de valores discretos de la variable  $x$ , pero además surge el interés de calcular a valor de la función  $f(x)$  para cualquier valor arbitrario de  $x$ , y nos conduce a buscar un procedimiento que permita obtener funciones de aproximación para los datos discretos, llamado de interpolación. Esta relación establecida para la correspondencia entre a variable y el valor de grandeza constituye un *modelo matemático* para la situación física en estudio.

Las funciones de forma desempeñan un papel esencial en el MEF ya que permiten en gran medida la exactitud con que se adaptan a las configuraciones del dominio antes y después para las previsiones de los valores de grandeza física en todo el intervalo en estudio (aproximar los valores de la función en todo el subdominio una vez conocidos los valores nodales). Las funciones de forma establecen las relaciones entre las coordenadas en los puntos interiores del elemento  $x,y,z$  y las coordenadas de los nodos del elemento  $X,Y,Z$  (trasladar el comportamiento a lo largo del elemento a los nodos) .

Para aproximar una función se pueden utilizar varios tipos de funciones tales como trigonométricas y polinómicas son una de las más usadas.

En el MEF son empleadas para las funciones de forma los *polinomios de Lagrange*.

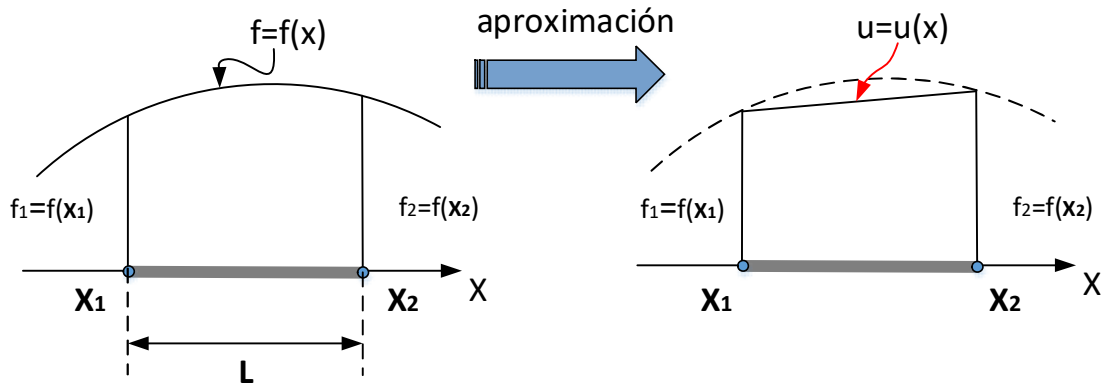


Figura 5.3 Aproximación de una función por un polinomio lineal.

Supongamos una función genérica  $f=f(x)$ , tal como se muestra en la fig 5.3. Esta puede aproximarse en el intervalo  $(x_1, x_2)$  mediante una función de interpolación lineal que define la recta que pasa por los puntos 1 y 2, cuya expresión puede definirse como:

$$f(x) \approx u(x) = \frac{x_2 - x}{l} f_1 + \frac{x - x_1}{l} f_2 = N_1(x)f_1 + N_2(x)f_2 \quad (5.1)$$

Donde  $f_1, f_2$  son valores conocidos de la función  $f(x)$  en los puntos  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente,  $N_1$  y  $N_2$  son las denominadas *funciones de forma*.

La función lineal  $u(x)$  entre los puntos  $x_1$  y  $x_2$  es asumida como:

$$u = a + bx \quad (5.2)$$

Sustituyendo las condiciones de frontera  $u(x_1) = f_1$  y  $u(x_2) = f_2$  obtenemos dos ecuaciones que pueden ser resueltas para  $a$  y  $b$ .

$$f_1 = a + bx_1 \quad (5.3)$$

$$f_2 = a + bx_2 \quad (5.4)$$

Resolviendo Ec (5.3) – (5.4)

$$b = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} ; \quad a = \frac{f_1 x_2 - f_2 x_1}{x_2 - x_1} \quad (5.5)$$

Sustituyendo en la Ec. (5.2)

$$u(x) = \frac{f_1 x_2 - f_2 x_1}{x_2 - x_1} + \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2} x \quad (5.6)$$

Reagrupando Ec. (5.6)

$$u(x) = \frac{x_2 - x}{l} f_1 + \frac{x - x_1}{l} f_2 \quad (5.7)$$

Las *funciones de forma* están vinculadas a cada nodo del elemento y deben cumplir varias condiciones (ver bibliografía G.R.Liu):

*Propiedad 1:* Ser linealmente independientes (esta propiedad es la base para las funciones tengan la función delta asociada);

*Propiedad 2:* El valor de la función de forma asociado a un nodo  $i$  es uno en ese nodo y cero en los demás. (función delta)

$$N_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \quad j = 1, 2, \dots, n_d \\ 0 & i \neq j, \quad j = 1, 2, \dots, n_d \end{cases} \quad (5.8)$$

Donde  $\delta_{ij}$  es la función *delta de Kronecker*.

*Propiedad 3:* La suma de las funciones de forma para un elemento es igual a 1 en todo el dominio (Partición de la propiedad de la unidad)

$$\sum_{i=1}^n N_i(x) = 1 \quad (5.9)$$

Como se muestra en la fig 5.4, alternativamente pueden se construir secuencias de funciones en la que la interpolación en cada orden es expresada a partir de la interpolación del orden anterior, son conocidas como funciones jerárquicas, su mayor ventaja es facilitar el refinamiento de malla de elementos por el aumento del orden de interpolación de cada elemento, así como facilitar el desarrollo de elementos con diferentes ordenes de interpolación en el dominio discreto.

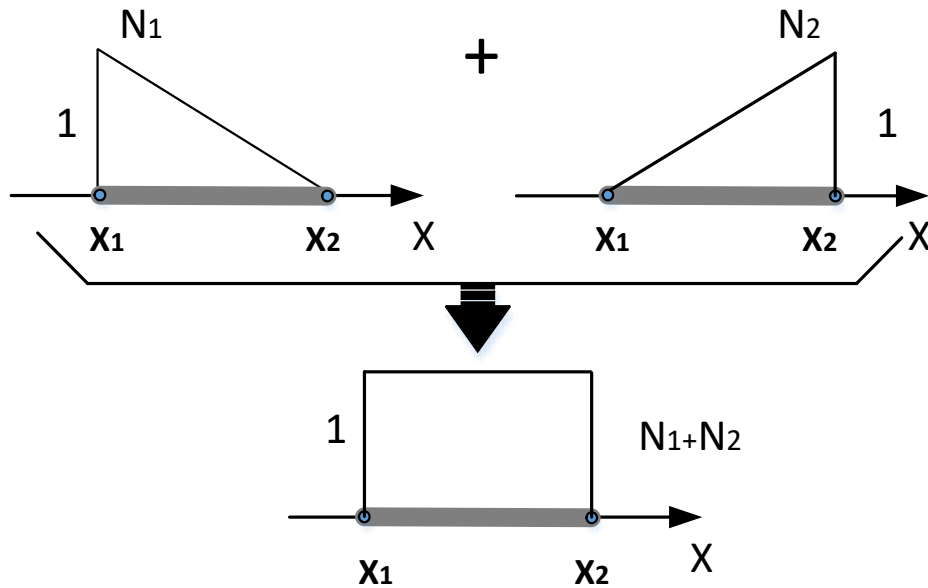


Figura 5.4 Condiciones que cumplen las funciones de forma. Caso lineal

*Nota:* Similar a las funciones de forma se emplean para aproximar una función incógnita, también se pueden emplear para aproximar la geometría. Para elementos unidimensionales al tomar unas funciones de forma lineales, la aproximación es exacta y viene dada por la Ec. (5.1).

## 2.1 Funciones de forma de Elementos Unidimensionales.

### Elemento lineal

Para el elemento lineal de tipo barra con 2 nodos y  $DOF=2$  grados de libertad, la función de aproximación es un polinomio lineal de grado  $(DOF-1)=1$  tal como se muestra en la fig 5.5

En general el número de coeficientes  $a$  es equivalente al total del número de los grados de libertad (DOF) asociados con el elemento.

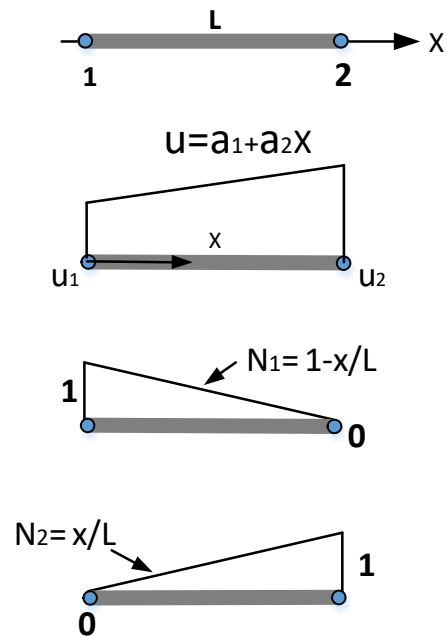


Figura 5.5 Elementos de tipo barra. Función de desplazamientos ( $u$ ) y función de forma ( $N$ ).

Considerando un simple elemento de tipo barra con 2 nodos como se muestra en la fig 5.5, usando un polinomio lineal para la función de desplazamiento como:

$$u(x) = C_0 + C_1x \quad (5.10)$$

Para propósitos de una representación computacional, vamos a representar la Ec (5.10) en forma matricial.

$$u(x) = [1 \quad x] \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \mathbf{p}(x)\mathbf{C} \quad (5.11)$$

Vamos a sustituir los valores de desplazamientos nodales conocidos en la función de interpolación definida en la Ec. (5.10), para  $x=x_1$  en el nodo 1 y para  $x=x_2$  en el nodo 2 del elemento.



$$\begin{cases} u(x_1) \equiv u_1 = C_0 + C_1 x_1 \\ u(x_2) \equiv u_2 = C_0 + C_1 x_2 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Donde recordando que  $\mathbf{u}_i$  es la matriz nodal para el elemento  $i$ . Despejando los coeficientes  $C_i$  en la Ec. (5.12).

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Sustituyendo la Ec. (5.13) en la Ec. (5.11) tenemos

$$[1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = u(x) \quad (5.14)$$

Agrupando como

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [1 \quad x] \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} = \mathbf{p}(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.15)$$

La matriz fila  $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = [\mathbf{N}_1(\mathbf{x}) \quad \mathbf{N}_2(\mathbf{x})]$  es llamada de matriz de las *funciones de forma*. Como hemos venido comentando la función de forma juega un papel central en el FEM; Las funciones de formas de varios órdenes y dimensiones permiten al FEM resolver problemas de muchos tipos con diferentes grados de precisión.

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = \left[ \frac{x}{x_1 - x_2} - \frac{x_2}{x_1 - x_2} \quad \frac{x}{x_2 - x_1} - \frac{x_1}{x_1 - x_2} \right] = \frac{1}{l} [x_2 - x \quad x - x_1] \quad (5.16)$$

En la Ec. (5.16) tenemos  $\mathbf{N}_1(\mathbf{x})$  y  $\mathbf{N}_2(\mathbf{x})$  las funciones de forma correspondiente a los nodos 1 y 2, respectivamente.

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \sum N_i u_i \quad (5.17)$$

Esta función de aproximación debe permitir el desplazamiento del cuerpo rígido y un estado de deformación constante dentro del elemento. Surge la siguiente pregunta la Ec. (5.10) satisface estos criterios? (nota: considerar  $u_1 = u_2$  para Ec. (5.16)).

Por lo tanto, el elemento de barra satisface el requisito de integridad, ya que tanto el desplazamiento como la deformación pueden tomar valores constantes independientemente del tamaño del elemento.

*Propone se realizar siguiendo la metodología propuesta obtener las funciones de forma para un elemento lineal de tipo barra con 3 nodos y  $DOF=3$  grados de libertad, con una función de aproximación de un polinomio de grado 2. (figura 5.6).*

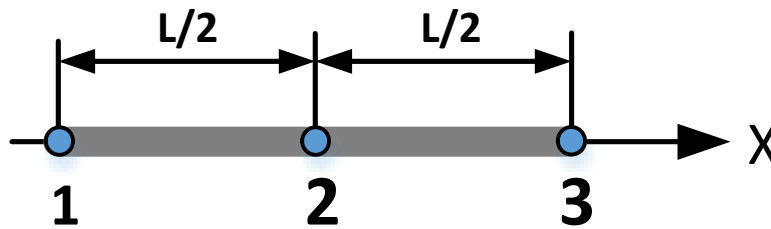


Figura 5.6 Elemento unidimensional cuadrático. El nodo 2 es un nodo interior.

### 3. Formulación de la función de forma para un elemento de tipo viga.

Reviendo la clase de la “formulación de elementos finitos tipo viga” vamos a obtener las funciones de forma como una *condición necesaria* para derivar la matriz de rigidez de elementos en general.

1. *Escoger la función de interpolación adecuada para el elemento a formular.*

Especificar la función de forma que defina la forma única el estado de desplazamientos en todos los puntos dentro del elemento, en función de los grados de libertad de los nodos. A función de interpolación debe tratar de representar el elemento deformado o lo más próximo posible de su comportamiento real.

Nota: La función polinomial debe tener un coeficiente desconocido por cada grado de libertad.

$$\langle \text{Elemento } DOF = 4 \rangle \rightarrow \langle \text{Polinomio de 4 coeficientes} \rangle \quad (5.18)$$

$$\langle \text{Polinomio cúbico} \rangle \therefore v(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (5.19)$$

Como expresa la Ec. (5.19) para cada posición de la viga dada por  $x$ , podemos calcular los desplazamientos  $v(x)$ , considerando solamente los desplazamientos en la dirección  $y$  considerando apenas la flexión de la viga en un plano.

Representando la Ec. (5.19) en notación matricial como:

$$v(x) = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{p}(x)\mathbf{C} \quad (5.20)$$

La inclinación de la viga punto a punto en la condición deformada es expresada por la primera derivada de los desplazamientos.

$$v(x)' = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 = \mathbf{p}(x)'\mathbf{C}' \quad (5.21)$$

Representado la Ec. (5.21) y Ec. (5.20) en notación matricial como:

$$\{\delta(x)\} = \begin{Bmatrix} v(x) \\ v(x)' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}(x) \\ \mathbf{p}(x)' \end{Bmatrix} [\mathbf{C}] \quad (5.22)$$

Con la Ec. (5.22) las funciones de interpolación para el elemento finito de viga están formulados, faltaría apenas determinar los coeficientes en función de los valores conocidos de los desplazamientos nodales.

2. *Calcular los coeficientes de las funciones de interpolación utilizando las relaciones de desplazamientos.*

Sustituir los valores de desplazamiento conocidos en las funciones de interpolación definidas Ec. (5.22).

$$\langle \text{Nodo 1} \rangle \rightarrow (x = 0) \rightarrow \begin{cases} v(x) = v(0) = v_1 = c_0 \\ v(x)' = v(0)' = v_1' = c_1 \end{cases} \quad (5.23)$$

$$\langle \text{Nodo 2} \rangle \rightarrow (x = L) \rightarrow \begin{cases} v(x) = v(L) = v_2 = c_0 + c_1L + c_2L^2 + c_3L^3 \\ v(x)' = v(L)' = v_2' = c_1 + 2c_2L + 3c_3L^2 \end{cases} \quad (5.24)$$

Nota: observar que las ecuaciones Ec. (5.23) -(5.24) nos definen 4 ecuaciones con 4 incógnitas consiguiendo determinar los coeficientes desconocidos.

Representando la Ec. (5.22) en notación matricial como:

$$\delta(x) = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_1' \\ v_2 \\ v_2' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

Despejando los coeficientes  $c_i$  en la Ec. (5.25)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \{\delta\} = \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

Sustituyendo en la Ec. (5.20) la Ec. (5.26) con  $\mathbf{p}(x)$  representando la matriz que contiene las variables.

$$v(x) = \mathbf{p}(x)\mathbf{C} = \mathbf{p}(x) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \{\delta\} \quad (5.27)$$

En la Ec.(5.27) sustituimos  $N(x) = \mathbf{p}(x)[\mathbf{A}]^{-1}$ , siendo  $[\mathbf{A}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}$

Reescribiendo la Ec. (5.27) como:

$$v(x) = [\mathbf{N}(x)]\{\delta\} \quad (5.28)$$

Donde

$v(x)$  : representa los desplazamientos dentro del elemento;

$\{\delta\}$  : desplazamientos nodales conocidos.

$[\mathbf{N}(x)]$  : Matriz de las funciones de forma

La matriz  $[\mathbf{N}(x)]$  permite pasar de los desplazamientos nodales para los desplazamientos dentro del elemento, definiendo la forma por la cual se establece la interpolación del campo de desplazamiento.

Todos los elementos finitos disponibles en cualquier programa traen consigo la *función de forma* que se propone para representar el comportamiento físico del elemento.

$$[\mathbf{N}(x)] = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.29)$$

$$[\mathbf{N}(x)] = \left[ \frac{2x^3}{l^3} - \frac{3x^2}{l^2} + 1 \quad \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \quad \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \quad \frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right] \quad (5.30)$$

#### 4. Normalización del espacio.

Para el empleo posterior de la función de forma dentro del MEF, es de gran interés práctico que el intervalo en el que se aproximan las funciones de formas este normalizado, el objetivo

de esta normalización es permitir que la integración numérica en el dominio del elemento pueda obtenerse fácilmente incluso cuando las funciones a integrar son complicadas.

*Nota:* Con la geometría normalizada siempre se emplean los mismos puntos de integración y los mismos pesos. El intervalo más usado para el espacio normalizado es de  $[-1,1]$ , que será utilizado como referencia.

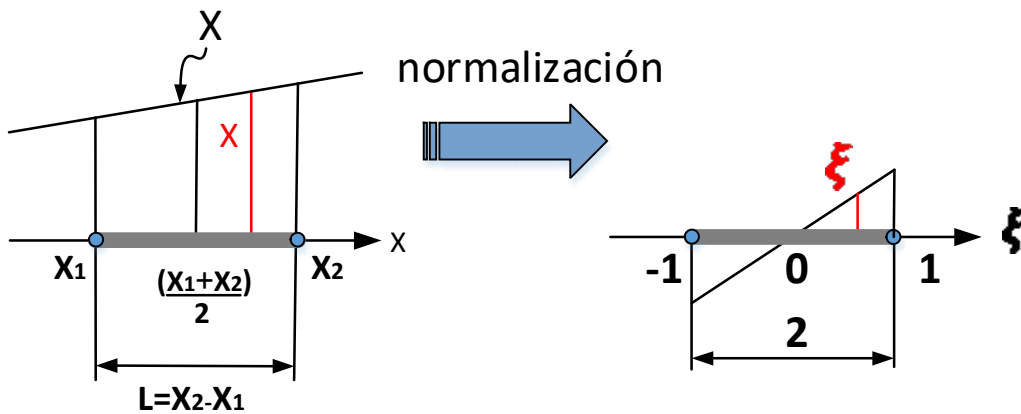


Figura 5.7 Normalización del espacio para las funciones de formas.

En la fig 5.7, se muestra un segmento de recta en el intervalo  $[x_1, x_2]$  y uno normalizado en el intervalo  $[-1,1]$ . Aplicando semejanza se tiene:

$$\frac{\xi - (-1)}{x - x_1} = \frac{2}{x_2 - x_1} \quad (5.31)$$

Agrupando e despejando la función normalizada  $x(\xi)$  como:

$$x(\xi) = \frac{x_1(1 - \xi)}{2} + \frac{x_2(1 + \xi)}{2} = N_1(\xi)x_1 + N_2(\xi)x_2 \quad (5.32)$$

La Ec. (5.32) expresa las funciones de forma son ahora función de la coordenada natural  $\xi$ .

El procedimiento anterior para obtener las funciones de formas de  $n$  puntos se utiliza el **Polinomio de Lagrange** de grado  $n$ , que viene dado por la siguiente ecuación:

$$L(x) = \sum_{j=0}^k y_j l_j(x) \quad (5.33)$$

Donde

$$l_j(x) = \prod_{i=0, i \neq j}^k \frac{x - x_i}{x_j - x_i} = \frac{x - x_0}{x_j - x_0} \dots \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} \dots \frac{x - x_k}{x_j - x_k} \quad (5.34)$$

Reescribiendo la Ec. (5.32) en coordenadas naturales para una función de forma del tipo polinomio de Lagrange (n-1) como:

$$N_i^{(n-1)}(\xi) = \prod_{j=1(j \neq i)}^n \left( \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad (5.35)$$

A continuación, expondremos las funciones de formas para diferentes elementos en coordenadas naturales más empleadas desde una perspectiva más práctica.

*Nota:* Para un mismo problema se pueden manejar funciones de formas diferentes para la geometría y para la función incógnita, lo más común es utilizar las mismas, en el caso de utilizar las mismas funciones los elementos de discretización se denominan Elementos Isoparamétricos.

## 5. Funciones de forma mediante el polinomio interpolador en la forma de Lagrange

Retomando la Ec. (5.16) obtenida para un elemento lineal con 2 nodos y DOF=2, se tiene n=2, y por tanto la función de aproximación es un polinomio de grado (n-1). Utilizando el polinomio de Lagrange Ec. (5.35) se obtiene como:

$$\text{Para } i = 1; i \neq j: N_1^{(1)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \right) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.36)$$

$$\text{Para } i = 2 ; i \neq j: \quad N_2^{(1)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \right) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.37)$$

*Nota: Podemos conferir que los resultados obtenidos Ec. (5.36) -(5.37) son las mismas funciones obtenidas en la Ec. (5.32).*

Se puede verificar que las funciones de forma obtenidas Ec. (5.36) -(5.37) satisfacen las propiedades exigidas Ec. (5.8) -(5.9).

$$\text{Propiedad 1: } \begin{cases} N_1^{(1)}(\xi = -1) = 1; & N_1^{(1)}(\xi = 1) = 0 \\ N_2^{(1)}(\xi = -1) = 0; & N_2^{(1)}(\xi = 1) = 1 \end{cases} \quad (5.38)$$

$$\text{Propiedad 2: } N_1^{(1)}(\xi) + N_2^{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) + \frac{1}{2}(1 + \xi) = 1 \quad (5.39)$$

### **Funciones de forma para el elemento cuadrático.**

Como visto anteriormente también se pueden determinar las funciones de forma para el elemento unidimensional cuadrático, que se representa en la fig 5.8. En este caso el polinomio Lagrange cuadrático (n-1=2) Ec. (5.35) se obtiene como:

$$N_i^{(2)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_i - \xi_1} \cdot \frac{\xi - \xi_2}{\xi_i - \xi_2} \cdot \frac{\xi - \xi_3}{\xi_i - \xi_3} \right); \quad i = 1,2,3. \quad (5.40)$$

Evaluando para  $i = 1,2,3$  ;

$$N_1^{(2)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \cdot \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \right) = \frac{(\xi - 0)(\xi - 1)}{[(-1) - 0][(-1) - 1]} = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1) \quad (5.41)$$

$$N_2^{(2)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \cdot \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \right) = \frac{[\xi - (-1)][\xi - 1]}{[0 - (-1)][0 - 1]} = (1 - \xi)(1 + \xi) = (1 - \xi^2) \quad (5.42)$$



$$N_3^{(2)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_3 - \xi_1} \cdot \frac{\xi - \xi_2}{\xi_3 - \xi_2} \right) = \frac{[\xi - (-1)][\xi - 0]}{[1 - (-1)][1 - 0]} = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1) \quad (5.43)$$

Se puede verificar que las funciones de forma obtenidas Ec. (5.41) -(5.43) satisfacen las propiedades exigidas Ec. (5.8) -(5.9), que su valor es 1 en el nodo correspondiente, 0 en los demás y además su suma es 1 en toda la longitud del elemento.

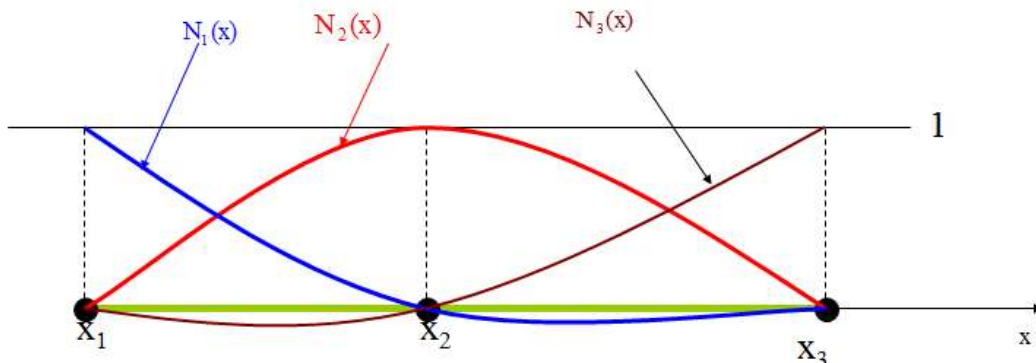


Figura 5.8. Funcion de forma para un elemento cuadrático

### Funciones de forma para elementos bidimensionales mediante el polinomio de Lagrange.

Las funciones de formas para el elemento rectangular bidimensional se pueden obtener mediante el producto de las funciones de formas unidimensionales asociadas a cada una de las direcciones  $\xi$  y  $\eta$ , fig 5.9. Dado que utilizaremos polinomios de Lagrange para obtenerlas, los elementos se denominan *Elementos Lagrangeanos*.

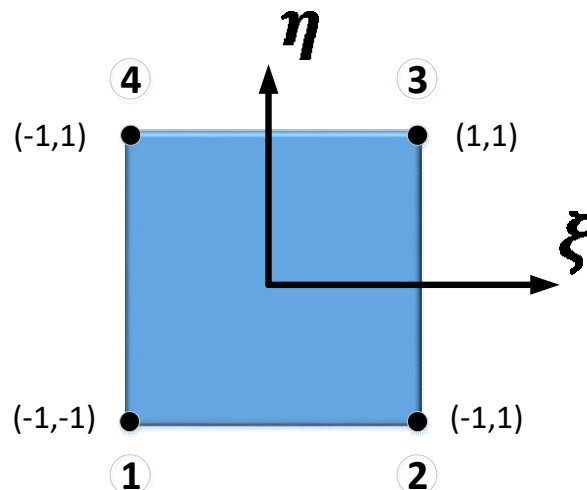
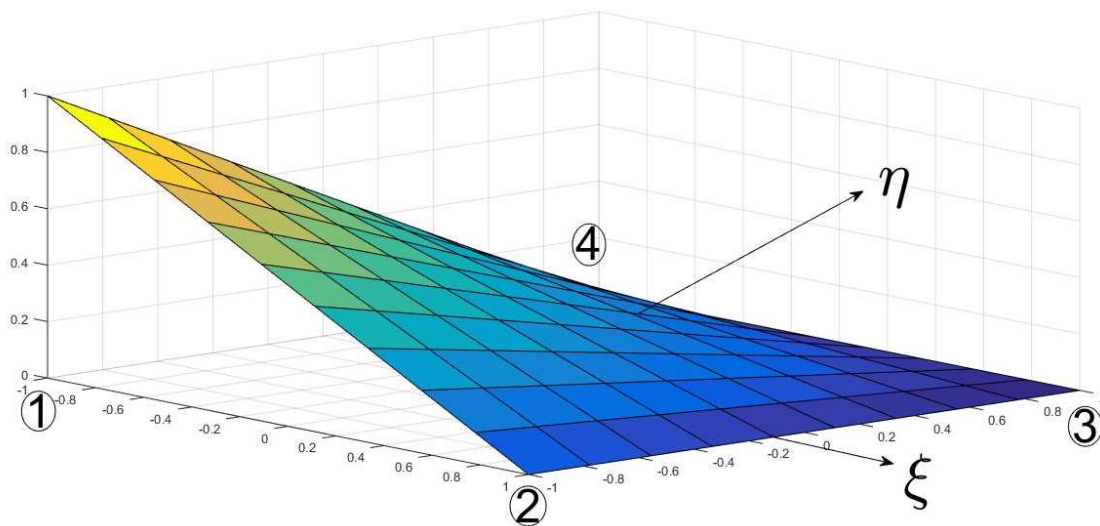


Figura 5.9 Elemento bidimensional de 4 nodo con funciones de forma lineales.

Si se emplean funciones de forma lineal en cada dirección, se obtienen las funciones de formas del elemento rectangular lineal. El elemento fig 5.9 necesita de 4 puntos para estar definido.

Para el nodo 1, la función de forma se obtiene a partir de la función de forma unidimensional según la dirección  $\xi$ , formada por el polinomio de Lagrange con los nodos 1 y 2 y multiplicada por la función de forma según la dirección  $\eta$ , formada por el polinomio de Lagrange que pasa entre los nodos 1 y 4. En la fig 5.10 se muestra la función de forma  $N_1(\xi, \eta)$

$$N_1(\xi, \eta) = N_1^{(1)}(\xi)N_1^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \quad (5.44)$$



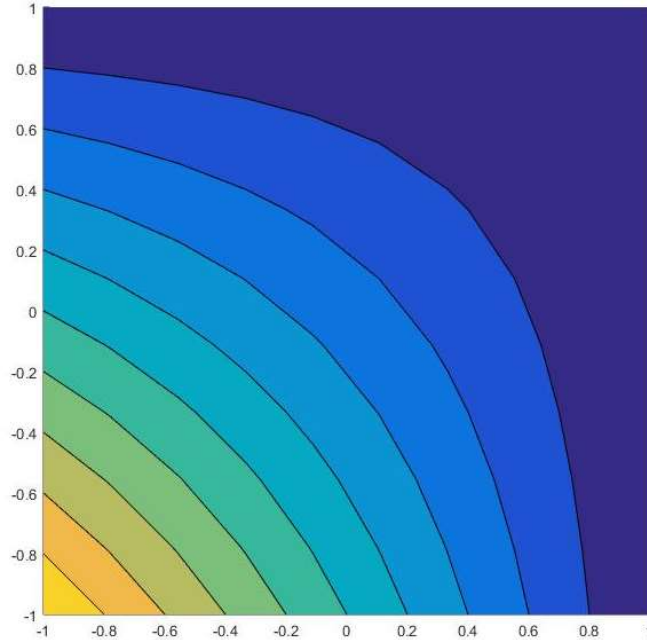


Figura 5.10 Función de forma  $N_1(\xi, \eta)$  del elemento rectangular de 4 nodos.

Como anteriormente Ec. (5.36)

$$N_1^{(1)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \right) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.45)$$

$$N_1^{(1)}(\eta) = \left( \frac{\eta - \eta_2}{\eta_1 - \eta_2} \right) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (5.46)$$

Para el nodo 2, se usa la combinación del polinomio de Lagrange según la dirección  $\xi$ , formado por los nodos 1 y 2, y multiplicada por la función de forma según la dirección  $\eta$ , formada por el polinomio de Lagrange que pasa entre los nodos 2 y 3 como:

$$N_2(\xi, \eta) = N_2^{(1)}(\xi)N_2^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \quad (5.47)$$

Como anteriormente Ec. (5.36)

$$N_2^{(1)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \right) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.48)$$

$$N_2^{(1)}(\eta) = \left( \frac{\eta - \eta_3}{\eta_2 - \eta_3} \right) = \frac{1}{2}(1 - \eta) \quad (5.49)$$

Para el nodo 3, se usa la combinación del polinomio de Lagrange según la dirección  $\xi$ , formado por los nodos 2 y 3, y multiplicada por la función de forma según la dirección  $\eta$ , formada por el polinomio de Lagrange que pasa entre los nodos 3 y 4 como:

$$N_3(\xi, \eta) = N_2^{(1)}(\xi)N_2^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (5.50)$$

Como anteriormente Ec. (5.36)

$$N_3^{(1)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_4}{\xi_3 - \xi_4} \right) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (5.51)$$

$$N_3^{(1)}(\eta) = \left( \frac{\eta - \eta_2}{\eta_3 - \eta_2} \right) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (5.52)$$

Para el nodo 4, se usa la combinación del polinomio de Lagrange según la dirección  $\xi$ , formado por los nodos 3 y 4, y multiplicada por la función de forma según la dirección  $\eta$ , formada por el polinomio de Lagrange que pasa entre los nodos 1 y 4 como:

$$N_4(\xi, \eta) = N_4^{(1)}(\xi)N_4^{(1)}(\eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \quad (5.53)$$

Como anteriormente Ec. (5.36)

$$N_4^{(1)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_3}{\xi_4 - \xi_3} \right) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (5.54)$$

$$N_4^{(1)}(\eta) = \left( \frac{\eta - \eta_1}{\eta_4 - \eta_1} \right) = \frac{1}{2}(1 + \eta) \quad (5.55)$$

*Nota: Podemos comprobar que igual la suma de las funciones de formas vale 1 en su nodo asociado y cero en los demás, y su suma en todo el dominio del elemento vale 1 como:*

$$N_1(\xi, \eta) + N_2(\xi, \eta) + N_3(\xi, \eta) + N_4(\xi, \eta) = 1. \quad (5.56)$$

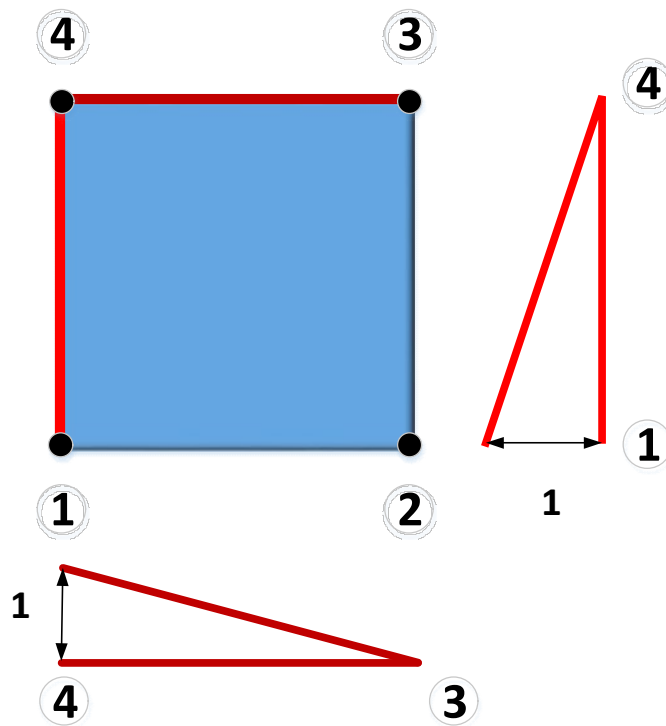


Figura 5.11 Función de forma para el nodo 4.

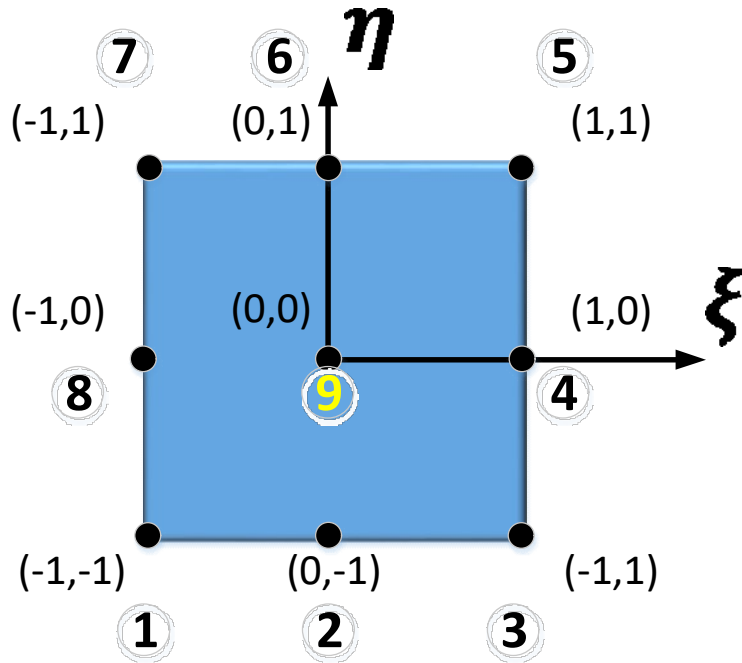


Figura 5.12 Elemento bidimensional de 9 nodos con funciones de forma cuadráticas.

### Funciones de forma para el elemento rectangular de 9 nodos.

El elemento bidimensional de 9 nodos tiene 3 nodos en cada dirección, fig 5.12. Para la obtención de las funciones de formar se utiliza el polinomio de Lagrange de grado 2 según las direcciones  $\xi$  y  $\eta$ .

Para la función de forma del nodo 1 según la dirección  $\xi$  formada por los nodos 1,2 y 3, y multiplicada por la función de forma según la dirección  $\eta$ , formada por los nodos 1, 8 y 7, como anteriormente Ec. (5.36):

$$N_1^{(2)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} \right) \cdot \left( \frac{\xi - \xi_3}{\xi_1 - \xi_3} \right) = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1) \quad (5.57)$$

$$N_1^{(2)}(\eta) = \left( \frac{\eta - \eta_8}{\eta_1 - \eta_8} \right) \cdot \left( \frac{\eta - \eta_7}{\eta_1 - \eta_7} \right) = \frac{1}{2} \eta(\eta - 1) \quad (5.58)$$

Evaluando para la función  $N_1(\xi, \eta)$  tenemos

$$N_1(\xi, \eta) = N_1^{(2)}(\xi)N_1^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(\eta - 1) \quad (5.59)$$

En la fig 5.13 se muestra la función de forma  $N_1(\xi, \eta)$ .

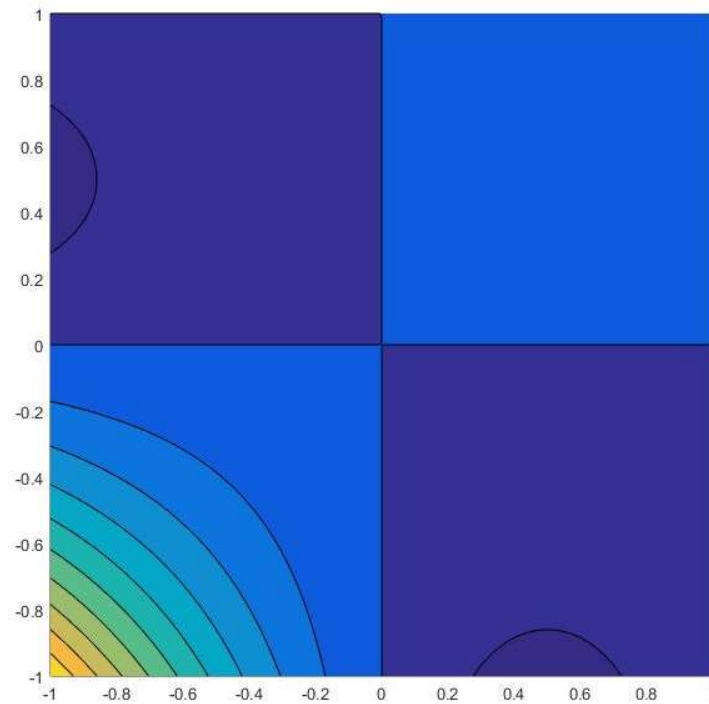
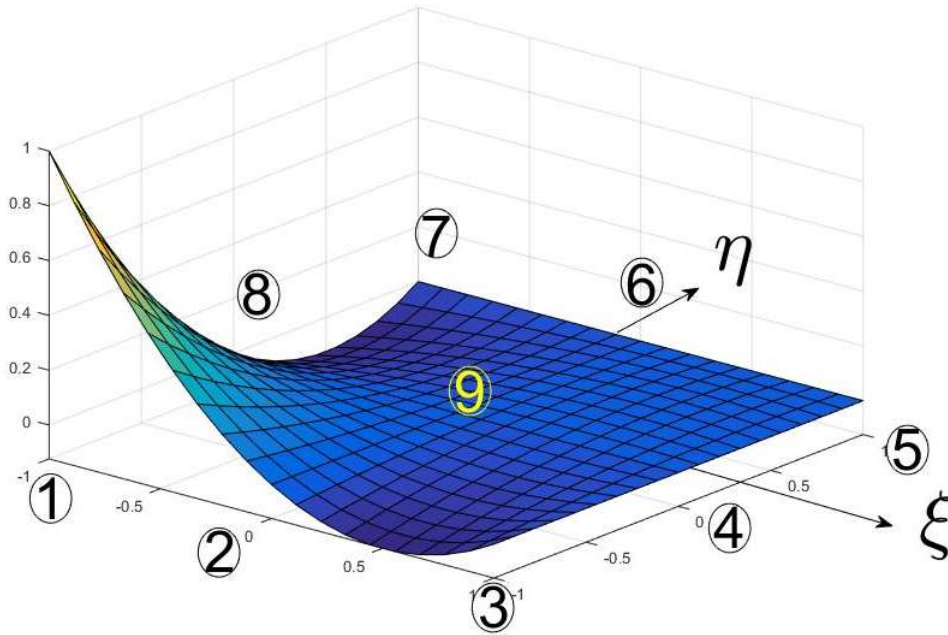


Figura 5.13 Función de forma  $N_1(\xi, \eta)$  del elemento bidimensional de 9 nodos.

Para el nodo 2, se usa la combinación del polinomio de Lagrange según la dirección  $\xi$ , formado por los nodos 1, 2 y 3, multiplicada por la función de forma según la dirección  $\eta$ , formada por el polinomio que pasa entre los nodos 2, 9 y 3 como:

$$N_2(\xi, \eta) = N_2^{(2)}(\xi)N_2^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2}\eta(1 - \xi^2)(\eta - 1) \quad (5.60)$$

Como anteriormente Ec. (5.36)

$$N_2^{(2)}(\xi) = \left( \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} \right) \cdot \left( \frac{\xi - \xi_3}{\xi_2 - \xi_3} \right) = (1 - \xi^2) \quad (5.61)$$

$$N_2^{(2)}(\eta) = \left( \frac{\eta - \eta_9}{\eta_2 - \eta_9} \right) \cdot \left( \frac{\eta - \eta_6}{\eta_2 - \eta_6} \right) = \frac{\eta}{2}(1 - \eta) \quad (5.62)$$

Siguiendo el método anterior, se pueden obtener todas las funciones de forma como:

$$N_3(\xi, \eta) = N_3^{(2)}(\xi)N_3^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(\eta - 1) \quad (5.63)$$

$$N_4(\xi, \eta) = N_4^{(2)}(\xi)N_4^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2}\xi(1 + \xi)(1 - \eta^2) \quad (5.64)$$

$$N_5(\xi, \eta) = N_5^{(2)}(\xi)N_5^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(1 + \xi)(1 + \eta) \quad (5.65)$$

$$N_6(\xi, \eta) = N_6^{(2)}(\xi)N_6^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2}\eta(1 + \xi^2)(1 + \eta) \quad (5.66)$$



$$N_7(\xi, \eta) = N_7^{(2)}(\xi)N_7^{(2)}(\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta(\xi - 1)(1 + \eta) \quad (5.67)$$

$$N_8(\xi, \eta) = N_8^{(2)}(\xi)N_8^{(2)}(\eta) = \frac{1}{2}\xi(\xi - 1)(1 - \eta^2) \quad (5.68)$$

$$N_9(\xi, \eta) = N_9^{(2)}(\xi)N_9^{(2)}(\eta) = (1 + \xi^2)(1 - \eta^2) \quad (5.69)$$

*Nota:* Podemos comprobar que igual la suma de las funciones de formas  $\sum_i^9 N_i(\xi, \eta)$  vale 1 en su nodo asociado y cero en los demás, y su suma en todo el dominio del elemento vale 1.

## **6. Derivación de la matriz de rigidez mediante sus funciones de forma para el elemento de tipo viga.**

Anteriormente quedo establecida la Ec. (5.28), y las funciones de forma para un elemento de tipo viga, a continuación, vamos a hacer uso de estas funciones de forma para calcular las deformaciones internas a partir de los desplazamientos nodales. De la revisión de la teoría de viga Clase 4, sabemos que las deformaciones por flexión están asociadas a la curvatura presentada por la viga a lo larga de su longitud como:

$$Curvatura = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} = \frac{d^2y}{dx^2} = v''(x) \quad (5.70)$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = \frac{M}{EI} \cdot y = y \cdot v''(x) \quad (5.71)$$

Derivando la Ec. (5.21) calculamos  $v''(x)$  como:

$$v(x)'' = 2c_2 + 6c_3x \quad (5.72)$$

Representado la Ec. (5.72) en notación matricial como:

$$v(x)'' = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x] \begin{Bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{p}(x)\mathbf{C} \quad (5.73)$$

En la Ec. (5.27) tenemos  $\mathbf{C} = [\mathbf{A}]^{-1}\{\delta\}$

$$v(x)'' = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x][\mathbf{A}]^{-1}\{\delta\} \quad (5.74)$$

En la Ec. (5.74) sustituimos  $\mathbf{B}(x) = \mathbf{p}(x)[\mathbf{A}]^{-1}$ ,

Reescribiendo la Ec. (5.74) como:

$$v(x)'' = [\mathbf{B}(x)]\{\delta\} \quad (5.75)$$

Donde

$v(x)''$  : representa las deformaciones dentro del elemento; ver Ec. (5.71).

$\{\delta\}$  : desplazamientos nodales conocidos.

$[\mathbf{B}(x)]$  : Matriz que permite relacionar los campos de desplazamientos nodales con los campos de deformaciones dentro del elemento y es llamado de *Matriz Desplazamiento-Deformación*.

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{p}(x)[\mathbf{A}]^{-1} = \left[ \left( \frac{12x}{l^3} - \frac{6}{l^2} \right) \quad \left( \frac{6x}{l^2} - \frac{4}{l} \right) \quad \left( \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) \quad \left( \frac{6x}{l^2} - \frac{2}{l} \right) \right] \quad (5.76)$$

La *Matriz Desplazamiento-Deformación* de un elemento finito constituye otro de los conceptos importantes teóricos para la formulación de su matriz de rigidez. En las bibliotecas de elementos de los programas para análisis del MEF están disponibles la *Matriz Desplazamiento-Deformación* que se propone para representar comportamiento físico del elemento, o sea, el modelo matemático para el cálculo de las deformaciones en el dominio del elemento. La *Matriz Desplazamiento-Deformación* estará presente en la expresión general de la formulación de la Matriz de Rigidez de cualquier elemento finito.

### **Determinación de las tensiones en el elemento a partir de los desplazamientos nodales.**

El momento flector para el elemento viga puede ser calculado a partir de los desplazamientos nodales, utilizando las Ec. (5.70) -(5.71) como:

$$M(x) = EI \cdot v(x)'' = EI \cdot [B(x)]\{\delta\} \quad (5.77)$$

La Ec. (5.77) permite calcular las fuerzas internas dentro del elemento a partir de los desplazamientos nodales, y la tensión a lo largo de una sección transversal localizada en una posición  $x$  como:

$$\sigma = \frac{M(x)}{I} \cdot y \quad (5.78)$$

### **Derivación de la matriz de rigidez del elemento utilizando la relación entre fuerzas y desplazamientos nodales para el elemento.**

Los pasos anteriores se pueden generalizar para determinar los desplazamientos, deformaciones, fuerzas internas y las tensiones dentro del elemento. Para ello, es necesario conocer los desplazamientos nodales que son determinados a partir de la matriz de rigidez de la Estructura y la carga. En los elementos finitos más simples (clases anteriores) utilizamos el *método de rigidez directa* y el conocimiento de la teoría de resistencia de materiales, Sin embargo, para otros tipos de elementos finitos más complejos este procedimiento sería impracticable. Para la derivación de la matriz de rigidez utilizaremos los conceptos de trabajo y energía de deformación, expuestos en la **clase 5**.

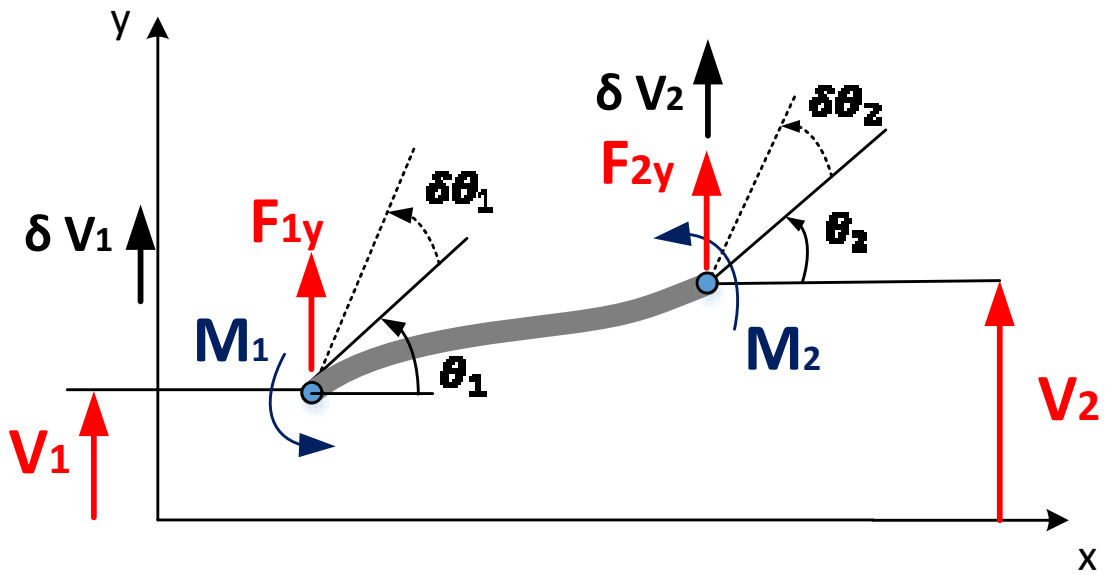


Figura 5.14 Elemento de tipo viga para una condición de equilibrio y se considera los desplazamientos virtuales que se obtienen al incremental en forma positiva el ángulo  $\theta$  y desplazamiento  $v$ .

El PTV Ec. (4.5) será utilizado para establecer las condiciones de equivalencia entre las fuerzas internas actuantes en el elemento y las fuerzas nodales estáticamente equivalentes, fig 5.14.

$$W_e = W_i \quad (5.79)$$

El trabajo virtual externo  $W_e$  puede ser representado según la fig 5.14 como:

$$W_e = F_{1y} \cdot \delta V_1 + M_1 \cdot \delta \theta_1 + F_{2y} \cdot \delta V_2 + M_2 \cdot \delta \theta_2 \quad (5.80)$$

Reescribiendo en forma matricial como:

$$W_e = [\delta V_1 \quad \delta \theta_1 \quad \delta V_2 \quad \delta \theta_2] \begin{Bmatrix} F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \{\delta^v\}^T \cdot \{f\} \quad (5.81)$$

El trabajo virtual interno  $W_i$  para una longitud  $dx$  del elemento producto de un momento flector en el tramo como:

$$dW_i = M \cdot d\theta \quad (5.82)$$

El trabajo total a lo largo del elemento considerando un intervalo de  $x=0$  hasta  $x=L$ , como:

$$W_i = \int_0^L M \cdot d\theta \quad (5.83)$$

Recordando que

$$\theta(x) = \frac{dv(x)}{dx} \therefore \frac{d\theta(x)}{dx} = \frac{d^2v(x)}{d^2x} = d\theta(x) = v(x)'' \cdot dx \quad (5.84)$$

Reescribiendo la Ec. (5.83) como:

$$W_i = \int_0^L M \cdot d\theta = \int_0^L [v''(x)^v]^T \cdot M(x) \cdot dx \quad (5.85)$$

La curvatura virtual es impuesta indirectamente, será asociada a los desplazamientos nodales virtuales por medio de la *Matriz Desplazamiento-Deformación* como:

$$\{v''(x)^v\}^T = ([\mathbf{B}(x)]\{\delta^v\})^T = \{\delta^v\}^T \cdot [\mathbf{B}(x)]^T \quad (5.86)$$

Como  $M(x)$  está dado Ec. (5.77) sustituimos todo.

$$W_i = \int_0^L \{\delta^v\}^T \cdot [\mathbf{B}(x)]^T \cdot EI \cdot v(x)'' dx = \int_0^L \{\delta^v\}^T \cdot [\mathbf{B}(x)]^T \cdot EI \cdot [\mathbf{B}(x)]\{\delta\} dx \quad (5.87)$$

Aplicando PTV con la Ec. (5.79), como los desplazamientos virtuales impuestos son arbitrarios vamos a escoger esos desplazamientos con el valor unitario.

$$\{f\} = \left[ \int_0^L [\mathbf{B}(x)]^T \cdot EI \cdot [\mathbf{B}(x)] dx \right] \cdot \{\delta\} \quad (5.88)$$

Donde

$\{f\}$  : representa las fuerzas nodales en el elemento.

$\{\delta\}$  : desplazamientos nodales.

$\left[ \int_0^L [\mathbf{B}(x)]^T \cdot EI \cdot [\mathbf{B}(x)] dx \right]$  : *Matriz de rigidez del elemento*, la integración de la expresión matricial puede ser realizada después de efectuar las multiplicaciones.

Sustituyendo y calculando la integral para obtener la *Matriz de rigidez del elemento* resulta como:

$$\left[ \int_0^L [\mathbf{B}(x)]^T \cdot EI \cdot [\mathbf{B}(x)] dx \right] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} = [\mathbf{k}^e] \quad (5.89)$$

El resultado de la Ec. (5.89) es la misma matriz de rigidez que resultado del estudio del elemento de viga.

*Propone se pensar:* Si la aplicación del método de rigidez directo aplicado a elemento de tipo viga permitió calcular la matriz de rigidez del elemento y el procedimiento aproximado por intermedio de las funciones de forma permitió obtener exactamente la misma matriz de rigidez.

*¿Cuál sería la necesidad de utilizar este último procedimiento general para derivar la matriz de rigidez de cualquier elemento.?*

La Ec. (5.89) fue desarrollada para el elemento de tipo de viga para generalizar la ecuación para el cálculo de cualquier tipo de elemento finito como:

$$[k^e] = \int_{vol} [B(x)]^T \cdot [D] \cdot [B(x)] dVol \quad (5.90)$$

Donde

[D]: Matriz de Elasticidad, su dimensión estará definida por el número de componentes de tensión y deformación que caracterizan el estado de tensión en un punto del elemento.

*Nota: El cálculo de la integral de Ec. (5.90) será efectuada por procedimiento numéricos adoptándose un número mayor o menor de puntos de integración, en consecuencia, el número de puntos de integración afecta la precisión con que será evaluada la integral y la rigidez del elemento. Esta característica en conjunto con la aproximación de las funciones de formas seleccionada, relevan el carácter aproximado del Método de Elemento Finitos.*