

Instituto de Estructuras y Transporte
Prof. Julio Ricaldoni

Apuntes del curso

Elementos Finitos

Presentación

Estos apuntes han sido preparados con el objetivo de introducir los conceptos más relevantes del método de elementos finitos a alumnos de grado de la carrera de Ingeniería Físico-Matemática. Entre los conocimientos previos necesarios para una lectura provechosa de estos apuntes están: los incluidos en los cursos básicos de cálculo de nivel universitario, especialmente aquellos sobre diferenciación e integración de funciones de una y varias variables; los incluidos en cursos de álgebra lineal, en particular sobre las transformaciones lineales en espacios vectoriales de dimensión finita; y los incluidos en cursos básicos de física, siendo particularmente importante tener una buena comprensión de la mecánica newtoniana de sistemas de partículas. También puede ser útil para el alumno haber realizado un primer curso de métodos numéricos. Esto último sin embargo no es absolutamente necesario. Con el objetivo de que puedan servir de repaso o referencia, el primer capítulo contiene una lista de las definiciones y resultados matemáticos más utilizados.

Los apuntes están divididos en ocho capítulos: el primero expone brevemente las herramientas de álgebra lineal y de análisis matemático con las cuales contamos en el espacio euclidiano tridimensional. Con el fin de facilitar la lectura, los resultados más conocidos son presentados sin demostración.

En el segundo capítulo se estudia un sistema simple, compuesto por una masa y un resorte, con la finalidad de recordar muchos de los conceptos básicos que serán aplicados en los problemas más complejos tratados en los siguientes capítulos. Entre esos conceptos se destacan las diferentes formulaciones del equilibrio de un sistema mecánico.

El tercer capítulo considera un problema físico muy simple: el problema de elasticidad lineal unidimensional. El mismo consiste en una barra compuesta por un material elástico lineal que se deforma bajo la acción de cargas externas que actúan en la dirección del eje de la misma. Si bien es un problema muy sencillo, sirve perfectamente como modelo para introducir el método de elementos finitos. En particular permite introducir la formulación variacional (también llamada débil), la cual es la base del método numérico más utilizado en la solución de problemas prácticos en ingeniería: el método de elementos finitos.

El cuarto capítulo introduce el método de Rayleigh-Ritz, el cual permite establecer, en un marco muy general, propiedades importantes que tendrá el método de elementos finitos.

El quinto capítulo es dedicado a introducir el método de elementos finitos. El mismo es visto como una implementación particular del método de Rayleigh-Ritz, el cual se distingue por la base utilizada de funciones de representación de la solución aproximada. Algunos detalles de implementación del método son presentados también en este capítulo. En particular se introduce la ecuación del elemento finito, el montaje del sistema global y su reducción.

En el sexto capítulo se presenta el método de elementos finitos para la solución del problema dinámico de elasticidad lineal. Para ello se utiliza el procedimiento de semidiscretización, el cual conduce a la formulación del problema como un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con condiciones iniciales. El capítulo describe cómo obtener los modos y frecuencias naturales del problema, y cómo utilizar el método de Newmark para la solución numérica del problema general.

En el séptimo capítulo se describe el problema de la viga de Euler-Bernoulli, y su solución por el método de elementos finitos. Este problema es interesante puesto que exige la utilización de una base de funciones con la primera derivada espacial continua, para lo cual se utilizan las funciones de forma cúbicas de Hermite.

Finalmente, el octavo capítulo considera el problema de conducción de calor en un cuerpo tridimensional. Una vez que la formulación variacional del problema es obtenida, se pasa a considerar el problema plano, para así introducir más fácilmente el método de elementos finitos, el cual no tiene mayores diferencias en los casos plano y tridimensional. En el capítulo se describe cómo resolver el problema estacionario, así como el problema dinámico general, para el cual se aplica el método trapezoidal generalizado.

Información bibliográfica de los materiales utilizadas en la preparación de estos apuntes es incluida al final de los mismos. Como complemento del primer capítulo se recomiendan los libros [1-6]. Para la presentación de los problemas físicos considerados y el método de elementos finitos se consideraron los libros [7-12].

Finalmente, se indica que estos apuntes no contienen algunos temas habitualmente presentes en libros de elementos finitos, o no los contiene con la misma profundidad. Estos apuntes están en permanente evolución, por lo cual se recomienda estar atentos a posibles errores. Para reportar errores, realizar sugerencias, o contribuir de alguna manera con estos apuntes, se agradece que se contacte al autor a través del email acanelas@fing.edu.uy (Alfredo Canelas).

Contenidos

1	Análisis vectorial	1
1.1	Espacios vectoriales	1
1.2	Transformaciones lineales	6
1.3	Espacio vectorial \mathcal{V}^3	10
1.4	Espacio euclidiano tridimensional	13
1.5	Cálculo diferencial vectorial	15
1.6	Cálculo integral vectorial	23
1.7	Cálculo variacional	27
2	Mecánica variacional	39
2.1	Leyes de Newton	39
2.2	Sistema masa-resorte	40
2.2.1	Vibraciones naturales.	41
2.2.2	Potencia y trabajo	42
2.3	Diferentes formulaciones del equilibrio	44
2.3.1	Balance de fuerzas	44
2.3.2	Balance de trabajo virtual	45
2.3.3	Energía potencial total mínima o estacionaria.	47
3	Elasticidad lineal unidimensional	49
3.1	Equilibrio	49
3.2	Deformaciones	51
3.3	Ecuación constitutiva.	51
3.4	Problema de elasticidad lineal	52
3.4.1	Ecuación de Navier	53
3.4.2	Teorema del trabajo virtual.	53
3.4.3	Formulación variacional en desplazamientos	54
3.4.4	Teorema de la mínima energía potencial total.	58
4	Método de Rayleigh-Ritz	61
4.1	Propiedades del sistema lineal	62
4.2	Propiedades de la solución de Rayleigh-Ritz	63
5	Método de elementos finitos	67
5.1	Discretización de elementos finitos	67
5.2	Implementación del método	69
5.2.1	Ecuación del elemento finito	70
5.2.2	Montaje de la ecuación global	72
5.2.3	Elemento isoparamétrico lineal	74

5.2.4	Otros elementos isoparamétricos de tipo C^0	76
5.2.5	Integración numérica	77
6	Análisis dinámico y de vibraciones	79
6.1	Ecuación de balance de cantidad de movimiento lineal	79
6.2	Problema dinámico de elasticidad lineal.	80
6.2.1	Ecuación del movimiento del problema	81
6.2.2	Modos y frecuencias naturales de vibración	81
6.2.3	Formulación variacional en desplazamientos	83
6.3	Elementos finitos: método de semidiscretización	85
6.3.1	Ecuación del elemento finito	88
6.3.2	Modos y frecuencias naturales de la ecuación semidiscreta	89
6.3.3	Solución del problema dinámico por el método de Newmark	90
7	Viga de Euler-Bernoulli	93
7.1	Equilibrio	93
7.2	Deformaciones	95
7.3	Ecuación constitutiva	95
7.4	Problema de la viga de Euler-Bernoulli	96
7.4.1	Teorema del trabajo virtual	96
7.4.2	Formulación variacional en desplazamientos	97
7.5	Solución por el método de elementos finitos	99
7.5.1	Ecuación del elemento finito	101
7.5.2	Montaje de la ecuación global	103
8	Conducción de calor	105
8.1	Ecuación puntual de balance de energía térmica	105
8.2	Expresiones constitutivas	107
8.3	Problema estacionario de conducción de calor	107
8.4	Formulación variacional en la temperatura.	109
8.5	Formulación de optimización	111
8.6	Método de elementos finitos	112
8.6.1	Elementos de referencia	113
8.6.2	Ecuación del elemento finito	117
8.6.3	Montaje de la ecuación global	119
8.6.4	Integración numérica	120
8.6.5	Condiciones de convergencia.	121
8.6.6	Elementos isoparamétricos de tipo C^0	125
8.7	Problema dinámico de conducción de calor	128
8.8	Formulación variacional del problema dinámico	129
8.9	Elementos finitos: método de semidiscretización	130
8.9.1	Ecuación del elemento finito	130
8.9.2	Montaje de la ecuación global	131
8.9.3	Resolución por el método trapezoidal generalizado	131
	Bibliografía	133

Capítulo 1

Análisis vectorial

Este capítulo es dedicado a introducir el espacio euclidiano tridimensional, el cual constituye el modelo matemático utilizado prácticamente con exclusividad en física clásica para modelar el espacio físico que nos rodea, así como las herramientas más relevantes de análisis matemático para el estudio de los problemas con cuerpos continuos tridimensionales. Con ese fin, en primer lugar se exponen las definiciones y resultados más relevantes sobre espacios vectoriales en general, luego se presenta la estructura algebraica del espacio euclidiano tridimensional, junto con las definiciones y resultados más relevantes del cálculo diferencial e integral en este espacio. Por brevedad se omiten las demostraciones de los lemas y teoremas presentados más conocidos, los cuales pueden encontrarse en la bibliografía.

1.1. Espacios vectoriales

Un espacio vectorial es una estructura algebraica en la cual se tiene un conjunto \mathcal{V} de elementos llamamos *vectores*, y un conjunto \mathbb{K} de elementos llamados *escalares*, el cual posee una estructura de cuerpo. En lo que sigue consideraremos siempre el caso en el que el cuerpo \mathbb{K} es el conjunto \mathbb{R} de los números reales. Como es usual, llamaremos \mathcal{V} al espacio vectorial, es decir, a la estructura algebraica le daremos el mismo nombre que al conjunto de los vectores.

La estructura de espacio vectorial está dada por dos operaciones: *suma* y *producto*, que poseen una lista específica de propiedades. La suma es una operación en el conjunto de vectores y es usualmente representada por el símbolo $+$, mientras que el producto no recibe un símbolo específico, sino que se identifica por la existencia de un escalar y un vector lado a lado, lo cual exige interpretar el producto de ambos. Así, la suma $+$: $\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tiene las siguientes propiedades, donde \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} son vectores:

conmutativa:	$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$,
asociativa:	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$,
existencia del vector nulo $\mathbf{0}$:	$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$,
existencia del vector opuesto $-\mathbf{u}$:	$-\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Note que los vectores serán indicados con letras negritas. Por su parte, el producto $\square : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tiene las siguientes propiedades, donde α y β son escalares:

$$\begin{aligned} \text{asociativa:} & \quad \alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}, \\ \text{el escalar 1 es neutro:} & \quad 1\mathbf{u} = \mathbf{u}, \\ \text{distributivas:} & \quad (\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}, \\ & \quad \alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Aunque no es estrictamente necesaria, se suele definir una operación diferencia entre vectores, la cual es indicada con el símbolo $-$, pues conduce a simplificar las expresiones obtenidas. La misma se define por la igualdad $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Lema 1.1 Las siguientes propiedades son demostrables a partir de las propiedades de las operaciones suma y producto:

- El vector nulo $\mathbf{0}$ es único.
- Para cada $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, el vector opuesto $-\mathbf{u}$ es único.
- El escalar neutro 1 es único.
- $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$.
- $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ y $\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- Si $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entonces o bien $\alpha = 0$ o bien $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Existen muchos ejemplos de conjuntos a los cuales se les puede proveer de una estructura de espacio vectorial. Por ejemplo los espacios \mathbb{R}^n conformados por n -tuplas de números reales son espacios vectoriales si se define la suma de vectores utilizando la habitual suma real componente a componente y el producto real en forma similar. Otros ejemplos más sofisticados pueden ser por ejemplo el conjunto de las matrices de dimensiones $n \times m$, el conjunto de los polinomios de grado menor o igual a n , el conjunto de todos los polinomios, el conjunto de todas las funciones continuas, el conjunto de todas las sucesiones reales, el espacio dual de un espacio vectorial, etc.

Definición 1.2 Diremos que el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\ell\}$ es *generador* del espacio \mathcal{V} si para todo vector \mathbf{u} de \mathcal{V} existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$ de modo tal que $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_\ell\mathbf{u}_\ell$. En ese caso diremos que \mathbf{u} es la *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_\ell$, con coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_\ell$.

Definición 1.3 Diremos que el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k\}$ es *linealmente independiente* si existe un único conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ de modo tal que $\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{u}_k$. En el caso contrario diremos que el conjunto es *linealmente dependiente*.

Evidentemente, la unicidad del lema anterior implica que cada coeficiente α_i , con $i = 1, \dots, k$, es nulo, pues el Lema 1.1 establece que toda combinación lineal con coeficientes nulos proporciona el vector nulo.

Definición 1.4 Diremos que el conjunto de vectores $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una *base* de \mathcal{V} si es generador de \mathcal{V} y además es linealmente independiente.

Teorema 1.5 Si un espacio vectorial \mathcal{V} posee una base de n elementos, entonces toda base de \mathcal{V} tendrá n elementos. En ese caso diremos que la *dimensión* de \mathcal{V} es n , lo cual será indicado también con la expresión $\dim(\mathcal{V}) = n$.

Como corolario directo del teorema anterior se tiene lo siguiente para los conjuntos de vectores de un espacio \mathcal{V} con dimensión n :

- Un conjunto de $\ell > n$ vectores es linealmente dependiente.
- Un conjunto de $k < n$ vectores no puede ser generador de \mathcal{V} .
- Un conjunto linealmente independiente de n vectores es una base de \mathcal{V} .
- Un conjunto generador de \mathcal{V} de n vectores es una base de \mathcal{V} .

Note, sin embargo, que no todos los espacios vectoriales tienen una base de un número finito $n > 0$ de elementos. Consideraremos que el espacio vectorial trivial $\{\mathbf{0}\}$, que contiene únicamente el vector nulo, tiene dimensión cero, mientras que en todos los demás casos diremos que el espacio vectorial tiene dimensión *infinita*. Un ejemplo simple es el espacio de todas las sucesiones reales, para el cual es fácil encontrar un conjunto linealmente independiente de un número arbitrario de elementos. Lo mismo ocurre con el conjunto de todos los polinomios, y por lo tanto también el conjunto de todas las funciones continuas será un espacio vectorial de dimensión infinita.

Definición 1.6 Diremos que el conjunto de vectores $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ es un subespacio vectorial de \mathcal{V} si posee la estructura de espacio vectorial considerando la misma suma y el mismo producto que dan estructura de espacio vectorial a \mathcal{V} .

Lema 1.7 \mathcal{S} es un subespacio vectorial de \mathcal{V} si y solamente si $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \in \mathcal{S}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{S}$.

Lema 1.8 Dados dos subespacios vectoriales \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 de \mathcal{V} , su intersección $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathcal{S}_1, \mathbf{u} \in \mathcal{S}_2\}$ es un subespacio vectorial de \mathcal{V} . Su suma $\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{u} \in \mathcal{S}_1, \mathbf{v} \in \mathcal{S}_2\}$ también es un subespacio vectorial de \mathcal{V} , y es denominada *suma directa* de \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 , denotada $\mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$, si se cumple

$\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 = \{\mathbf{0}\}$. Por otro lado $\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ si y solamente si para todo vector $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ existen únicos $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{S}_1$ y $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{S}_2$ tales que $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$.

Teorema 1.9 (Fórmula de Grassmann) Dados dos subespacios vectoriales \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 de \mathcal{V} , $\dim(\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2) = \dim(\mathcal{S}_1) + \dim(\mathcal{S}_2) - \dim(\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2)$. Por lo tanto si $\mathcal{V} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$ entonces $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathcal{S}_1) + \dim(\mathcal{S}_2)$.

Dada una base $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ para el espacio vectorial \mathcal{V} de dimensión n , es inmediato ver que a cada vector \mathbf{u} de \mathcal{V} le corresponde una única representación como combinación lineal de los vectores de la base. Tenemos entonces que a cada vector \mathbf{u} le corresponde una única n -tupla de \mathbb{R}^n cuyas componentes son los coeficientes de la combinación lineal. Esa n -tupla es llamada *vector de coordenadas* de \mathbf{u} en la base B , lo cual es indicado por la notación $[\mathbf{u}]_B$, o simplemente $[\mathbf{u}]$ en el caso en que no exista confusión con el uso de otra base. En ese caso la coordenada número i será indicada con la notación $[\mathbf{u}]_i$. La correspondencia es en realidad profunda: la suma y el producto en el espacio \mathcal{V} se corresponden exactamente con la suma y producto habitual de \mathbb{R}^n , por lo cual las operaciones matemáticas entre vectores de \mathcal{V} suelen realizarse con los vectores de coordenadas, siendo este procedimiento el habitual en el caso particular en el que se utiliza una herramienta computacional.

Una estructura adicional, frecuente en los espacios que utilizaremos, aunque no existente en todos los casos, la proporciona el *producto escalar*, también llamado *producto interior* o inclusive *producto punto*. Un producto escalar en un espacio vectorial \mathcal{V} , que aquí representaremos con el símbolo “ \cdot ”, es una operación $\cdot : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

conmutativa:	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
asociativa:	$\alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$,
distributiva:	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$,
es definido positivo:	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} > 0 \quad \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.

Se señala que en estos apuntes el símbolo “ \cdot ” es utilizado con exclusividad para el producto escalar en todas las expresiones matemáticas, con la única excepción del operador divergencia de un campo vectorial \mathbf{v} , el cual es denotado $\nabla \cdot \mathbf{v}$, aunque ese caso no conduce a confusión por la presencia del símbolo ∇ . Note que esa notación es además conveniente para recordar la acción del operador diferencial sobre el campo vectorial, puesto que el producto escalar “simbólico” entre ∇ y \mathbf{v} nos conduce naturalmente a la divergencia del campo vectorial.

De todas las propiedades que podrían ser demostradas involucrando el producto escalar, hay una con aspecto de propiedad cancelativa que es de fácil demostración y que en estos apuntes es utilizada frecuentemente:

Lema 1.10 Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{V}$, entonces $\mathbf{u} = \mathbf{v}$.

Note la importancia de que la igualdad se cumpla para todo vector \mathbf{w} del espacio vectorial. Dados $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$ siempre podemos encontrar vectores \mathbf{w} tales que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$,

uno de ellos es, por ejemplo, $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

Definición 1.11 Si \mathcal{V} es un espacio vectorial con producto escalar, la norma inducida en \mathcal{V} por ese producto es la dada por $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$.

Lema 1.12 Las siguientes propiedades son demostrables a partir de la definición del producto escalar para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y para todos $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}$:

- $\|\alpha\mathbf{u}\| = |\alpha| \|\mathbf{u}\|$.
- $\|\mathbf{u}\| > 0$ para todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$.
- Desigualdad triangular: $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.
- Desigualdad de Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz: $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.
- Teorema de Pitágoras: si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$, entonces $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$.
- Ley del paralelogramo: $2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$.

Definición 1.13 Diremos que $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ es un conjunto *ortogonal* de vectores del espacio vectorial \mathcal{V} si se cumple $\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j = 0$ siempre que $i \neq j$.

Una propiedad importante de los conjuntos ortogonales de vectores es dada por el siguiente lema:

Lema 1.14 Todo conjunto ortogonal de vectores es linealmente independiente.

Nos interesarán particularmente las bases compuestas por vectores ortogonales de norma unitaria, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 1.15 Diremos que $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ es una base *ortonormal* del espacio vectorial \mathcal{V} , si es una base, si es ortogonal, y si además $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ para todo i .

Las bases ortonormales son muy prácticas, pues facilitan mucho la tarea de encontrar el vector de coordenadas de un vector determinado. Así, si $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n$, entonces $[\mathbf{u}]_i := \alpha_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_i$. Afortunadamente, el algoritmo de ortonormalización de Gram-Schmidt nos sirve para demostrar el siguiente lema:

Lema 1.16 Todos los espacios vectoriales de dimensión finita cuentan con una base ortonormal.

El producto escalar conduce además a la definición de espacios ortogonales:

Definición 1.17 Diremos que los subespacios \mathcal{S}_1 y \mathcal{S}_2 de \mathcal{V} son ortogonales si para todos $\mathbf{u}_1 \in \mathcal{S}_1$ y $\mathbf{u}_2 \in \mathcal{S}_2$ se tiene $\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0$.

1.2. Transformaciones lineales

Una *transformación lineal* es una aplicación entre dos espacios vectoriales que preserva las combinaciones lineales:

Definición 1.18 Diremos que una aplicación $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ es una *transformación lineal*, si satisface:

$$\mathbf{L}(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\mathbf{L}\mathbf{u} + \beta\mathbf{L}\mathbf{v} \text{ para todos } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}.$$

Note que al trabajar con transformaciones lineales es usual evitar en lo posible los paréntesis al expresar la imagen de un cierto vector, es decir, expresamos $\mathbf{L}\mathbf{u}$ en lugar de $\mathbf{L}(\mathbf{u})$ como hacemos con aplicaciones más generales.

Definición 1.19 Se definen el núcleo $\ker(\mathbf{L})$ y la imagen $\text{im}(\mathbf{L})$ de la transformación lineal $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ por las expresiones:

$$\begin{aligned} \ker(\mathbf{L}) &= \{\mathbf{u} \in \mathcal{V} : \mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{0}\}, \\ \text{im}(\mathbf{L}) &= \{\mathbf{v} \in \mathcal{W} : \mathbf{v} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{u} \in \mathcal{V}\}. \end{aligned}$$

Lema 1.20 $\ker(\mathbf{L})$ es un subespacio vectorial de \mathcal{V} , mientras que $\text{im}(\mathbf{L})$ es un subespacio vectorial de \mathcal{W} . Además $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\ker(\mathbf{L})) + \dim(\text{im}(\mathbf{L}))$.

Las transformaciones lineales son aplicaciones extremadamente simples. De hecho, dada una base $A = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ de \mathcal{V} , las propiedad de linealidad anterior hace que la transformación lineal \mathbf{L} quede completamente determinada por las imágenes $\mathbf{L}\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{L}\mathbf{u}_k$ de los elementos de la base. Como a su vez esas imágenes quedan determinadas sus coordenadas en la base $B = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell\}$ de \mathcal{W} , tenemos que la transformación lineal queda determinada completamente por los elementos de una matriz:

Lema 1.21 Dada la transformación lineal $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, una base A de \mathcal{V} y una base B de \mathcal{W} , entonces existe una única matriz real ${}_B[\mathbf{L}]_A$, que cumple:

$$[\mathbf{v}]_B = {}_B[\mathbf{L}]_A [\mathbf{u}]_A \text{ para todos } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ y } \mathbf{v} \in \mathcal{W} \text{ tales que } \mathbf{v} = \mathbf{L}\mathbf{u}.$$

Note que el número de columnas de la matriz ${}_B[\mathbf{L}]_A$ es $k = \dim(\mathcal{V})$, mientras que el número de filas es $\ell = \dim(\mathcal{W})$. Así como los vectores de coordenadas dependen de las bases utilizadas, la matriz ${}_B[\mathbf{L}]_A$ depende también de las mismas, tal como lo sugiere la notación utilizada. Note además que es muy fácil hallar la matriz ${}_B[\mathbf{L}]_A$, pues sus columnas están compuestas por los vectores de coordenadas de las imágenes de los vectores de la base utilizada.

Definición 1.22 Sean \mathcal{V} y \mathcal{W} espacios vectoriales con producto escalar. Dada la transformación lineal $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$, llamaremos transformación lineal *traspuesta*

de \mathbf{L} a la transformación lineal $\mathbf{L}^\top : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ que cumple:

$$(\mathbf{L}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\mathbf{L}^\top \mathbf{v}) \text{ para todos } \mathbf{u} \in \mathcal{V} \text{ y } \mathbf{v} \in \mathcal{W}.$$

En alguna bibliografía también se le llama transformación *adjunta* a lo que aquí hemos llamado *traspuesta*, mientras que en algunos casos la palabra *adjunta* se reserva para los espacios de cuerpo complejo. En el caso real la palabra *traspuesta* tiene origen en la siguiente propiedad:

Lema 1.23 Si las bases A de \mathcal{V} y B de \mathcal{W} son ortonormales, entonces la matriz de \mathbf{L}^\top es igual a la traspuesta de la matriz de \mathbf{L} , es decir:

$${}_A[\mathbf{L}^\top]_B = {}_B[\mathbf{L}]_A^\top.$$

En espacios de dimensión finita el lema anterior muestra la existencia y unicidad de \mathbf{L}^\top , así como la identidad $(\mathbf{L}^\top)^\top = \mathbf{L}$, aunque no es la forma habitual en que presentan estas ideas en los libros de texto, pues siempre se prefieren las demostraciones que prescindan del uso de bases.

Dado un espacio vectorial \mathcal{V} , existen dos tipos de transformaciones lineales que nos interesarán particularmente. Por un lado los llamados *funcionales lineales*, que son transformaciones lineales del tipo $\mathbf{q} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, y las transformaciones lineales que van de un espacio en sí mismo, es decir, las del tipo $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Para los funcionales lineales existe el teorema de representación de Riesz, el cual enunciamos aquí solamente en el caso de espacios de dimensión finita:

Teorema 1.24 (Representación de Riesz) Si \mathcal{V} tiene dimensión finita, entonces para cada funcional lineal \mathbf{q} de \mathcal{V} existe un único vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ que satisface $\mathbf{q}\mathbf{u} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Diremos que \mathbf{v} es el *representante de Riesz* de \mathbf{q} .

En el caso de las transformaciones lineales del tipo $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, hay una de especial interés:

Definición 1.25 Se define la transformación *identidad* $\mathbf{I} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ como aquella que cumple $\mathbf{I}\mathbf{u} = \mathbf{u}$ para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$.

Naturalmente, en cualquier base B de \mathcal{V} , la matriz ${}_B[\mathbf{I}]_B$ de la transformación identidad \mathbf{I} será la matriz identidad. Note además que si A es otra base, entonces $[\mathbf{u}]_A = {}_A[\mathbf{I}]_B[\mathbf{u}]_B$, por lo que las matrices del tipo ${}_A[\mathbf{I}]_B$ son las llamadas *matrices de cambio de base*. Las mismas permiten también cambiar la base en la que expresamos las transformaciones lineales de acuerdo con el siguiente lema:

Lema 1.26 Dadas las bases A y B de \mathcal{V} , se cumple ${}_B[\mathbf{L}]_B = {}_B[\mathbf{I}]_{AA}[\mathbf{L}]_{AA}[\mathbf{I}]_B$. En particular, tomando $\mathbf{L} = \mathbf{I}$, tenemos que ${}_B[\mathbf{I}]_{AA}[\mathbf{I}]_B$ es la matriz identidad, por lo cual $\det({}_B[\mathbf{I}]_A)\det({}_A[\mathbf{I}]_B) = 1$. Volviendo a considerar \mathbf{L} general, obtenemos la igualdad $\det({}_B[\mathbf{L}]_B) = \det({}_A[\mathbf{L}]_A)$.

Definición 1.27 diremos que $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ es *invertible* si existe una transformación lineal $\mathbf{L}^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tal que la composición $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{I}$.

Note que \mathbf{L} será invertible si para cada vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, existe y es único el vector $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ tal que $\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{v}$. En ese caso simplemente tomamos \mathbf{L}^{-1} como la aplicación que proporciona \mathbf{u} : $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{v} = \mathbf{u}$. La linealidad de esa aplicación se demuestra fácilmente. Para hallar \mathbf{u} podemos trabajar en una base, puesto que se debe cumplir ${}_B[\mathbf{L}]_B[\mathbf{u}]_B = [\mathbf{v}]_B$, lo cual conduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones, y por lo tanto inspira la siguiente definición:

Definición 1.28 Se define el *determinante* de $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ por la expresión $\det(\mathbf{L}) = \det({}_B[\mathbf{L}]_B)$, la cual sabemos que conduce al mismo resultado cualquiera sea la base B de \mathcal{V} utilizada.

Lema 1.29 \mathbf{L} es invertible si y solamente si se cumplen las propiedades equivalentes siguientes: a) $\ker(\mathbf{L}) = \{\mathbf{0}\}$, b) $\text{im}(\mathbf{L}) = \mathcal{V}$, c) $\det(\mathbf{L}) \neq 0$. En ese caso $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{L} = \mathbf{L}\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{I}$ y $(\mathbf{L}^{-1})^{-1} = \mathbf{L}$.

Definición 1.30 Dada la transformación lineal $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, diremos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es un *valor propio* de \mathbf{L} , si existe $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en \mathcal{V} tal que $\mathbf{L}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$. En ese caso diremos que \mathbf{u} es un *vector propio* de \mathbf{L} asociado al valor propio α .

Note que, de acuerdo a la definición anterior, el único valor propio de la identidad \mathbf{I} es 1, y todo vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en \mathcal{V} es un vector propio asociado a ese valor. En el caso más general, si α es vector propio de \mathbf{L} , entonces existe $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{L}\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u}$, lo cual puede expresarse como $(\mathbf{L} - \alpha\mathbf{I})\mathbf{u} = \mathbf{0}$, entendida $\mathbf{L} - \alpha\mathbf{I}$ como la transformación lineal que las reglas del álgebra sugieren. Eso implica que $\mathbf{u} \in \ker(\mathbf{L} - \alpha\mathbf{I})$, y siendo ese núcleo no trivial se tiene que $\mathbf{L} - \alpha\mathbf{I}$ no es invertible y en consecuencia tiene determinante nulo. En la práctica los valores propios se obtienen trabajando con una base B de \mathcal{V} , puesto que la igualdad ${}_B[\mathbf{L} - \alpha\mathbf{I}]_B[\mathbf{u}]_B = \mathbf{0}$ con $[\mathbf{u}]_B \neq \mathbf{0}$ implica que la matriz ${}_B[\mathbf{L} - \alpha\mathbf{I}]_B$ es singular. Estas ideas conducen a la definición y lema siguientes:

Definición 1.31 Se define el *polinomio característico* $P(\alpha)$ de \mathbf{L} por la expresión $P(\alpha) = \det(\mathbf{L} - \alpha\mathbf{I})$.

Lema 1.32 Los valores propios de \mathbf{L} son las raíces de su polinomio característico. Para un dado valor propio α , los vectores propios asociados son aquellos $\mathbf{u} \in \ker(\mathbf{L} - \alpha\mathbf{I})$, cuyos vectores de coordenadas pueden hallarse trabajando con una base B y obteniendo el núcleo de la matriz ${}_B[\mathbf{L} - \alpha\mathbf{I}]_B$.

En el caso de las transformaciones lineales del tipo $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$, nos interesarán particularmente las transformaciones *simétricas*, también llamadas *autoadjuntas*:

Definición 1.33 Diremos que $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ es *simétrica* si $\mathbf{L}^\top = \mathbf{L}$.

Lema 1.34 Dada una base ortonormal B de \mathcal{V} , \mathbf{L} es simétrica si y solamente si su matriz ${}_B[\mathbf{L}]_B$ en esa base lo es.

Hemos introducido todos los elementos necesarios para formular uno de los teoremas más importantes en relación con las transformaciones simétricas:

Teorema 1.35 (Teorema espectral) Si la transformación lineal $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ es simétrica, entonces existe una base ortonormal de \mathcal{V} formada por vectores propios de \mathbf{L} .

La base mencionada en el teorema anterior no es necesariamente única. Por ejemplo, en el caso de la transformación identidad \mathbf{I} cualquier base ortonormal es formada por vectores propios. Lo cierto es que valores y vectores propios pueden ser utilizados en forma similar a la representación de Riesz de un funcional lineal, pues dado un vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, su expresión en términos de la base ortonormal de vectores propios de \mathbf{L} es del tipo $\mathbf{v} = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{u}_n$, con $\beta_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_i$, con lo cual, siendo $\mathbf{L}\mathbf{u}_i = \alpha_i \mathbf{u}_i$, tenemos:

$$\mathbf{L}\mathbf{v} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_1)\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_n)\alpha_n \mathbf{u}_n.$$

Tal vez el resultado anterior no pone completamente en evidencia el grado de simplificación obtenido por trabajar con la base de vectores propios. Sea $B = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ la base de vectores propios de \mathbf{L} . Siendo ${}_B[\mathbf{L}]_B[\mathbf{u}_i]_B = \alpha_i[\mathbf{u}_i]_B$ con $[\mathbf{u}_i]_B$ el i -ésimo vector de la base canónica de \mathbb{R}^n , se tiene entonces que ${}_B[\mathbf{L}]_B$ es la matriz diagonal cuyos elementos son los valores propios $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Con eso, si quisiéramos encontrar un vector \mathbf{u} tal que $\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{v}$, entonces resolvemos el sistema lineal ${}_B[\mathbf{L}]_B[\mathbf{u}]_B = [\mathbf{v}]_B$ el cual es extremadamente simple. Eso muestra que \mathbf{L} es invertible si y solamente si todos sus valores propios son diferentes de cero, lo cual es expresado en el siguiente lema:

Lema 1.36 Una transformación lineal simétrica \mathbf{L} de valores propios $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ es invertible si y solamente si todos sus valores propios α_i son no nulos. La aplicación inversa $\mathbf{L}^{-1} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ es también una transformación lineal invertible con iguales vectores propios y valores propios $\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_n^{-1}$.

Otro razonamiento similar basado en la matriz diagonal ${}_B[\mathbf{L}]_B$ nos será de bastante utilidad. Admitiendo que los corchetes implican la base B , tenemos $\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}\mathbf{u} = [\mathbf{u}]^\top [\mathbf{L}][\mathbf{u}] = \alpha_1 [\mathbf{u}]_1^2 + \dots + \alpha_n [\mathbf{u}]_n^2$, donde $[\mathbf{u}]_i$ es la componente i del vector de coordenadas de \mathbf{u} en la base B . Lo anterior conduce a la definición y lema siguientes:

Definición 1.37 Diremos que la transformación lineal \mathbf{L} es *semidefinida positiva* si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}\mathbf{u} \geq 0$ para todo $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$. Si $\mathbf{u} \cdot \mathbf{L}\mathbf{u} > 0$ para todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ en \mathcal{V} , entonces diremos que \mathbf{L} es *definida positiva*.

Lema 1.38 Una transformación lineal simétrica \mathbf{L} es semidefinida positiva si y solamente si todos sus valores propios son no negativos. Es definida positiva si y solamente si todos sus valores propios son positivos. En consecuencia, toda transformación lineal definida positiva es invertible.

1.3. Espacio vectorial \mathcal{V}^3

El conjunto \mathcal{V}^3 es el espacio vectorial de cuerpo real y con producto escalar que utilizamos para modelar matemáticamente el conjunto de los segmentos orientados que unen puntos del espacio físico que nos rodea, cuando los mismos no son diferenciados más que por su magnitud y dirección, no importando qué puntos unen. La definición formal de \mathcal{V}^3 es dada por la siguiente definición:

Definición 1.39 El espacio vectorial \mathcal{V}^3 es el espacio con producto escalar generado por la base ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$.

La definición anterior parece muy concisa, pero en realidad proporciona un conjunto importante de información. En primer lugar, la base tiene tres elementos, por lo que $\dim(\mathcal{V}^3) = 3$. Además, todo vector de \mathcal{V}^3 es del tipo $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3$. El producto escalar de \mathcal{V}^3 es también dado implícitamente, pues si otro vector es $\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{e}_1 + \beta_2\mathbf{e}_2 + \beta_3\mathbf{e}_3$, entonces $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ es necesariamente $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3$.

Al contrario de lo que habitualmente es asumido por los estudiantes, los vectores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 no son vectores que reconozcamos o podamos definir a partir de elementos más básicos, como podrían ser por ejemplo los vectores de \mathbb{R}^3 , los cuales también pertenecen a un espacio vectorial de dimensión 3. Los vectores \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 y \mathbf{e}_3 son aquí considerados *elementos primitivos* que representan direcciones del espacio físico que nos rodea. Es cierto que \mathbb{R}^3 no proporcionaría un modelo inadecuado, pero aquí se ha preferido no dotar a los vectores de nuestro espacio de una naturaleza “numérica” que no parece ser inherente a las direcciones del espacio físico. Obviamente, y como en cualquier espacio vectorial, una vez que tenemos una base, podemos identificar cada vector con su vector de coordenadas, el cual en este caso está en \mathbb{R}^3 , aunque \mathbf{e}_1 no es $(1, 0, 0)$ del mismo modo que un polinomio o una matriz nunca son considerados iguales a sus vectores de coordenadas. De hecho, el álgebra lineal nos dice que ninguna base es más especial que otra en un espacio vectorial, y el vector de coordenadas correspondiente a \mathbf{e}_1 es diferente de $(1, 0, 0)$ para casi cualquier base diferente de la utilizada en la definición de \mathcal{V}^3 .

Una característica especial del espacio \mathcal{V}^3 es la introducción del llamado *producto vectorial*, también llamado *producto cruz*, el cual recibe el símbolo \times y es la operación $\times : \mathcal{V}^3 \times \mathcal{V}^3 \rightarrow \mathcal{V}^3$ que tiene las siguientes propiedades:

anticonmutativa:	$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u}),$
asociativa:	$\alpha(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\alpha\mathbf{u}) \times \mathbf{v},$
distributiva:	$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{w} + \mathbf{v} \times \mathbf{w},$
y además:	$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2.$

En alguna bibliografía es utilizado el símbolo \wedge para representar el producto vectorial, pero aquí se desaconseja pues en gran parte de la bibliografía el símbolo \wedge es reservado para el *producto exterior* de Grassmann, el cual tiene propiedades muy diferentes. En estos apuntes se utiliza el símbolo \times con exclusividad para indicar el producto vectorial, excepto en el caso del producto entre números y entre conjuntos, como en $6 = 2 \times 3$ o $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, y en el caso del rotacional de un campo vectorial \mathbf{v} , el cual es indicado con la notación $\nabla \times \mathbf{v}$, lo cual merece comentarios similares a la notación utilizada para la divergencia del campo vectorial.

El primer rol del producto vectorial en \mathcal{V}^3 se encuentra en su utilidad para el cálculo de áreas y volúmenes. Sin entrar en demasiados detalles, se indica que $\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\|$ es exactamente el área de un paralelogramo cuyos lados están dados por segmentos de dirección y magnitud correspondientes a \mathbf{u} y \mathbf{v} . Es esa relación con el concepto de área la que hace que podamos utilizar el producto vectorial para expresar matemáticamente el concepto de momento de un sistema de fuerzas. Por otro lado, si \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} están orientados de forma tal que satisfacen la regla de la mano derecha, entonces $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ es exactamente el volumen del paralelepípedo dado por segmentos de dirección y magnitud correspondientes a los vectores \mathbf{u} , \mathbf{v} y \mathbf{w} . Naturalmente, esos resultados pueden ser demostrados una vez definidos los conceptos de área y volumen en forma independiente. Esto será realizado recién en la próxima sección. Por el momento se indican cuatro de las propiedades más importantes, entre las muchas conocidas, que involucran al producto vectorial. Las cuatro están relacionadas con esas ideas expresadas de área y volumen. La cuarta es frecuentemente utilizada en estos apuntes, y surge del hecho que al rotar cíclicamente una terna de vectores se mantiene la regla de la mano derecha y obviamente se mantiene también el volumen del paralelepípedo que representan:

Lema 1.40 Si $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}^3$ entonces:

- $\mathbf{u} \times \mathbf{v} \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es linealmente independiente.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \neq 0 \Leftrightarrow \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente independiente.
- $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0$.
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) = \mathbf{w} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ (regla del producto mixto).

Existe otro rol que el producto vectorial desempeña en estos apuntes, el cual es indicado luego de introducir algunas notaciones particulares para las transformaciones lineales del tipo $\mathbf{L} : \mathcal{V}^3 \rightarrow \mathcal{V}^3$:

Definición 1.41 (Tensores) Llamaremos *tensor* a cualquier transformación lineal $\mathbf{L} : \mathcal{V}^3 \rightarrow \mathcal{V}^3$, y Lin al conjunto de los tensores, es decir:

$$\text{Lin} = \{\mathbf{L} : \mathcal{V}^3 \rightarrow \mathcal{V}^3 : \mathbf{L} \text{ es lineal}\}.$$

Lin posee el siguiente producto escalar, denotado “ \cdot ” para evitar la confusión con

el producto escalar de \mathcal{V}^3 . Utilizando una base ortonormal, el mismo es dado por:

$$\mathbf{L} : \mathbf{M} = \sum_{i,j=1}^3 [\mathbf{L}]_{ij} [\mathbf{M}]_{ij}.$$

Definición 1.42 llamaremos Sim y Asm respectivamente a los conjuntos de los tensores simétricos y antisimétricos, es decir:

$$\text{Sim} = \{\mathbf{L} \in \text{Lin} : \mathbf{L} = \mathbf{L}^\top\}, \quad \text{Asm} = \{\mathbf{L} \in \text{Lin} : \mathbf{L} = -\mathbf{L}^\top\}.$$

Lema 1.43 $\text{Lin} = \text{Sim} \oplus \text{Asm}$. Además Sim y Asm son espacios ortogonales.

Demostración. Si $\mathbf{L} \in \text{Sim}$ y $\mathbf{L} \in \text{Asm}$ entonces $\mathbf{L} = \mathbf{L}^\top = -\mathbf{L}^\top$ lo que implica que $\mathbf{L}^\top = \mathbf{0}$, y en consecuencia $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Por lo tanto $\text{Sim} \cap \text{Asm} = \{\mathbf{0}\}$. Para ver que $\text{Lin} = \text{Sim} + \text{Asm}$, note que para todo tensor se tiene $\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^\top) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^\top)$, con el primer sumando en Sim y el segundo en Asm. Para demostrar que son espacios ortogonales basta considerar una base ortonormal y hacer las cuentas con las matrices de ambas transformaciones, lo cual es dejado como ejercicio. \square

Lema 1.44 Para todo $\mathbf{W} \in \text{Asm}$ existe un único vector $\mathbf{w} \in \mathcal{V}^3$ que satisface $\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$. Además, para todo $\mathbf{w} \in \mathcal{V}^3$ existe un único $\mathbf{W} \in \text{Asm}$ que satisface $\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$.

Demostración. Note que si $\mathbf{W} \in \text{Asm}$, entonces fácilmente se demuestra que su matriz es antisimétrica en cualquier base ortonormal. Para la demostración podemos hacer las cuentas en la base usual $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Así, considere el tensor y el vector dados a continuación:

$$[\mathbf{W}] = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad [\mathbf{w}] = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}.$$

Note que esas expresiones permiten representar cualquier tensor en Asm y cualquier vector en \mathcal{V} . La prueba de que $\mathbf{W}\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}^3$ se deja como ejercicio. \square

Veamos ahora en detalle el polinomio característico de los tensores en Lin. Como las matrices de estos tensores son de dimensiones 3×3 , el polinomio característico será de tercer grado, lo cual conduce a la siguiente definición:

Definición 1.45 Se definen los *invariantes* I_1, I_2 e I_3 del tensor $\mathbf{L} \in \text{Lin}$ como los coeficientes de su polinomio característico, con el siguiente signo:

$$P(\alpha) = \det(\mathbf{L} - \alpha \mathbf{I}) = -\alpha^3 + \alpha^2 I_1(\mathbf{L}) - \alpha I_2(\mathbf{L}) + I_3(\mathbf{L}).$$

Los invariantes reciben ese nombre por ser los mismos independientemente de la base utilizada, lo cual es cierto porque hemos visto que el polinomio característico no depende de la base. El primer invariante nos interesará en particular, y recibe un nombre específico de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 1.46 Se define el *trazo* de \mathbf{L} por la expresión $\text{tr}(\mathbf{L}) = I_1(\mathbf{L})$.

Lema 1.47 El trazo es un funcional lineal en Lin , dado por la expresión $\text{tr}(\mathbf{L}) = [\mathbf{L}]_{11} + [\mathbf{L}]_{22} + [\mathbf{L}]_{33}$ válida en cualquier base. Con ello $\mathbf{L} : \mathbf{M} = \text{tr}(\mathbf{L}\mathbf{M}^\top) = \text{tr}(\mathbf{L}^\top\mathbf{M})$. Además $I_2(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}(\text{tr}(\mathbf{L})^2 - \text{tr}(\mathbf{L}^2))$ es cuadrático homogéneo en las componentes de $[\mathbf{L}]$, mientras que $I_3(\mathbf{L}) = \det(\mathbf{L})$ es cúbico homogéneo en las mismas componentes.

Note que $\mathbf{I} : \mathbf{L} = \text{tr}(\mathbf{L})$, con lo cual el tensor identidad \mathbf{I} es el representante de Riesz del funcional lineal trazo. Además $\text{tr}(\mathbf{L}^2) = \mathbf{L} : \mathbf{L}^\top$, con lo cual se tiene $I_1(\mathbf{L}) = \mathbf{I} : \mathbf{L}$ y $I_2(\mathbf{L}) = \frac{1}{2}((\mathbf{I} : \mathbf{L})^2 - \mathbf{L} : \mathbf{L}^\top)$.

El producto escalar inspira además la siguiente definición, la cual es utilizada en estos apuntes en el estudio de las propiedades resistentes de algunos materiales:

Definición 1.48 Se define el conjunto de los tensores *esféricos* Lin^e , y el conjunto de los *desviadores* Lin^d por las expresiones:

$$\text{Lin}^e = \{\mathbf{L} \in \text{Lin} : \mathbf{L} = \alpha\mathbf{I}, \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad \text{Lin}^d = \{\mathbf{L} \in \text{Lin} : \text{tr}(\mathbf{L}) = 0\}.$$

Lema 1.49 $\text{Lin} = \text{Lin}^e \oplus \text{Lin}^d$. Además Lin^e y Lin^d son espacios ortogonales.

1.4. Espacio euclidiano tridimensional

El conjunto \mathcal{E}^3 es el espacio afín que utilizaremos como modelo matemático para representar el conjunto de puntos del espacio físico que nos rodea. Este quizás no sea un tema tratado en detalle en cursos de matemática y física, probablemente por quedar justo en medio entre ambas disciplinas. Por esa razón lo veremos aquí con más detalle que los conceptos de las secciones anteriores.

La intención es establecer un modelo matemático para el conjunto de los puntos del espacio físico que nos rodea. \mathcal{V}^3 cumple usualmente es rol, aunque tiene la desventaja teórica siguiente: en \mathcal{V}^3 existe un vector especial, el vector nulo $\mathbf{0}$, el cual hemos visto que es único en su tipo. Si deseamos establecer una estructura algebraica que coloque todos los puntos del espacio físico en el mismo plano de igualdad, entonces nos conviene que esa estructura no sea vectorial. La estructura algebraica que necesitamos es la de los espacios afines.

Los elementos de los espacios afines son llamados *puntos*, y entre esos puntos no definimos las operaciones que habitualmente consideramos en un espacio vectorial. Así, no existe la suma de puntos, no existe el producto entre escalar y punto, no

existe el producto escalar entre puntos ni mucho menos existe un producto vectorial. La única operación que se define en un espacio afín es la *diferencia*, indicada con el símbolo $-$, que conduce a un vector de un cierto espacio vectorial asociado. En el caso de \mathcal{E}^3 el espacio asociado es \mathcal{V}^3 . Así, $- : \mathcal{E}^3 \times \mathcal{E}^3 \rightarrow \mathcal{V}^3$ es una operación con las siguientes propiedades, en donde $X, Y, Z \in \mathcal{E}^3$:

- Relación de Chasles: $(Y - X) + (Z - Y) + (X - Z) = \mathbf{0}$,
- Fijado un punto X , la aplicación $Y \mapsto Y - X$ entre \mathcal{E}^3 y \mathcal{V}^3 es biyectiva.

Estas propiedades son más fácilmente interpretadas teniendo en cuenta que la diferencia $Y - X$ representa un segmento orientado que parte desde el punto X y llega al punto Y . Así, la relación de Chasles puede ser visualizada dibujando un triángulo de vértices X, Y, Z . La segunda propiedad indica que, dado un *origen* X , podemos asociar a cada punto $Y \in \mathcal{E}^3$ un único vector de \mathcal{V}^3 , el vector $Y - X$.

La construcción geométrica que representa diferencias entre puntos como segmentos orientados es usualmente todo lo que necesitamos para obtener o interpretar cualquier expresión válida en el álgebra afín. De hecho, la estructura afín fue creada para expresar algebraicamente esa construcción geométrica. Sin embargo, nada impide operar en forma abstracta utilizando la estructura afín, cosa que haremos por única vez al considerar el siguiente lema:

Lema 1.50 Dados $X, Y, Z \in \mathcal{E}^3$, se cumplen las siguientes propiedades:

- $X - X = \mathbf{0}$.
- $Y - X = -(X - Y)$.
- $(Y - X) + (Z - Y) = (Z - X)$.
- $Y - X = \mathbf{0} \Rightarrow Y = X$.

Demostración. La primera propiedad se deduce de la relación de Chasles para $Y = Z = X$, pues $(X - X) + (X - X) + (X - X) = 3(X - X) = \mathbf{0}$, entonces $X - X = \mathbf{0}$. La segunda propiedad es resultado directo de la anterior y de la relación de Chasles para $Z = Y$. Esta segunda propiedad conduce directamente a expresar la relación de Chasles en la forma de la tercera propiedad. La cuarta propiedad ya requiere una demostración más cuidadosa. Siendo que la aplicación $Y \mapsto Y - X$ es biyectiva, a diferentes puntos Y le deben corresponder diferentes vectores $Y - X$. Pero siendo que al punto Y le corresponde el vector $Y - X = \mathbf{0}$, y al punto X también le corresponde el mismo vector, pues hemos demostrado que $X - X = \mathbf{0}$, entonces no queda otra posibilidad que Y sea el mismo punto que X . \square

Así como en el lema anterior, podríamos demostrar algebraicamente un conjunto más amplio de resultados los cuales simplemente reproducirán fórmulas que ya hemos conocido desde un punto de vista más “geométrico”. No es necesario realmente reproducir esos resultados aquí, pues, como dijimos, la interpretación de la diferencia como el segmento orientado entre dos puntos es todo lo que necesitamos

para comprender razonablemente bien la estructura del espacio afín. En particular, las propiedades del lema anterior probablemente no requieran ningún esfuerzo de memorización. Tampoco debe requerir muchas aclaraciones la definición de la operación suma $+$: $\mathcal{E}^3 \times \mathcal{V}^3 \rightarrow \mathcal{E}^3$, la cual conduce a expresiones del tipo $X + \mathbf{u} = Y$ válidas siempre que $Y - X = \mathbf{u}$.

En particular, note que una vez fijado un origen $O \in \mathcal{E}^3$, el resto de los puntos queda identificado con un vector de \mathcal{V}^3 , por lo cual cualquier estructura de \mathcal{E}^3 podrá ser asociada a una estructura de \mathcal{V}^3 . Así, los subespacios afines de \mathcal{E}^3 son definidos como los subconjuntos del mismo que preservan la estructura afín para la misma diferencia de \mathcal{E}^3 . Los mismos estarán asociados a subespacios de \mathcal{V}^3 , y serán todos de la forma $\{X + \mathbf{u} : \mathbf{u} \in \mathcal{S}\}$ con \mathcal{S} subespacio de \mathcal{V}^3 . La dimensión de un espacio afín puede ser definida como la dimensión del espacio vectorial asociado. Por ejemplo, un punto es un subespacio afín de dimensión cero, una recta es un subespacio afín de dimensión uno, y un plano es un subespacio afín de dimensión dos.

Note que a su vez los vectores de \mathcal{V}^3 pueden ser identificados con vectores de \mathbb{R}^3 una vez ha sido escogida una base. Sea por ejemplo la base $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Fijado O , la aplicación $X \mapsto [X - O]_B$ es lo que se llama un *sistema de coordenadas cartesiano* de centro O y base B . Existen infinitos sistemas de coordenadas cartesianos, uno para cada par centro-base. De manera más general, un sistema de coordenadas para \mathcal{E}^3 es una aplicación $\chi : \mathcal{B} \rightarrow U$ biyectiva y con algunas otras propiedades, con $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ y $U \subset \mathbb{R}^3$. Entre estos sistemas se encuentran los cartesianos. Sistemas de coordenadas no cartesianos son por ejemplo los sistemas cilíndrico y esférico, los cuales son utilizados frecuentemente en problemas que presentan algún tipo de simetría de rotación.

1.5. Cálculo diferencial vectorial

En pocas palabras, puede decirse que el *cálculo vectorial* es el área del cálculo diferencial e integral de múltiples variables que se ocupa de las funciones definidas en \mathcal{E}^3 o en subconjuntos del mismo. Siendo que la utilización de un sistema de coordenadas cartesiano permite colocar en correspondencia \mathcal{E}^3 con \mathbb{R}^3 manteniendo la estructura métrica del espacio, cualquiera de los teoremas conocidos del cálculo diferencial e integral que sea válido en el espacio \mathbb{R}^3 tiene su correspondiente en el espacio \mathcal{E}^3 . Existen sin embargo dos particularidades de \mathcal{E}^3 que lo distinguen de \mathbb{R}^3 . La primera es la distinción clara que existe en \mathcal{E}^3 entre puntos y vectores. En \mathbb{R}^3 esa distinción puede ser introducida dándole al mismo el rol tanto de espacio afín como de espacio vectorial asociado. Sin embargo, la distinción entre puntos y vectores en \mathcal{E}^3 es más natural, y además es destacada por la notación utilizada. La otra particularidad de \mathcal{E}^3 es la existencia del producto vectorial. Si bien en \mathbb{R}^3 el producto vectorial puede ser introducido, esto se realiza con el único propósito de demostrar y expresar resultados matemáticos válidos para \mathcal{E}^3 . El cálculo diferencial e integral natural de \mathbb{R}^3 es el generalizable a los espacios \mathbb{R}^n , en los cuales no se puede en general introducir el producto vectorial. De hecho, se sabe que producto vectorial solamente puede ser introducido en los espacios \mathbb{R}^3 y \mathbb{R}^7 .

Comencemos entonces viendo un caso particular sencillo en donde podemos reconocer el diferente rol que juegan los puntos y los vectores en \mathcal{E}^3 . Una *curva orientada* en \mathcal{E}^3 es dada por ejemplo por una *representación paramétrica* de la misma: $C : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}^3$. En esa representación se tiene que a cada *parámetro* $t \in \mathbb{R}$ le corresponde un punto $C(t) \in \mathcal{E}^3$. La misma curva orientada se obtiene por otras representaciones paramétricas, todas las que recorran el mismo conjunto de puntos y en el mismo orden. Tomemos la representación paramétrica C e imaginemos la misma como el recorrido de una cierta partícula material que en un dado instante t se ubica en el punto $C(t)$ de \mathcal{E}^3 . La velocidad de esa partícula en el instante t podemos definirla como la variación en la posición de la partícula que ocurre en un muy pequeño lapso de tiempo por unidad de tiempo:

$$\mathbf{v}(t) = \partial_t C(t) := \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{C(t + \Delta t) - C(t)}{\Delta t}.$$

Note que, de acuerdo al álgebra del espacio euclidiano \mathcal{E}^3 , la diferencia de puntos en el numerador de la expresión anterior es necesariamente un vector, lo cual es válido cualquiera sea el intervalo de tiempo Δt . Se entiende entonces que el límite calculado debe ser un vector en \mathcal{V}^3 , por lo cual se le ha dado la notación $\mathbf{v}(t)$ utilizada para los vectores. Note además que la función de partida, $C(t)$ toma valores en \mathcal{E}^3 mientras que su derivada respecto del parámetro real toma valores en \mathcal{V}^3 . Sin embargo, esto no es algo que añada complejidad, pues los puntos son los elementos del álgebra del espacio euclidiano que fueron creados para representar posiciones en el espacio físico de las partículas materiales, mientras que los vectores son los elementos que fueron creados para representar segmentos orientados, y con eso desplazamientos y velocidades, las cuales que no son más que tasas de desplazamiento por unidad de tiempo. Esta distinción clara entre puntos y vectores es aquí considerada conveniente, pero desafortunadamente es algunas veces es oscurecida en textos de física, en donde se escoge un punto particular \mathbf{O} como origen y se trabaja directamente con trayectorias dadas por el vector posición $\mathbf{r}(t) = C(t) - \mathbf{O}$, con lo cual todos los elementos del problema, posiciones y velocidades, pasan a ser representados por el mismo conjunto de vectores. Por esta razón esta forma de proceder, si bien es matemáticamente precisa, no es seguida en estos apuntes.

Aparte de esa distinción entre puntos y vectores, la ecuación anterior también sirve para discutir otro tema fundamental: ¿qué sentido matemático tiene el límite planteado? Se puede ver que el concepto de límite que existe en los espacios \mathbb{R}^n puede ser extendido a cualquier espacio *métrico*, que es como se conocen a los espacios donde existe una noción de *distancia*. De hecho, la definición de límite de una función en \mathbb{R}^n basada en el llamado *aparato* ε - δ no requiere más que de esa noción. Por lo tanto, definiciones análogas a las de \mathbb{R}^3 conducen a los mismos resultados en \mathcal{E}^3 simplemente reemplazando la noción de distancia en \mathbb{R}^3 por la distancia $d(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|$ definida entre dos puntos \mathbf{Y} y \mathbf{X} de \mathcal{E}^3 . Esa noción de distancia permite definir el concepto de límite, continuidad, y en general cada uno de los conceptos del cálculo diferencial con los que contamos en el espacio \mathbb{R}^3 .

Por ejemplo, con la noción de distancia en \mathbb{R} definimos los *intervalos abiertos* de centro x y radio ε a los que daremos la notación $B(x, \varepsilon) = \{y : |y - x| < \varepsilon\}$,

mientras que usando la noción de distancia en \mathcal{E}^3 definimos las *bolas abiertas* en \mathcal{E}^3 de centro X y radio ε por la expresión $B(X, \varepsilon) = \{Y : \|Y - X\| < \varepsilon\}$. Eso ya es suficiente para definir todos los conceptos colectados en la siguiente definición:

Definición 1.51 Diremos que X es *interior* a $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ si existe $\delta > 0$ tal que $B(X, \delta) \subset \mathcal{B}$. Diremos que X es *exterior* a \mathcal{B} , si el mismo es interior al *complemento* de \mathcal{B} en \mathcal{E}^3 , es decir, es interior a $\mathcal{B}^c = \{Y \in \mathcal{E}^3 : Y \notin \mathcal{B}\}$. En otro caso diremos que X *está en la frontera* de \mathcal{B} . Diremos que \mathcal{B} es *abierto* si todo punto $X \in \mathcal{B}$ es interior a \mathcal{B} . Diremos que \mathcal{B} es *cerrado* si \mathcal{B}^c es abierto. Definimos además la *clausura* de \mathcal{B} , con la notación $\overline{\mathcal{B}}$, como el menor conjunto cerrado que contiene a \mathcal{B} . Diremos que \mathcal{B} es *limitado* si existe X y $\delta > 0$ tal que $\mathcal{B} \subset B(X, \delta)$. Diremos que \mathcal{B} es *compacto* si es cerrado y limitado.

Teniendo la noción de distancia, y por lo tanto intervalos abiertos en \mathbb{R} y \mathcal{E}^3 , podemos definir con precisión la idea de continuidad. Por ejemplo una función del tipo $C : I \rightarrow \mathcal{E}^3$, donde $I = [\eta_1, \eta_2]$ es un intervalo en \mathbb{R} es lo que llamamos una *representación paramétrica* de una *curva orientada*. La continuidad es dada por:

Definición 1.52 Sea la representación paramétrica $C : I \rightarrow \mathcal{E}^3$ con $I \subset \mathbb{R}$. Diremos que C es *continua* en $\eta \in I$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $\xi \in I \cap B(\eta, \delta)$ se tiene $C(\xi) \in B(C(\eta), \varepsilon)$. Diremos además que C es *continua* en I si es continua en todo $\eta \in I$.

La *diferenciabilidad* de la representación paramétrica de la curva C es un concepto basado en la idea de límite, y nos permite definir rigurosamente el concepto de velocidad mencionado anteriormente:

Definición 1.53 Sea la representación paramétrica $C : I \rightarrow \mathcal{E}^3$ con $I \subset \mathbb{R}$. Diremos que C es *diferenciable* si para todo $\eta \in I$ existe un vector $\partial_\eta C(\eta) \in \mathcal{V}^3$, que cumple:

$$C(\eta + h) = C(\eta) + \partial_\eta C(\eta)h + \mathbf{o}(h), \quad \text{donde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{o}(h)}{|h|} = \mathbf{0}.$$

Incluso teniendo una representación paramétrica diferenciable, una curva puede tener vértices en algún punto, es decir, el vector tangente unitario puede no ser continuo. Para que el vector tangente unitario sea continuo es suficiente que el vector de velocidad $\partial_\eta C(\eta)$ sea continuo y no nulo.

Las curvas continuas tienen un rol importante en el estudio de las propiedades geométricas de un dominio $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$. Las ideas de *dominio conexo* y *dominio simplemente conexo* se basan en ciertas propiedades de las curvas continuas en esos dominios, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 1.54 Diremos que $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ es *conexo por caminos*, si dados dos puntos cualesquiera X y Y de \mathcal{B} existe $C : I \rightarrow \mathcal{E}^3$ continua con $I = [\eta_1, \eta_2] \subset \mathbb{R}$,

tal que $C(\eta_1) = X$ y $C(\eta_2) = Y$. Si además dadas dos curvas cualesquiera de ese tipo C_1 y C_2 , la segunda C_2 siempre puede transformarse continuamente en la primera cumpliendo siempre $C_2(\eta_1) = X$ y $C_2(\eta_2) = Y$, entonces diremos que el dominio \mathcal{B} es *simplemente conexo*.

Pasemos ahora a ver el principal tema de estudio de esta sección, que son las funciones definidas en \mathcal{E}^3 o subconjuntos del mismo, para luego pasar a ver los conceptos de límite y continuidad de estas funciones.

Definición 1.55 Dado $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$, diremos que las funciones siguientes son, respectivamente, un *campo escalar*, un *campo vectorial* y un *campo tensorial*:

$$f : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbf{v} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}^3, \quad \mathbf{L} : \mathcal{B} \rightarrow \text{Lin}.$$

Comencemos analizando el campo escalar f . Como hemos dicho la definición de continuidad es exactamente la misma que para funciones definidas en subconjuntos de \mathbb{R}^3 :

Definición 1.56 Diremos que el campo escalar f definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ es *continuo* en el punto $X \in \mathcal{B}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $Y \in \mathcal{B} \cap B(X, \delta)$ se tiene $f(Y) \in B(f(X), \varepsilon)$. Diremos además que f es *continuo* en \mathcal{B} si es continuo en todo punto $X \in \mathcal{B}$.

Note que la nociones de distancia en \mathcal{V}^3 y Lin nos permiten definir bolas abiertas en esos conjuntos, por lo cual la definición anterior se extiende naturalmente a campos vectoriales o tensoriales. Lo mismo ocurre con la nociones de *límite*. Veamos el caso de las funciones escalares. Para el límite se utiliza el aparato ε - δ en forma similar a la definición de continuidad, con la diferencia que el límite contempla el caso en que f pueda no estar definido en un punto X :

Definición 1.57 Sea un campo escalar f definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$. Diremos que L es el *límite* cuando $Y \rightarrow X$ de f , y lo indicaremos con la notación $L = \lim_{Y \rightarrow X} f(Y)$, si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $Y \in \mathcal{B} \cap B(X, \delta)$ con $Y \neq X$, se tiene $f(Y) \in B(L, \varepsilon)$.

Lema 1.58 Dado un campo escalar f definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$, si existe el límite $L = \lim_{Y \rightarrow X} f(Y)$, entonces es único. Si f es continua en X entonces $L = f(X)$.

Note que las ideas de continuidad y límite conducen naturalmente a extender otras ideas del cálculo en \mathbb{R}^n . Por ejemplo el concepto de diferenciabilidad:

Definición 1.59 Diremos que el campo escalar f definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ es *diferenciable* si para todo punto $X \in \mathcal{B}$ existe un funcional lineal $df(X) : \mathcal{V}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ que

cumple:

$$f(\mathbf{X} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{X}) + df(\mathbf{X})\mathbf{h} + o(\mathbf{h}), \quad \text{donde } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{o(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = 0.$$

El funcional lineal $df(\mathbf{X})$ es usualmente llamado *diferencial de f en \mathbf{X}* . Siendo $df(\mathbf{X})$ un funcional lineal, tenemos que $df(\mathbf{X})\mathbf{h}$ es un número real, el cual, para \mathbf{h} pequeño, es aproximadamente igual a la variación de f que se obtiene al desplazar el punto de evaluación de f de acuerdo con el vector \mathbf{h} . El funcional lineal $df(\mathbf{X})$ aporta bastante información sobre el campo escalar f en un entorno del punto \mathbf{X} . De hecho, en ese entorno el campo escalar f puede ser aproximado utilizando la expresión $f(\mathbf{Y}) \approx f(\mathbf{X}) + df(\mathbf{X})(\mathbf{Y} - \mathbf{X})$, la cual es usualmente llamada *aproximación de primer orden*, o *aproximación lineal* de f en \mathbf{X} .

Por otro lado, el teorema de representación de Riesz nos dice que el diferencial $df(\mathbf{X})$ tiene un representante en \mathcal{V}^3 que llamaremos *vector gradiente* de f en \mathbf{X} y denotaremos $\nabla f(\mathbf{X})$, el cual cumple $df(\mathbf{X})\mathbf{h} = \nabla f(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{h}$ para todo $\mathbf{h} \in \mathcal{V}^3$. El vector gradiente puede calcularse de acuerdo con el siguiente lema:

Lema 1.60 Si el campo escalar f definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ es *diferenciable*, entonces es continuo en \mathcal{B} , existen las *derivadas parciales* de f en \mathbf{X} definidas por:

$$\partial_i f(\mathbf{X}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{X} + h \mathbf{e}_i) - f(\mathbf{X})}{h} = \nabla f(\mathbf{X}) \cdot \mathbf{e}_i \quad \text{con } i = 1, \dots, 3,$$

y además el vector gradiente en \mathbf{X} es dado por:

$$\nabla f(\mathbf{X}) = \partial_1 f(\mathbf{X})\mathbf{e}_1 + \partial_2 f(\mathbf{X})\mathbf{e}_2 + \partial_3 f(\mathbf{X})\mathbf{e}_3.$$

La expresión final del lema anterior justifica pensar en ∇ como si fuera el vector $\nabla = (\partial_1)\mathbf{e}_1 + (\partial_2)\mathbf{e}_2 + (\partial_3)\mathbf{e}_3$, el cual, al multiplicarlo simbólicamente por el escalar $f(\mathbf{X})$ proporciona el gradiente $\nabla f(\mathbf{X})$. No es difícil ver que el vector gradiente es el que apunta en la dirección hacia donde más rápidamente crece f , y su magnitud depende de esa tasa de crecimiento. Además, a partir de aquí pensaremos en ∇f como el campo vectorial $\nabla f : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}^3$ que a cada punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ le hace corresponder el vector $\nabla f(\mathbf{X})$.

El concepto de diferenciabilidad de un campo escalar puede trasladarse a campos vectoriales y tensoriales sin mayor dificultad. Por ejemplo, en el caso de un campo vectorial $\mathbf{v} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}^3$ se introduce la siguiente definición:

Definición 1.61 Diremos que el campo vectorial \mathbf{v} definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ es *diferenciable* si para todo punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ existe un tensor $d\mathbf{v}(\mathbf{X}) \in \text{Lin}$ que cumple:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X} + \mathbf{h}) = \mathbf{v}(\mathbf{X}) + d\mathbf{v}(\mathbf{X})\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}), \quad \text{donde } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{o}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

Naturalmente, $d\mathbf{v}(\mathbf{X})$ es llamado *diferencial* de \mathbf{v} en \mathbf{X} . Siguiendo la mayor parte de la bibliografía, utilizaremos la notación $\nabla \mathbf{v}(\mathbf{X})$ en vez de $d\mathbf{v}(\mathbf{X})$ y diremos que

$\nabla \mathbf{v}(X)$ es el *gradiente* de \mathbf{v} en X , es decir, en el caso de un campo vectorial no haremos distinción entre los conceptos de diferencial y gradiente. En este caso el gradiente $\nabla \mathbf{v} : \mathcal{B} \rightarrow \text{Lin}$ es el campo tensorial que a cada punto X le asigna el tensor $\nabla \mathbf{v}(X)$. Al igual que en el caso anterior, un campo vectorial diferenciable es continuo, y el gradiente del mismo lo podemos obtener trabajando con el sistema de coordenadas habitual. Si el campo vectorial $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$ es diferenciable, entonces tenemos:

$$[\nabla \mathbf{v}]_{ij} = \partial_j v_i \quad \text{con } i, j = 1, \dots, 3.$$

En el caso de un campo vectorial se introducen además otros dos campos vectoriales obtenidos por diferenciación:

Definición 1.62 Si el campo vectorial \mathbf{v} definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ es diferenciable, entonces la *divergencia* $\nabla \cdot \mathbf{v}$ y el *rotacional* $\nabla \times \mathbf{v}$ son, respectivamente, los campos escalar y vectorial que cumplen:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \text{tr}(\nabla \mathbf{v}), \quad (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}^3 \text{ fijo.}$$

Las definiciones anteriores tienen la ventaja de introducir los conceptos sin hacer uso de cualquier base. Sin embargo, al igual que lo que ocurre con el gradiente de un campo escalar, la divergencia y el rotacional de un campo vectorial pueden ser calculados con la ayuda de la base habitual:

Lema 1.63 Si el campo $\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3$ es diferenciable, entonces:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= \partial_1 v_1 + \partial_2 v_2 + \partial_3 v_3, \\ \nabla \times \mathbf{v} &= (\partial_2 v_3 - \partial_3 v_2) \mathbf{e}_1 + (\partial_3 v_1 - \partial_1 v_3) \mathbf{e}_2 + (\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) \mathbf{e}_3. \end{aligned}$$

Estos resultados muestran que la divergencia y el rotacional pueden ser obtenidos operando normalmente con el vector simbólico $\nabla = (\partial_1) \mathbf{e}_1 + (\partial_2) \mathbf{e}_2 + (\partial_3) \mathbf{e}_3$. Además evidencian el fuerte vínculo que existe entre esos operadores y los productos escalar y vectorial. Por ejemplo la divergencia, al igual que el producto escalar, es generalizable a espacios de dimensión $n > 3$, mientras que el rotacional padece la misma deficiencia que el producto vectorial.

El rotacional tiene un papel relevante en los llamados *campos conservativos*, también llamados *campos de gradientes*, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 1.64 Un campo vectorial \mathbf{v} definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ es un *campo de gradientes* si existe un campo escalar f definido en \mathcal{B} tal que $\mathbf{v}(X) = \nabla f(X)$ para todo $X \in \mathcal{B}$.

Lema 1.65 Todo campo de gradientes $\mathbf{v} : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}^3$ cumple $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Si un campo vectorial \mathbf{v} cumple $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ y además \mathcal{B} es simplemente conexo, entonces \mathbf{v} es un campo de gradientes.

Sin temor a ser repetitivos, para un campo tensorial también introducimos el concepto de diferenciabilidad, de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 1.66 El campo tensorial \mathbf{L} definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ es *diferenciable* si para todo punto $\mathbf{X} \in \mathcal{B}$ existe una transformación lineal $d\mathbf{L}(\mathbf{X}) : \mathcal{V}^3 \rightarrow \text{Lin}$ que cumple:

$$\mathbf{L}(\mathbf{X} + \mathbf{h}) = \mathbf{L}(\mathbf{X}) + d\mathbf{L}(\mathbf{X})\mathbf{h} + \mathbf{o}(\mathbf{h}), \quad \text{donde } \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{o}(\mathbf{h})}{\|\mathbf{h}\|} = \mathbf{0}.$$

Definiciones independientes de base para la divergencia y el rotacional de un campo tensorial pueden ser introducidas apelando a la divergencia y el rotacional de campos vectoriales:

Definición 1.67 Si el campo tensorial \mathbf{L} definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ es diferenciable, entonces la *divergencia* $\nabla \cdot \mathbf{L}$ y el *rotacional* $\nabla \times \mathbf{L}$ son, respectivamente, los campos vectorial y tensorial que cumplen:

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{L}) \cdot \mathbf{u} &= \nabla \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}^3 \text{ fijo,} \\ (\nabla \times \mathbf{L})\mathbf{u} &= \nabla \times (\mathbf{L}^T \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}^3 \text{ fijo.} \end{aligned}$$

También en este caso podemos calcular la divergencia y el rotacional trabajando en la base habitual, y nuevamente obtendremos productos involucrando el vector simbólico ∇ , esta vez con las filas de la matriz del tensor. Note que si consideramos $\mathbf{u} = \mathbf{e}_i$ en las expresiones anteriores, entonces obtenemos la coordenada i de la divergencia $\nabla \cdot \mathbf{L}$, o la columna i completa de la matriz de $\nabla \times \mathbf{L}$, en términos, respectivamente, de la divergencia o el rotacional de la fila i de la matriz de \mathbf{L} .

Definición 1.68 Si los campos f , \mathbf{v} y \mathbf{L} definidos en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ son dos veces diferenciables, entonces se define el *laplaciano* de cada campo por las expresiones:

$$\begin{aligned} \Delta f &= \nabla \cdot (\nabla f), \\ \Delta \mathbf{v} &= \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}), \\ (\Delta \mathbf{L})\mathbf{u} &= \Delta(\mathbf{L}^T \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{V}^3 \text{ fijo.} \end{aligned}$$

Existen muchas identidades conocidas que involucran los operadores definidos. Las que se utilizan más frecuentemente en estos apuntes son dadas a continuación, donde f , \mathbf{v} y \mathbf{L} son campos suficientemente diferenciables:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= \mathbf{0}, \\ \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) &= 0, \\ \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v}^T) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \nabla \cdot (f\mathbf{v}) &= \nabla f \cdot \mathbf{v} + f(\nabla \cdot \mathbf{v}), \\ \nabla \cdot (f\mathbf{L}) &= \mathbf{L}\nabla f + f(\nabla \cdot \mathbf{L}), \\ \nabla \cdot (\mathbf{L}^T \mathbf{v}) &= (\nabla \cdot \mathbf{L}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{L} : \nabla \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Terminamos esta sección mencionando algunos teoremas importantes y que se utilizan con mucha frecuencia en el cálculo de derivadas. Los presentamos aquí para funciones definidas en dominios de \mathbb{R}^n , aunque estos resultados se extienden fácilmente a espacios vectoriales cualesquiera de dimensión finita o inclusive a espacios euclidianos, como por ejemplo \mathcal{E}^3 . El primer teorema es conocido como *regla de la cadena* y nos dice cómo calcular el gradiente de una función que se obtiene como la composición de dos funciones:

Teorema 1.69 (Regla de la cadena) Sean dos dominios abiertos $D \subset \mathbb{R}^n$ y $E \subset \mathbb{R}^m$ y las funciones $\mathbf{f} : D \rightarrow E$ y $\mathbf{g} : E \rightarrow \mathbb{R}^p$. Supongamos que \mathbf{f} es diferenciable en $\mathbf{X} \in D$ y \mathbf{g} es diferenciable en $\mathbf{f}(\mathbf{X}) \in E$. Entonces la composición $\mathbf{h} = \mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ es diferenciable en \mathbf{X} y su gradiente es:

$$\nabla \mathbf{h}(\mathbf{X}) = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{X})) \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}).$$

El teorema siguiente expresa una condición suficiente para la existencia local de la función inversa, y expresa además cómo se obtiene el gradiente de la misma:

Teorema 1.70 (Teorema de la función inversa) Sea el dominio abierto $D \subset \mathbb{R}^n$ y una función $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ que es *continuamente diferenciable* en D , es decir, su gradiente es continuo en D . Supongamos que en el punto $\mathbf{X} \in D$ se tiene que $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X})$ es una transformación lineal invertible. Entonces existen entornos abiertos $U \subset D$ con $\mathbf{X} \in U$ y $V \subset \mathbb{R}^n$, tales que \mathbf{f} es biyectiva entre U y V . Además, el gradiente de la función inversa $\mathbf{f}^{-1} : V \rightarrow U$ es dado por:

$$\nabla (\mathbf{f}^{-1})(\mathbf{f}(\mathbf{X})) = (\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}))^{-1}.$$

En forma análoga a la definición de derivada parcial, podemos introducir el *gradiente parcial* respecto de $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$ de la función diferenciable $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ definida en el dominio abierto $D \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, como el gradiente $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{f}(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{Y}})$ de la función $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{X}, \bar{\mathbf{Y}})$, donde $\bar{\mathbf{Y}}$ es fijo. El teorema siguiente utiliza ese concepto y expresa una condición suficiente para la existencia local de la *función implícita*, así como la expresión de su gradiente:

Teorema 1.71 (Teorema de la función implícita) Sea $D \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ y una función $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ *continuamente diferenciable* en D . Supongamos que en el punto $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}}) \in D$, con $\bar{\mathbf{X}} \in \mathbb{R}^m$ y $\bar{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^n$, se tiene $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}}) = \mathbf{0}$, y además el gradiente parcial $\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{f}(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{Y}})$ es una transformación lineal invertible. Entonces existe un entorno abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ con $\bar{\mathbf{Y}} \in U$ y una función $\mathbf{g} : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ continuamente diferenciable en U que cumple:

$$\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}), \mathbf{Y}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{Y} \in U.$$

Además, el gradiente $\nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{g}(\mathbf{Y})$ satisface:

$$\nabla_{\mathbf{X}} \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}), \mathbf{Y}) \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{g}(\mathbf{Y}) + \nabla_{\mathbf{Y}} \mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{Y}), \mathbf{Y}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{Y} \in U.$$

En pocas palabras, el teorema anterior expresa que si tenemos m ecuaciones, del tipo $\mathbf{f}(X, Y) = \mathbf{0}$, entonces bajo ciertas condiciones podemos obtener las primeras m componentes de una solución para una dada elección arbitraria de las últimas n componentes, y esa solución define la *función implícita* \mathbf{g} .

1.6. Cálculo integral vectorial

Vamos ahora a pasar al tema de integración. Note que el sistema de coordenadas cartesiano $\{\mathbf{O}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ sirve para transformar regiones de \mathcal{E}^3 en regiones de \mathbb{R}^3 con iguales propiedades de longitud, área y volumen, por lo que la integración en \mathcal{E}^3 no tiene aspectos esenciales que lo diferencien de la integración en \mathbb{R}^3 . De todas maneras repasaremos caso por caso las definiciones y resultados que más nos interesan en estos apuntes. Consideraremos solamente la integración de campos escalares y vectoriales, puesto que la integración de expresiones que involucren campos tensoriales puede definirse a partir de los casos anteriores.

Supongamos que tenemos una curva orientada dada por la representación paramétrica $C : I \rightarrow \mathcal{E}^3$, donde $I = [\eta_1, \eta_2]$ es un intervalo en \mathbb{R} . Entonces el *diferencial de longitud* y el *elemento diferencial de arco* correspondientes a la curva orientada C son dados respectivamente por $ds = \|\partial_\eta C\| d\eta$, y $ds = \partial_\eta C d\eta$. Note que si \mathbf{t} es el vector tangente unitario de la curva C entonces tenemos $ds = \mathbf{t} ds$. Los nombres de los diferenciales son motivados por las siguientes expresiones:

$$\text{long}(C) = \int_C ds := \int_I \|\partial_\eta C\| d\eta, \quad C(\eta_2) - C(\eta_1) = \int_C ds := \int_I \partial_\eta C d\eta,$$

donde $\text{long}(C)$ es la longitud de la curva C . No es difícil demostrar utilizando el teorema del cambio de variable para integrales reales que las expresiones anteriores no dependen de la representación paramétrica considerada. Ese será el caso también de las expresiones integrales que sigan, a menos que sea explícitamente aclarado.

Supongamos ahora que f y \mathbf{v} son campos definidos sobre una región que contiene la trayectoria de la curva C . Admitamos los siguientes abusos de notación: $f(\eta) = f(C(\eta))$ y $\mathbf{v}(\eta) = \mathbf{v}(C(\eta))$, es decir, llamaremos con los mismos nombres a las funciones definidas sobre I que al ser evaluadas en $\eta \in I$ proporcionan los campos originales evaluados en el punto $C(\eta)$. Entonces, las integrales de f y \mathbf{v} sobre la curva orientada C son dadas por:

$$\int_C f ds := \int_I f \|\partial_\eta C\| d\eta, \quad \int_C \mathbf{v} ds := \int_I \mathbf{v} \|\partial_\eta C\| d\eta.$$

El otro caso que nos interesará es el de la *circulación* del campo vectorial \mathbf{v} sobre la curva orientada C :

$$\int_C \mathbf{v} \cdot ds := \int_I \mathbf{v} \cdot \partial_\eta C d\eta.$$

Veamos ahora el caso de las integrales de superficie, y para eso consideremos una representación paramétrica de una superficie orientada $S : D \rightarrow \mathcal{E}^3$, donde

$D \subset \mathbb{R}^2$. Sea (η, ξ) un punto genérico en D y $\mathcal{S}(\eta, \xi)$ el punto correspondiente de la superficie orientada. El *diferencial de área* es $da = \|\partial_\eta \mathcal{S} \times \partial_\xi \mathcal{S}\| d\eta d\xi$, mientras que el *elemento diferencial de superficie* es $\mathbf{da} = \partial_\eta \mathcal{S} \times \partial_\xi \mathcal{S} d\eta d\xi$. Note que en este caso tenemos $\mathbf{da} = \mathbf{n} da$ donde \mathbf{n} es el vector normal unitario de la superficie \mathcal{S} . Con esto ya podemos pasar a calcular integrales en la superficie. Por ejemplo, si llamamos $\text{área}(\mathcal{S})$ al área de la superficie \mathcal{S} , tenemos:

$$\text{área}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} da := \int_D \|\partial_\eta \mathcal{S} \times \partial_\xi \mathcal{S}\| d\eta d\xi.$$

Si en cambio integramos el elemento diferencial de superficie, el resultado es vectorial y, al igual que al integrar el elemento diferencial de arco, el resultado no depende de la geometría de la superficie sino de la geometría de su borde $\partial\mathcal{S}$ cuya orientación proviene de la orientación de \mathcal{S} de acuerdo con la regla de la mano derecha. Así, dado cualquier $\mathbf{O} \in \mathcal{E}^3$ fijo y el campo $\mathbf{r}(X) = X - \mathbf{O}$ se tiene:

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{da} := \int_D \partial_\eta \mathcal{S} \times \partial_\xi \mathcal{S} d\eta d\xi = \int_{\partial\mathcal{S}} \frac{1}{2} \mathbf{r} \times d\mathbf{s}.$$

El resultado anterior no nos será de mucho interés. Lo que más nos interesará en estos apuntes será la integral en la superficie \mathcal{S} de los campos f y \mathbf{v} ,

$$\int_{\mathcal{S}} f da := \int_D f \|\partial_\eta \mathcal{S} \times \partial_\xi \mathcal{S}\| d\eta d\xi, \quad \int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} da := \int_D \mathbf{v} \|\partial_\eta \mathcal{S} \times \partial_\xi \mathcal{S}\| d\eta d\xi,$$

y el *flujo normal* del campo \mathbf{v} a través de \mathcal{S} :

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{v} \cdot \mathbf{da} := \int_D \mathbf{v} \cdot (\partial_\eta \mathcal{S} \times \partial_\xi \mathcal{S}) d\eta d\xi.$$

Resta solamente introducir las integrales de volumen. Sea $\mathcal{B} : V \rightarrow \mathcal{E}^3$ una representación paramétrica de un volumen orientado en \mathcal{E}^3 , con $V \subset \mathbb{R}^3$. A diferencia de los casos anteriores, a un cierto volumen no le corresponde una dirección vectorial, sino solamente una orientación escalar positiva o negativa, por lo que no introduciremos en este caso dos elementos diferenciales distintos. Asumiremos que la orientación del volumen es positiva, es decir, dado $(\eta, \xi, \delta) \in V$ de punto correspondiente $\mathcal{B}(\eta, \xi, \delta)$, asumiremos que $\partial_\eta \mathcal{B} \cdot (\partial_\xi \mathcal{B} \times \partial_\delta \mathcal{B}) > 0$. El *elemento diferencial de volumen* es: $dv = \partial_\eta \mathcal{B} \cdot (\partial_\xi \mathcal{B} \times \partial_\delta \mathcal{B}) d\eta d\xi d\delta$, por lo que el volumen $\text{vol}(\mathcal{B})$ del dominio \mathcal{B} es:

$$\text{vol}(\mathcal{B}) = \int_{\mathcal{B}} dv := \int_V \partial_\eta \mathcal{B} \cdot (\partial_\xi \mathcal{B} \times \partial_\delta \mathcal{B}) d\eta d\xi d\delta.$$

Por otro lado, el volumen también queda definido por la geometría de la superficie $\partial\mathcal{B}$ que lo limita, y fórmulas dadas por una integral en $\partial\mathcal{B}$ son fáciles de obtener. Pero más nos interesan las integrales en el cuerpo \mathcal{B} de los campos f y \mathbf{v} :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} f dv &:= \int_V f \partial_\eta \mathcal{B} \cdot (\partial_\xi \mathcal{B} \times \partial_\delta \mathcal{B}) d\eta d\xi d\delta, \\ \int_{\mathcal{B}} \mathbf{v} dv &:= \int_V \mathbf{v} \partial_\eta \mathcal{B} \cdot (\partial_\xi \mathcal{B} \times \partial_\delta \mathcal{B}) d\eta d\xi d\delta. \end{aligned}$$

Se recuerda que se ha supuesto en las expresiones anteriores que la orientación del volumen dada por la expresión paramétrica $\mathcal{B}(\eta, \xi, \delta)$ es positiva. Si en un cálculo práctico se trabaja con la orientación negativa, entonces debe cambiarse el signo en las integrales anteriores, o bien considerarse el *diferencial de volumen* con la expresión $dv = |\partial_\eta \mathcal{B} \cdot (\partial_\xi \mathcal{B} \times \partial_\delta \mathcal{B})| d\eta d\xi d\delta$.

Tenemos ahora todos los elementos necesarios para enunciar los tres teoremas más importantes de integración en el cálculo vectorial. Los mismos son válidos bajo condiciones de regularidad que son difíciles de expresar. No indicaremos aquí las condiciones más precisas y generales. Simplemente indicaremos que los volúmenes que consideremos son limitados por una superficie parametrizable bilátera de normal unitaria continua, o por la unión de un conjunto finito de tales superficies. Como ejemplo sirve un cubo que es limitado por seis superficies parametrizables de normal unitaria continua. En el caso de superficies requeriremos que su borde sea limitado por una o la unión de un número finito de curvas parametrizables de vector tangente unitario continuo.

Teorema 1.72 (Teorema fundamental del cálculo) Sea C una curva orientada en \mathcal{E}^3 que va desde el punto $X_1 = C(\eta_1)$ hasta el punto $X_2 = C(\eta_2)$. Sea además un campo escalar f diferenciable definido en una región que contiene la curva C . Entonces se cumple:

$$\int_C \nabla f \cdot ds = f(X_2) - f(X_1).$$

Teorema 1.73 (Teorema de Kelvin-Stokes) Sea S una superficie orientada en \mathcal{E}^3 limitada por la curva ∂S cuya orientación se corresponde con la orientación de la superficie de acuerdo con la regla de la mano derecha. Sea además un campo vectorial \mathbf{v} diferenciable definido en una región que contiene la superficie S y su borde ∂S . Entonces se cumple:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{a} = \int_{\partial S} \mathbf{v} \cdot ds.$$

Teorema 1.74 (Teorema de Ostrogradsky-Gauss) Sea \mathcal{B} un volumen de orientación positiva limitado por la superficie $\partial \mathcal{B}$ orientada de tal forma que su elemento diferencial de superficie es saliente a \mathcal{B} . Sea además un campo vectorial \mathbf{v} diferenciable definido en una región que contiene el cuerpo \mathcal{B} y su superficie $\partial \mathcal{B}$. Entonces se cumple:

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla \cdot \mathbf{v} dv = \int_{\partial \mathcal{B}} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{a}.$$

Los últimos dos teoremas son frecuentemente utilizados para interpretar físicamente el rotacional y la divergencia de un campo vectorial. Por ejemplo, la di-

vergenza del campo vectorial recibe la siguiente interpretación. Asuma que \mathbf{v} es el campo de velocidades de un cierto fluido. Si el fluido está expandiéndose en un cierto punto, entonces a través de la superficie $\partial\mathcal{B}$ de un entorno pequeño \mathcal{B} que contiene el punto se tendrá un cierto flujo normal positivo. De acuerdo con el teorema de Gauss, se tiene que la divergencia deberá ser positiva si el fluido se expande, mientras que será negativa en el caso contrario cuando el fluido se contrae. Más precisamente, puede demostrarse que la divergencia en un punto del campo de velocidades es exactamente igual a la variación de volumen de pequeños entornos de ese punto, medida por unidad de volumen y por unidad de tiempo.

No iremos tan lejos como para demostrar formalmente el significado físico descrito de la divergencia, pues para eso es necesario introducir conceptos acerca de la descripción cinemática de un movimiento que no serán necesarios en estos apuntes. Sí intentaremos demostrar el llamado *lema de localización* el cual es frecuentemente utilizado en estos apuntes y sirve para interpretar físicamente el integrando de una expresión integral. Comenzaremos enunciando el siguiente resultado sobre las funciones continuas, sin abordar su demostración:

Teorema 1.75 (Teorema del valor medio del cálculo integral) Sea \mathcal{B} un dominio compacto y conexo por caminos de \mathcal{E}^3 . Sea f un campo escalar continuo definido en \mathcal{B} . Entonces existe un punto $X \in \mathcal{B}$ tal que:

$$f(X) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} f \, dv.$$

El *valor medio* es el término a la derecha en la igualdad del teorema. El teorema dice que existe un punto donde el integrando es igual a su valor medio en todo el dominio. Note que las hipótesis mencionadas en el teorema son todas necesarias, pues es fácil encontrar contraejemplos para los casos en que \mathcal{B} no sea compacto, no sea conexo, o el campo escalar f no sea continuo. El teorema tampoco es válido para un campo vectorial, pues el punto donde asume el valor medio la primera coordenada del vector en una cierta base puede ser diferente del punto adecuado para la segunda coordenada o del punto adecuado para la tercera. Lo que sí podemos decir es que el teorema del valor medio del cálculo integral sí funciona para integrales de campos escalares en curvas o en superficies, con la diferencia que en esos casos el valor medio se encuentra dividiendo la integral por la longitud de la curva o el área de la superficie de acuerdo con el caso considerado.

Lema 1.76 (Lema de localización) Sea un dominio $\mathcal{D}(\varepsilon) \subset \mathcal{E}^3$ compacto y conexo dependiente del parámetro $\varepsilon > 0$. Supongamos $X \in \mathcal{D}(\varepsilon) \forall \varepsilon > 0$, y además el diámetro de $\mathcal{D}(\varepsilon)$ tiende a cero con ε , es decir, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{diám}(\mathcal{D}(\varepsilon)) = 0$. Entonces, para cualquier campo escalar f continuo se cumple:

$$f(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{D}(\varepsilon))} \int_{\mathcal{D}(\varepsilon)} f \, dv.$$

Demostración. Por el teorema del valor medio del cálculo integral sabemos que

existe $Y(\varepsilon) \in \mathcal{D}(\varepsilon)$ tal que:

$$f(Y(\varepsilon)) = \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{D}(\varepsilon))} \int_{\mathcal{D}(\varepsilon)} f \, dv.$$

Basta tomar el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ en la expresión anterior. Como se cumple $\|Y(\varepsilon) - X\| < \text{diám}(\mathcal{D}(\varepsilon))$, tenemos $Y(\varepsilon) \rightarrow X$ y entonces $f(Y(\varepsilon)) \rightarrow f(X)$. \square

Una cuestión interesante es que el lema de localización sí funciona con campos vectoriales y tensoriales! Veamos esto para el caso de un campo vectorial \mathbf{v} . La clave es considerar una base, y ver que la coordenada v_i del campo es escalar y por lo tanto $v_i(X)$ se obtiene al encontrar el límite del lema de localización. Si lema funciona para cada coordenada, entonces funciona para el campo vectorial. ¿Cómo permite el lema de localización interpretar el significado físico de un integrando? La respuesta es la siguiente. Supongamos que una cierta magnitud física, asociada a un cierto volumen de material, se encuentra integrando en ese volumen un campo escalar o vectorial continuo. Por ejemplo digamos que la magnitud es la *entropía* y f es el campo escalar a integrar. De acuerdo con el lema de localización, si consideramos un entorno \mathcal{D} suficientemente pequeño que contenga a X tenemos:

$$f(X) \approx \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{D})} \int_{\mathcal{D}} f \, dv,$$

donde no se ha utilizado el símbolo de igualdad porque la igualdad se cumple solamente en el límite cuando el diámetro del entorno tiende a cero. Por lo tanto, $f(X)$ se interpreta físicamente como la *entropía por unidad de volumen* de pequeños entornos que contengan el punto X .

Otra utilidad del lema de localización es en la obtención de resultados puntuales cuando se cuenta con expresiones integrales válidas para dominios arbitrarios. Por ejemplo, supongamos que la entropía de un dominio \mathcal{D} cualquiera contenido en \mathcal{B} es cero. Entonces consideramos un dominio variable $\mathcal{D}(\varepsilon)$ de acuerdo con las hipótesis del lema de localización y calculamos el límite considerando un cierto punto específico X . Visto que la integral es siempre cero, entonces el límite es cero y por lo tanto $f(X)$ debe ser cero. Como X es cualquier punto, entonces el campo escalar continuo f debe ser nulo en todo \mathcal{B} . Esta es la forma en que el lema es utilizado en estos apuntes, la cual funciona porque las expresiones de equilibrio, y en general cualquier expresión de balance en la termodinámica de cuerpos continuos, son dadas en forma integral involucrando dominios arbitrarios.

1.7. Cálculo variacional

Esta sección presenta una introducción al *cálculo variacional* que, a diferencia de los temas tratados en las secciones anteriores de este capítulo, no es habitualmente introducido en cursos de grado de ingeniería. Por esta razón se realizará una exposición más desarrollada, incluyendo demostraciones de resultados y ejemplos.

La idea central del cálculo de variaciones es la de encontrar *máximos*, *mínimos* o inclusive *puntos estacionarios de funcionales*. En lo que sigue consideraremos un *funcional* $\mathcal{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, donde \mathcal{U} es un subconjunto afín cerrado de un *espacio de Banach*, es decir, un espacio vectorial normado y completo. Por lo general consideraremos \mathcal{U} como un espacio de funciones de algún tipo, y usualmente será de dimensión infinita. Ese es el caso por ejemplo al considerar el conjunto de las funciones continuas definidas en un cierto dominio, o el conjunto de las funciones diferenciables en el mismo dominio. Lo importante es que esos espacios cuenten con una norma con la cual sea *completo*, es decir, sea tal que las sucesiones de Cauchy en ese espacio sean convergentes. Para ese conjunto \mathcal{U} definimos el conjunto de las *variaciones* $\bar{\mathcal{U}}$ como el conjunto de los elementos \bar{u} tales que $u + \bar{u}$ pertenece a \mathcal{U} para todo elemento u de \mathcal{U} . Como \mathcal{U} es un subconjunto afín cerrado del espacio de Banach, entonces $\bar{\mathcal{U}}$ es un subespacio vectorial cerrado del mismo, y por lo tanto la combinación lineal de variaciones es una variación de $\bar{\mathcal{U}}$.

Pasemos a ver los conceptos utilizados para estimar la *variación* $\mathcal{F}(u + \bar{u}) - \mathcal{F}(u)$ de un funcional \mathcal{F} continuo cuando el elemento u es perturbado por una *variación* \bar{u} pequeña. La definición de continuidad en espacios de Banach no es diferente que en el caso de funciones definidas en espacios de dimensión finita. De hecho, al ser \mathcal{U} normado, podemos definir las bolas abiertas $B(u, \varepsilon) = \{w : \|w - u\| < \varepsilon\}$, y copiar la definición que teníamos para funciones en espacios de dimensión finita:

Definición 1.77 Diremos que el funcional \mathcal{F} definido en \mathcal{U} es *continuo* en $u \in \mathcal{U}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para todo $w \in \mathcal{U} \cap B(u, \delta)$ se tiene $\mathcal{F}(w) \in B(\mathcal{F}(u), \varepsilon)$. Diremos además que \mathcal{F} es *continuo* en \mathcal{U} si es continuo en todo elemento $u \in \mathcal{U}$.

Si \mathcal{U} fuera de dimensión finita, por ejemplo $\mathcal{U} = \mathbb{R}$, entonces el concepto de derivada direccional nos permitiría estimar la variación del funcional, puesto que si \mathcal{F} es diferenciable y la variación \bar{u} es pequeña, entonces $\mathcal{F}(u + \bar{u}) \approx \mathcal{F}(u) + \partial_u \mathcal{F}(u) \bar{u}$, resultado que se obtiene de la expansión que satisfacen las funciones reales diferenciables:

$$\mathcal{F}(u + \bar{u}) = \mathcal{F}(u) + \partial_u \mathcal{F}(u) \bar{u} + o(\bar{u}), \quad \text{donde } \lim_{\bar{u} \rightarrow 0} \frac{o(\bar{u})}{|\bar{u}|} = 0.$$

Por lo tanto en ese caso simple podemos estimar la variación de \mathcal{F} como la derivada $\partial_u \mathcal{F}(u)$ multiplicada por la variación \bar{u} . Necesitamos entonces una definición que extienda el concepto de derivada direccional a espacios de dimensión infinita, y esa definición es dada a continuación.

Definición 1.78 (Derivada direccional de Gâteaux) Dado un funcional \mathcal{F} definido en \mathcal{U} , diremos que $\delta_{\bar{u}} \mathcal{F}(u)$ es la *derivada direccional de Gâteaux* de \mathcal{F} en u según la dirección $\bar{u} \neq 0$, si se cumple la siguiente expansión para $\varepsilon \geq 0$:

$$\mathcal{F}(u + \varepsilon \bar{u}) = \mathcal{F}(u) + \delta_{\bar{u}} \mathcal{F}(u) \varepsilon + o(\varepsilon), \quad \text{donde } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = 0.$$

Note la similitud en la expansión del funcional \mathcal{F} con respecto a la expansión de una función real. Se indica que la notación $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u)$ no es estándar en la literatura, pero se ha utilizado aquí para destacar la semejanza con la definición habitual de derivada direccional en espacios de dimensión finita. El lema siguiente presenta el resultado más importante con respecto al cálculo práctico de las derivadas direccionales de Gâteaux de un funcional.

Lema 1.79 Si $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u)$ es la derivada direccional de Gâteaux de \mathcal{F} en u según la dirección \bar{u} , entonces se cumple, para la derivada unilateral con $\varepsilon \geq 0$:

$$\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = \partial_{\varepsilon} [\mathcal{F}(u + \varepsilon\bar{u})]_{\varepsilon=0} .$$

Demostración. De la definición de derivada unilateral, considerando la expansión que satisface \mathcal{F} , fácilmente obtenemos:

$$\partial_{\varepsilon} [\mathcal{F}(u + \varepsilon\bar{u})]_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{F}(u + \varepsilon\bar{u}) - \mathcal{F}(u)}{\varepsilon} = \delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} = \delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u),$$

lo cual demuestra el lema. □

En el caso en que las derivadas direccionales de Gâteaux son todas dadas por un mismo funcional lineal continuo, entonces definimos la derivada de Gâteaux como siendo ese funcional:

Definición 1.80 (Derivada de Gâteaux) Dado un funcional \mathcal{F} definido en \mathcal{U} , diremos que $\delta\mathcal{F}(u)$ es la *derivada de Gâteaux* de \mathcal{F} en u si $\delta\mathcal{F}(u)$ es un funcional lineal continuo que satisface:

$$\delta\mathcal{F}(u)[\bar{u}] = \delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}} .$$

Es importante señalar que la derivada de Gâteaux de \mathcal{F} en el elemento u considera separadamente cuánto vale \mathcal{F} a lo largo de las diferentes semirrectas de dirección \bar{u} , sin tener en cuenta cómo se comporta \mathcal{F} en un entorno completo de u . Por esta razón la diferenciabilidad (en el sentido que presentaremos a continuación en el caso de espacios de dimensión infinita) como la continuidad de \mathcal{F} pueden no satisfacerse inclusive en el caso que exista la derivada de Gâteaux $\delta\mathcal{F}(u)$. Esto es mostrado en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 1.81 Sea $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, y el funcional $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\|$ (utilizamos la notación negrita como de costumbre para vectores en \mathbb{R}^n), donde la norma es la habitual euclidiana de ese espacio. Entonces, la derivada direccional de Gâteaux en el origen $\mathbf{0}$ es:

$$\delta_{\bar{\mathbf{u}}}\mathcal{F}(\mathbf{0}) = \partial_{\varepsilon} \|\mathbf{0} + \varepsilon\bar{\mathbf{u}}\|_{\varepsilon=0} = \partial_{\varepsilon} [\varepsilon\|\bar{\mathbf{u}}\|]_{\varepsilon=0} = \|\bar{\mathbf{u}}\| ,$$

con lo cual la misma existe según todas las direcciones de \mathbb{R}^n . Se deja como ejer-

cicio mostrar que no existe la derivada de Gâteaux $\delta\mathcal{F}(\mathbf{0})$ ni \mathcal{F} es diferenciable en $\mathbf{0}$ de acuerdo con la definición habitual de diferenciabilidad en \mathbb{R}^n .

Ejemplo 1.82 Sea $\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$, y el funcional $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = 1$ cuando $u_1^2 < u_2 < 2u_1^2$, y $\mathcal{F}(\mathbf{u}) = 0$ en el caso contrario. Claramente $\mathcal{F}(\mathbf{0}) = 0$, y $\delta_{\bar{\mathbf{u}}}\mathcal{F}(\mathbf{0}) = 0$ para todo $\bar{\mathbf{u}}$ tal que $u_2 \leq 0$ (\mathcal{F} se anula en toda la semirrecta de interés). En el caso $u_2 > 0$ debemos evaluar \mathcal{F} en el punto $\varepsilon(u_1, u_2)$, pero $\varepsilon u_2 \geq 2(\varepsilon u_1)^2$ en el caso $u_1 = 0$, y además $\varepsilon u_2 \geq 2(\varepsilon u_1)^2$ para todo $\varepsilon \leq u_2/(2u_1^2)$ en el caso $u_1 \neq 0$. Con eso tenemos $\mathcal{F}(\varepsilon\bar{\mathbf{u}}) = 0$ en el intervalo de interés de la semirrecta, y por lo tanto $\delta_{\bar{\mathbf{u}}}\mathcal{F}(\mathbf{0}) = 0$. Se tiene entonces $\delta_{\bar{\mathbf{u}}}\mathcal{F}(\mathbf{0}) = 0$ para toda dirección $\bar{\mathbf{u}}$. Se deja como ejercicio mostrar que \mathcal{F} no es continua ni diferenciable en $\mathbf{0}$ en el sentido habitual de continuidad y diferenciabilidad en \mathbb{R}^n .

Los ejemplos anteriores muestran algunas deficiencias del concepto de diferenciabilidad de Gâteaux, lo que no evitará que nos sea un concepto útil en el cálculo variacional. La derivada de Fréchet definida a continuación tiene en espacios de dimensión infinita propiedades similares al diferencial que hemos definido en espacios de dimensión finita:

Definición 1.83 (Derivada de Fréchet) Dado un funcional \mathcal{F} definido en \mathcal{U} , diremos que $\delta\mathcal{F}(u)$ es la derivada de Fréchet de \mathcal{F} en el elemento u , si $\delta\mathcal{F}(u)$ es un funcional lineal continuo que satisface la siguiente expansión:

$$\mathcal{F}(u + \bar{u}) = \mathcal{F}(u) + \delta\mathcal{F}(u)[\bar{u}] + o(\bar{u}), \quad \text{donde } \lim_{\bar{u} \rightarrow 0} \frac{o(\bar{u})}{\|\bar{u}\|} = 0.$$

El límite de la definición anterior se define exactamente igual que en espacios de dimensión finita, utilizando el aparato ε - δ y las bolas abiertas como en la definición de continuidad. Tal como en espacios de dimensión finita, puede demostrarse con facilidad que la derivada de Fréchet es única en el caso de que exista. Para el caso en que \bar{u} sea pequeño, la derivada de Fréchet nos proporciona la estimación $\mathcal{F}(u + \bar{u}) \approx \mathcal{F}(u) + \delta\mathcal{F}(u)[\bar{u}]$.

El concepto de diferenciabilidad de Fréchet es más fuerte que el de Gâteaux, lo cual es mostrado en el ejercicio siguiente:

Ejercicio 1.84 Dado un funcional \mathcal{F} Fréchet diferenciable en el elemento u , entonces \mathcal{F} es continuo en u , existen las derivadas direccionales de Gâteaux $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u)$ según cualquier dirección \bar{u} , y además existe la derivada de Gâteaux $\delta\mathcal{F}(u)$, la cual coincide con la derivada de Fréchet.

Una de las aplicaciones del cálculo variacional es en la formulación de condiciones de optimalidad para un cierto *elemento mínimo* u de acuerdo con la siguiente definición:

Definición 1.85 Diremos que u es un *mínimo global* del funcional \mathcal{F} definido

en \mathcal{U} si $\mathcal{F}(u) \leq \mathcal{F}(w)$ para todo $w \in \mathcal{U}$. Diremos que u es un *mínimo local* del funcional \mathcal{F} si existe $\varepsilon > 0$ tal que u es mínimo global en $B(u, \varepsilon) \cap \mathcal{U}$.

Naturalmente, todo mínimo global es también un mínimo local del funcional \mathcal{F} . Usualmente estamos interesados en hallar mínimos globales de funcionales, pero habitualmente esa tarea es difícil, por lo que primero se procede a localizar mínimos locales del funcional, con la esperanza de que alguno de los mínimos locales encontrados sea el mínimo global. El lema siguiente expresa condiciones de optimalidad necesarias para que un cierto elemento $u \in \mathcal{U}$ sea mínimo local.

Lema 1.86 Si $u \in \mathcal{U}$ es un mínimo local de \mathcal{F} , y existe la derivada direccional de Gâteaux $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u)$, entonces $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) \geq 0$. Si además $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u)$ es lineal en \bar{u} , entonces $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = 0$ para toda variación $\bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}$.

Demostración. Si u es un mínimo local, entonces para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tenemos $\mathcal{F}(u + \varepsilon\bar{u}) \geq \mathcal{F}(u)$, por lo tanto:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{F}(u + \varepsilon\bar{u}) - \mathcal{F}(u)}{\varepsilon} = \partial_\varepsilon [\mathcal{F}(u + \varepsilon\bar{u})]_{\varepsilon=0} = \delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) \geq 0.$$

La desigualdad anterior para la variación $-\bar{u}$ es $\delta_{(-\bar{u})}\mathcal{F}(u) \geq 0$, por lo que si $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u)$ es lineal en \bar{u} , entonces $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = -\delta_{(-\bar{u})}\mathcal{F}(u) \leq 0$, por lo que debe cumplirse $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = 0$. \square

Pasemos a ver algunas aplicaciones del cálculo variacional. El primer ejemplo consiste en la demostración de que el camino más corto entre dos puntos del espacio \mathcal{E}^3 es el segmento de recta que une esos puntos.

Ejemplo 1.87 Sean X y Y dos puntos diferentes en \mathcal{E}^3 , y sea \mathcal{U} el conjunto de las curvas paramétricas diferenciables que unen esos puntos del tipo $u : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{E}^3$ tales que $u(t_1) = X$ y $u(t_2) = Y$. Sea $\bar{\mathcal{U}}$ el conjunto de las posibles variaciones de esas curvas, es decir el conjunto de las funciones diferenciables $\bar{u} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathcal{V}^3$ tales que $\bar{u}(t_1) = \mathbf{0}$ y $\bar{u}(t_2) = \mathbf{0}$. El funcional \mathcal{F} lo definimos como la longitud de la curva paramétrica. Siendo $\partial_t u$ la velocidad de la curva, entonces tenemos:

$$\mathcal{F}(u) = \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t u\| dt.$$

Consideremos ahora la variación \bar{u} y calculemos la derivada direccional de Gâteaux (en caso de que exista). Por el Lema 1.79 tenemos:

$$\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = \partial_\varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t u + \varepsilon\partial_t \bar{u}\| dt \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{t_1}^{t_2} \partial_\varepsilon \|\partial_t u + \varepsilon\partial_t \bar{u}\| dt \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Siendo $\|\partial_t u + \varepsilon\partial_t \bar{u}\| = [(\partial_t u + \varepsilon\partial_t \bar{u}) \cdot (\partial_t u + \varepsilon\partial_t \bar{u})]^{1/2}$, podemos calcular la deri-

vada y luego evaluar en $\varepsilon = 0$ para obtener:

$$\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = \int_{t_1}^{t_2} (\|\partial_t u\|^{-1} \partial_t u) \cdot \partial_t \bar{u} \, dt.$$

La expresión anterior muestra que $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u)$ es lineal en \bar{u} , y entonces el Lema 1.86 nos dice que la curva paramétrica u de mínima longitud cumple $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = 0$. Sin embargo, la expresión anterior no es práctica por lo siguiente. Si asumimos que u es un mínimo local de \mathcal{F} , entonces la integral anterior se anula, y como \bar{u} es arbitraria, la expresión sugiere que lo que se debe anular es la parte $(\|\partial_t u\|^{-1} \partial_t u)$ del integrando que no depende de \bar{u} . Sin embargo, siendo $\bar{u}(t_1) = \mathbf{0}$ y $\bar{u}(t_2) = \mathbf{0}$, vemos que en realidad eso no es así. Es fácil ver que si $(\|\partial_t u\|^{-1} \partial_t u)$ es cualquier constante no nula entonces la integral se anula de todas maneras. Además no podemos asegurar que no existan otras posibilidades diferentes para $(\|\partial_t u\|^{-1} \partial_t u)$ que también anulen la integral anterior para toda posible variación. Sin embargo, una simple integración por partes nos resuelve el problema:

$$\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = \int_{t_1}^{t_2} -\partial_t (\|\partial_t u\|^{-1} \partial_t u) \cdot \bar{u} \, dt.$$

Ahora sí, la condición $\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = 0$ implica $\partial_t (\|\partial_t u\|^{-1} \partial_t u) = 0$ de acuerdo con el *Lema fundamental del cálculo variacional* 1.89. En conclusión, vemos que la velocidad $\partial_t u$ es tal que $\|\partial_t u\|^{-1} \partial_t u = \mathbf{d}$, con \mathbf{d} constante de norma unitaria. La dirección tangente unitaria \mathbf{d} es entonces constante para la curva de menor longitud que une los puntos \mathbf{X} y \mathbf{Y} . Note que la representación paramétrica de esa curva no es única, porque esa misma curva puede ser recorrida con rapidez variable. Sin embargo, si llamamos $\alpha(t) = \|\partial_t u\|$, entonces tenemos $\partial_t u = \alpha(t)\mathbf{d}$ y por lo tanto:

$$u(t) = \mathbf{X} + \int_{t_1}^t \partial_t u \, dt = \mathbf{X} + \lambda(t)\mathbf{d}, \quad \text{donde } \lambda(t) = \int_{t_1}^t \alpha(t) \, dt,$$

lo que muestra que la curva es el segmento de recta que contiene los puntos que se encuentran en la dirección unitaria \mathbf{d} partiendo desde \mathbf{X} . Como $u(t_2) = \mathbf{Y}$, tenemos $\mathbf{X} + \lambda(t_2)\mathbf{d} = \mathbf{Y}$, por lo tanto $\lambda(t_2)\mathbf{d} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}$, y como \mathbf{d} es unitaria $\lambda(t_2) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|$ y $\mathbf{d} = \|\mathbf{Y} - \mathbf{X}\|^{-1}(\mathbf{Y} - \mathbf{X})$.

Ejercicio 1.88 Considere un problema similar al del ejemplo anterior, pero esta vez halle el mínimo del funcional:

$$\mathcal{F}(u) = \int_{t_1}^{t_2} \|\partial_t u\|^2 \, dt.$$

Muestre que la solución es también el segmento de recta que une los puntos \mathbf{X} y \mathbf{Y} , pero que en este caso la representación paramétrica es única.

Como vemos en el Ejemplo 1.87, necesitamos de un resultado que nos permita obtener una condición de optimalidad a partir de una expresión integral. Ese lema es dado a continuación para el caso unidimensional para variaciones definidas en el intervalo real $[t_1, t_2]$. En problemas diferentes las variaciones pueden ser “libres” o tal vez deban satisfacer alguna condición del tipo $\bar{u}(t_1) = 0$, $\bar{u}(t_2) = 0$, o ambas. Como ejemplo se escoge el caso en que deben satisfacer la condición $\bar{u}(t_1) = 0$, siendo los demás casos similares.

Lema 1.89 (Lema fundamental del cálculo variacional, versión 1) Sea $\bar{\mathcal{U}}$ el conjunto de las funciones continuas $\bar{u} : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\bar{u}(t_1) = 0$. Sea $g : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y h una constante real. Si g y h satisfacen la siguiente igualdad:

$$\int_{t_1}^{t_2} g\bar{u} dt + h\bar{u}(t_2) = 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}},$$

entonces $g = 0$ en $[t_1, t_2]$ y $h = 0$.

Demostración. Sea γ una función continua, positiva en el abierto (t_1, t_2) , y tal que $\gamma(t_1) = 0$ y $\gamma(t_2) = 0$. Si tomamos $\bar{u} = \gamma g \in \bar{\mathcal{U}}$, entonces tenemos:

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma g^2 dt = 0.$$

Si fuera g positiva en algún punto $t \in (t_1, t_2)$ entonces la integral sería estrictamente positiva, por lo que g es nula en (t_1, t_2) y por continuidad es nula en $[t_1, t_2]$. Por lo tanto la igualdad del lema queda en la forma $h\bar{u}(t_2) = 0$ para todo $\bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}$ y fácilmente demostramos $h = 0$ tomando una función \bar{u} que no sea nula en t_2 . \square

El siguiente lema tiene como objeto generalizar el procedimiento desarrollado en el Ejemplo 1.87, encontrando las condiciones de optimalidad de un funcional modelo. Tal como en el Lema 1.89, se considerará un conjunto $\bar{\mathcal{U}}$ de variaciones \bar{u} que satisfagan la condición $\bar{u}(t_1) = 0$, siendo análogo el tratamiento de los otros casos posibles.

Lema 1.90 (Ecuaciones de Euler-Lagrange) Sea \mathcal{U} el conjunto de las funciones continuas $u : [t_1, t_2] \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $u(t_1) = \hat{u}$. Considere la notación $\dot{u} = \partial_t u$, y sea \mathcal{F} el funcional definido por la función *lagrangeana* $\mathcal{L} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que asumimos dos veces continuamente diferenciable, y el valor real F :

$$\mathcal{F}(u) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, u, \dot{u}) dt - Fu(t_2).$$

Si u es un mínimo local del funcional \mathcal{F} , entonces satisface las llamadas *ecuaciones de Euler-Lagrange* del problema:

$$\partial_u \mathcal{L} - d_t(\partial_{\dot{u}} \mathcal{L}) = 0 \quad \text{en } [t_1, t_2], \quad \partial_{\dot{u}} \mathcal{L}(t_2, u(t_2), \dot{u}(t_2)) = F,$$

donde el operador d_t se utiliza para indicar la derivada con respecto a t de la función compuesta $\partial_{\bar{u}}\mathcal{L}(t, u(t), \dot{u}(t))$.

Demostración. Tal como procedimos en el Ejemplo 1.87, calculamos la derivada direccional de Gâteaux de \mathcal{F} , considerando en este caso el espacio de variaciones $\bar{\mathcal{U}}$ de las funciones continuas y diferenciables \bar{u} que satisfacen $\bar{u}(t_1) = 0$:

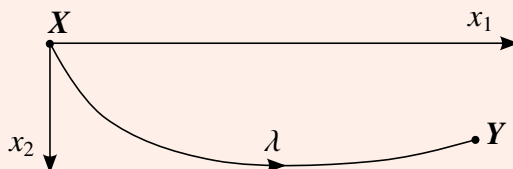
$$\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = \int_{t_1}^{t_2} \partial_u\mathcal{L}\bar{u} + \partial_{\dot{u}}\mathcal{L}\partial_t\bar{u} dt - F\bar{u}(t_2).$$

Integrando por partes el término $\partial_{\dot{u}}\mathcal{L}\partial_t\bar{u}$ obtenemos:

$$\delta_{\bar{u}}\mathcal{F}(u) = \int_{t_1}^{t_2} [\partial_u\mathcal{L} - d_t(\partial_{\dot{u}}\mathcal{L})]\bar{u} dt + [\partial_{\dot{u}}\mathcal{L}(t_2, u(t_2), \dot{u}(t_2)) - F]\bar{u}(t_2).$$

Por lo tanto, la tesis del lema se obtiene aplicando el Lema 1.89. \square

Ejemplo 1.91 (Curva braquistócrona) En este ejemplo consideraremos el problema de encontrar la rampa que minimice el tiempo de tránsito de una pequeña bolita de masa m desde un punto X hasta un punto Y , partiendo del reposo en X . La rampa es dada por la curva paramétrica $(x_1(\lambda), x_2(\lambda))$ con $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$, $x_1(\lambda_1) = x_2(\lambda_2) = 0$, $x_1(\lambda_2) = Y_1$, y $x_2(\lambda_2) = Y_2$ como se muestra en la figura siguiente:



Para un cierto valor de λ , la bolita habrá recorrido una distancia $s(\lambda)$, en un tiempo $t(\lambda)$ cuyas derivadas son dadas por las expresiones siguientes:

$$\partial_{\lambda}s = \sqrt{(\partial_{\lambda}x_1)^2 + (\partial_{\lambda}x_2)^2}, \quad \partial_{\lambda}t = \partial_s t \partial_{\lambda}s.$$

En la expresión anterior $t(s)$ es el tiempo requerido para recorrer una longitud s , y por lo tanto es la función inversa de $s(t)$, es decir, la función que indica la longitud recorrida en función del tiempo. Por el Teorema 1.70 de la función inversa, en puntos correspondientes $\partial_s t = (\partial_t s)^{-1}$, siendo $\partial_t s$ la rapidez de la bolita. Esa rapidez se puede obtener fácilmente por la conservación de energía mecánica: $1/2 m(\partial_t s)^2 - mgx_2 = 0$ (se considera despreciable la energía cinética asociada a la velocidad de giro, y nulo el potencial gravitatorio en X), con lo cual tenemos $\partial_t s = \sqrt{2gx_2}$. El tiempo T del recorrido completo es entonces:

$$T = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \partial_{\lambda}t d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sqrt{(\partial_{\lambda}x_1)^2 + (\partial_{\lambda}x_2)^2}}{\sqrt{2gx_2}} d\lambda.$$

Al igual que en el Ejemplo 1.87, la representación paramétrica de la curva no es única, puesto que la misma geometría puede recorrerse a diferente rapidez respecto del parámetro λ . Una forma de obtener un problema de solución única es asociar el parámetro λ a alguna propiedad geométrica de la curva óptima, por ejemplo eligiendo como parámetro λ la profundidad x_2 . En ese caso tenemos $x_2(\lambda) = \lambda$, y la función x_1 sería nuestra incógnita principal:

$$\mathcal{F}(x_1) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sqrt{(\partial_\lambda x_1)^2 + 1}}{\sqrt{2g\lambda}} d\lambda.$$

Aplicando el Lema 1.90 con $t = \lambda$, $u = x_1$, y $\dot{u} = \partial_\lambda x_1$, fácilmente obtenemos:

$$\partial_\lambda \left[\frac{\partial_\lambda x_1}{\sqrt{(\partial_\lambda x_1)^2 + 1} \sqrt{2g\lambda}} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial_\lambda x_1}{\sqrt{(\partial_\lambda x_1)^2 + 1} \sqrt{2g\lambda}} = C \text{ constante.}$$

Esa expresión nos permite despejar $\partial_\lambda x_1$ y obtener la función x_1 por integración:

$$\partial_\lambda x_1 = \sqrt{\frac{\lambda}{2a - \lambda}} \text{ con } a = 1/(4gC^2) \quad \Rightarrow \quad x_1(\lambda) = \int_{\lambda_1}^{\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{2a - \lambda}} d\lambda.$$

La integral anterior se simplifica enormemente introduciendo el cambio de variable $\lambda = 2a \sin(\theta/2)$, lo que proporciona:

$$x_1(\theta) = \int_{\theta_1}^{\theta} 2a \sin^2(\theta/2) d\theta = a[\theta - \sin(\theta)],$$

donde se ha utilizado $x_1(\theta_1) = 0$. Por otra parte $x_2(\lambda) = \lambda = 2a \sin(\theta/2) = a[1 - \cos(\theta)]$. En resumen, la solución del problema es una curva *cicloide*, cuya representación paramétrica es dada por:

$$\begin{aligned} x_1(\theta) &= a[\theta - \sin(\theta)], \\ x_2(\theta) &= a[1 - \cos(\theta)]. \end{aligned}$$

El ejemplo anterior muestra una característica típica de los problemas de minimización de un funcional \mathcal{F} . El Lema 1.90 nos proporciona las condiciones de optimalidad, las cuales tienen la forma de una ecuación diferencial que puede ser muy complicada en el caso general. En el ejemplo anterior la ecuación diferencial obtenida no es lineal ni homogénea. Por lo tanto fuimos afortunados de encontrar una expresión analítica para la representación paramétrica buscada, pues en el caso típico la misma no se puede obtener, y se debe proceder a buscar una aproximación numérica. Esa es la situación frecuente cuando el problema de minimización consiste en encontrar una función definida en un dominio de dimensión dos o mayor. El ejemplo siguiente consiste en encontrar una función de dos variables que en general no podremos expresar analíticamente excepto en algunos casos en que tengamos una configuración muy simétrica o sencilla de datos.

Ejemplo 1.92 (Superficie mínima) Supongamos que deseamos encontrar una superficie \mathcal{S} de área mínima entre aquellas superficies limitadas por una cierta curva cerrada fija C . Digamos que $D \subset \mathbb{R}^2$ es el dominio de los parámetros, y la representación paramétrica de la superficie es $\mathcal{S} : D \rightarrow \mathcal{E}^3$ dada por:

$$\mathcal{S}(x_1, x_2) = \mathbf{O} + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + z(x_1, x_2) \mathbf{e}_3 .$$

Por su parte, la curva fija $C : \partial D \rightarrow \mathcal{E}^3$ es dada por:

$$C(x_1, x_2) = \mathbf{O} + x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + \hat{z}(x_1, x_2) \mathbf{e}_3 ,$$

donde \hat{z} es una función conocida. Por lo tanto, el problema puede expresarse en la forma siguiente: hallar $z : D \rightarrow \mathbb{R}$, que cumpla $z = \hat{z}$ en el borde ∂D , y sea tal que minimice el siguiente funcional:

$$\mathcal{F}(z) = \int_{\mathcal{S}} da = \int_D \|\partial_1 \mathcal{S} \times \partial_2 \mathcal{S}\| dx_1 dx_2 = \int_D \sqrt{1 + \nabla z \cdot \nabla z} dx_1 dx_2 .$$

Tal como en el caso unidimensional, el camino para obtener la función óptima z será el de calcular la derivada direccional de Gâteaux de \mathcal{F} según la variación \bar{z} . El conjunto de las variaciones será el de las funciones reales definidas en D que sean dos veces continuamente diferenciables y tales que $\bar{z} = 0$ en ∂D , para así tener $z + \varepsilon \bar{z} = \hat{z}$ en ∂D . El procedimiento para calcular la derivada es completamente análogo al del caso unidimensional, y el resultado es:

$$\delta_{\bar{z}} \mathcal{F}(z) = \int_D \frac{\nabla z \cdot \nabla \bar{z}}{\sqrt{1 + \nabla z \cdot \nabla z}} dx_1 dx_2 .$$

La expresión anterior muestra que $\delta_{\bar{z}} \mathcal{F}(z)$ es lineal en \bar{z} , por lo que la condición de optimalidad es $\delta_{\bar{z}} \mathcal{F}(z) = 0$ para toda variación. Sin embargo, nuevamente tenemos una expresión que no es práctica en cuanto a la aplicación del lema fundamental del cálculo variacional, por lo que debemos integrar por partes. Para eso utilizamos la identidad $\nabla \cdot (\bar{z} \mathbf{v}) = \nabla \bar{z} \cdot \mathbf{v} + \bar{z} \nabla \cdot \mathbf{v}$, que nos permite reescribir el resultado anterior en la forma (utilizando también el teorema de la divergencia):

$$\delta_{\bar{z}} \mathcal{F}(z) = - \int_D \nabla \cdot \left[\frac{\nabla z}{\sqrt{1 + \nabla z \cdot \nabla z}} \right] \bar{z} dx_1 dx_2 .$$

Por lo tanto la condición de optimalidad que satisface la superficie de área mínima puede expresarse en la forma $\nabla \cdot \left[(1 + \nabla z \cdot \nabla z)^{-1/2} \nabla z \right] = 0$, la cual es bastante complicada, aunque muchas soluciones diferentes han sido encontradas desde que Lagrange la formuló en 1762.

La versión siguiente del lema fundamental del cálculo variacional (para $\partial D_f = \emptyset$) es la que permite obtener la condición de optimalidad del ejemplo anterior. La demostración se omite porque es muy similar a la demostración de la versión tridimensional del lema que veremos a continuación.

Lema 1.93 (Lema fundamental del cálculo variacional, versión 2) Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ un abierto limitado por una curva $\partial D = \overline{\partial D_u} \cup \overline{\partial D_f}$ donde ∂D_u y ∂D_f son partes relativamente abiertas y disjuntas de ∂D , es decir $\partial D_u \cap \partial D_f = \emptyset$. Sea $\bar{\mathcal{U}}$ el conjunto de las funciones continuas $\bar{u} : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ tales que $\bar{u} = 0$ en ∂D_u . Sea $g : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $h : \overline{\partial D_f}$ una función continua. Si g y h satisfacen la siguiente igualdad:

$$\int_D g \bar{u} \, da + \int_{\partial D_f} h \bar{u} \, ds = 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}},$$

entonces $g = 0$ en \bar{D} y $h = 0$ en $\overline{\partial D_f}$.

La siguiente versión vectorial y tridimensional del lema fundamental del cálculo variacional nos será de utilidad en el estudio del problema de elasticidad:

Lema 1.94 (Lema fundamental del cálculo variacional, versión 3) Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ un abierto limitado por la superficie $\partial \mathcal{B} = \overline{\partial \mathcal{B}_u} \cup \overline{\partial \mathcal{B}_f}$ donde $\partial \mathcal{B}_u$ y $\partial \mathcal{B}_f$ son partes relativamente abiertas y disjuntas de $\partial \mathcal{B}$, es decir $\partial \mathcal{B}_u \cap \partial \mathcal{B}_f = \emptyset$. Sea $\bar{\mathcal{U}}$ el conjunto de las funciones continuas $\bar{\mathbf{u}} : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{V}^3$ tales que $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ en $\partial \mathcal{B}_u$. Sea $\mathbf{g} : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{V}^3$ una función continua y $\mathbf{h} : \overline{\partial \mathcal{B}_f}$ una función continua. Si \mathbf{g} y \mathbf{h} satisfacen la siguiente igualdad:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_f} \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{u}} \, ds = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in \bar{\mathcal{U}},$$

entonces $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ en $\bar{\mathcal{B}}$ y $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ en $\overline{\partial \mathcal{B}_f}$.

Demostración. Sea $\gamma_1 : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$\begin{aligned} \gamma_1(X) &= 0 \quad \forall X \in \partial \mathcal{B}, \\ \gamma_1(X) &> 0 \quad \forall X \in \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Considero $\bar{\mathbf{u}}_1 = \gamma_1 \mathbf{g}$. Es claro que $\bar{\mathbf{u}}_1 \in \bar{\mathcal{U}}$ y por lo tanto:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_f} \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{u}}_1 \, da = \int_{\mathcal{B}} \gamma_1 \mathbf{g} \cdot \mathbf{g} \, dv = \int_{\mathcal{B}} \gamma_1 \|\mathbf{g}\|^2 \, dv = 0.$$

Entonces se cumple $\mathbf{g} = \mathbf{0}$ en \mathcal{B} . Sea ahora $\gamma_2 : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}$ continua tal que:

$$\begin{aligned} \gamma_2(X) &= 0 \quad \forall X \in \partial \mathcal{B}_u, \\ \gamma_2(X) &> 0 \quad \forall X \in \partial \mathcal{B}_f. \end{aligned}$$

Considerando ahora $\bar{\mathbf{u}}_2 = \gamma_2 \mathbf{h}$ tenemos $\bar{\mathbf{u}}_2 \in \bar{\mathcal{U}}$ y por lo tanto:

$$\int_{\mathcal{B}} \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 \, dv + \int_{\partial \mathcal{B}_f} \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{u}}_2 \, da = \int_{\partial \mathcal{B}_f} \gamma_2 \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} \, da = \int_{\partial \mathcal{B}_f} \gamma_2 \|\mathbf{h}\|^2 \, da = 0.$$

Entonces se cumple $\mathbf{h} = \mathbf{0}$ en $\partial \mathcal{B}_f$. □

Veamos ahora cómo resolver problemas de optimización de funcionales donde la solución buscada deba satisfacer además una condición dada por una ecuación diferencial. El procedimiento utilizado habitualmente es el *método de los multiplicadores de Lagrange* que introduciremos aquí sin demostración.

Supongamos que deseamos encontrar el mínimo u de un funcional \mathcal{F} definido como en el Lema 1.90, es decir:

$$\mathcal{F}(u) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, u, \dot{u}) dt - Fu(t_2),$$

donde recordamos la notación utilizada $\dot{u} = \partial_t u$. La función u es buscada en el conjunto solución \mathcal{U} de las funciones que en t_1 valen \hat{u} , es decir, $u(t_1) = \hat{u}$, y que además satisfacen una cierta ecuación diferencial del tipo $\mathcal{G}(t, u, \dot{u}) = 0$ en $[t_1, t_2]$. Entonces el método de los multiplicadores de Lagrange consiste en buscar un punto estacionario del funcional:

$$\mathcal{H}(u, \lambda) = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t, u, \dot{u}) dt - Fu(t_2) + \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) \mathcal{G}(t, u, \dot{u}) dt,$$

donde $\lambda(t)$ es el *multiplicador de Lagrange* de la restricción $\mathcal{G}(t, u, \dot{u}) = 0$ en $[t_1, t_2]$. En caso que existan más restricciones, se adicionan más términos al funcional, donde cada restricción va colocada en producto con el multiplicador correspondiente. La integral adicionada en la expresión anterior podría haberse restado, lo que solamente produciría un cambio de signo en el multiplicador de la solución. Independientemente de el signo escogido, el punto estacionario del funcional \mathcal{H} no suele ser ni mínimo ni máximo, sino un punto de silla del funcional.

Veamos las ecuaciones de Euler-Lagrange del problema anterior. Note que el funcional \mathcal{H} se puede expresar en forma similar a \mathcal{F} , pero con $\mathcal{M} = \mathcal{L} + \lambda \mathcal{G}$ en lugar de \mathcal{L} . Entonces, la variación del funcional es:

$$\delta_{(\bar{u}, \bar{\lambda})} \mathcal{H}(u, \lambda) = \int_{t_1}^{t_2} \partial_u \mathcal{M} \bar{u} + \partial_{\dot{u}} \mathcal{M} \partial_t \bar{u} + \bar{\lambda} \mathcal{G} dt - F \bar{u}(t_2).$$

Integrando por partes el término $\partial_{\dot{u}} \mathcal{M} \partial_t \bar{u}$ tenemos:

$$\delta_{(\bar{u}, \bar{\lambda})} \mathcal{H}(u, \lambda) = \int_{t_1}^{t_2} [\partial_u \mathcal{M} - d_t(\partial_{\dot{u}} \mathcal{M})] \bar{u} + \bar{\lambda} \mathcal{G} dt + [\partial_{\dot{u}} \mathcal{M}(t_2, u(t_2), \dot{u}(t_2)) - F] \bar{u}(t_2).$$

Por lo tanto, la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a la variación \bar{u} es $\partial_u \mathcal{M} - d_t(\partial_{\dot{u}} \mathcal{M}) = 0$ en $[t_1, t_2]$, la ecuación de Euler-Lagrange correspondiente a la variación $\bar{\lambda}$ coincide exactamente con la restricción original, es decir, $\mathcal{G}(t, u, \dot{u}) = 0$ en $[t_1, t_2]$, y la última ecuación es $\partial_{\dot{u}} \mathcal{M}(t_2, u(t_2), \dot{u}(t_2)) = F$.

Capítulo 2

Mecánica variacional

En este capítulo introduciremos algunos conceptos de mecánica variacional, utilizando como ejemplo un sistema muy simple conformado por una masa y un resorte de respuesta lineal. La idea principal del capítulo es introducir algunos conceptos básicos que permiten comprender mejor sistemas más complejos. Con la intención de introducir interpretaciones modernas del equilibrio, estudiaremos en primer lugar la dinámica del sistema masa-resorte, la cual nos permite introducir de forma rigurosa los conceptos de trabajo y energía que nos serán útiles inclusive en el análisis de sistemas en equilibrio estático. Luego introduciremos algunas de las formulaciones del equilibrio del sistema. Además de la formulación clásica de la mecánica newtoniana que consiste en formular el equilibrio como un balance de fuerzas, veremos la formulación del equilibrio como un balance de trabajos virtuales, así como la formulación del mismo como una condición de energía potencial total mínima o estacionaria.

2.1. Leyes de Newton

En la mecánica clásica el punto de partida en el estudio de la dinámica de un sistema físico son las tres leyes de Newton. Las mismas son:

- **1ª Ley:** es posible hallar un conjunto de sistemas de referencia, que llamaremos *sistemas de referencia inerciales*, para los cuales toda partícula que esté sometida a una fuerza neta nula no experimentará ninguna variación de su movimiento, es decir, si está en reposo entonces continuará en reposo, y si está en movimiento entonces continuará en movimiento rectilíneo uniforme.
- **2ª Ley:** en un sistema de referencia inercial, la intensidad de variación de la cantidad de movimiento que experimenta una partícula es directamente proporcional a la fuerza neta aplicada sobre la misma.
- **3ª Ley:** cuando dos partículas se ejercen fuerzas mutuamente, las mismas son colineales con la recta que une las partículas, tienen igual magnitud y dirección opuesta (forma fuerte de la 3ª Ley).

2.2. Sistema masa-resorte

Considere la Figura 2.1. En la misma se describe un sistema masa-resorte, en el cual un cuerpo de masa m que compone el sistema es sometido a una fuerza externa F y a una fuerza interna del sistema que es ejercida por el resorte sobre el cuerpo. Asu vez, el resorte tiene un extremo fijo en el sistema de referencia que utilizaremos, el cual consideraremos inercial.

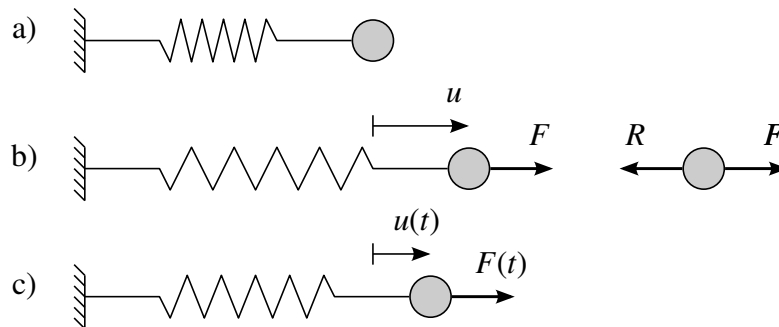


Figura 2.1: Sistema masa-resorte. a) Configuración indeformada. b) Configuración en equilibrio cuando se aplica una fuerza F . En el detalle se muestra el diagrama de cuerpo libre de la masa. Tanto el desplazamiento como las fuerzas de esa figura están representados en la dirección en que son considerados positivos. En particular, la fuerza sobre el resorte es considerada positiva si produce la tracción del resorte, lo cual implica que su reacción, la fuerza sobre la masa, sea positiva hacia la izquierda. c) Configuración en el tiempo t cuando se aplica una fuerza variable $F(t)$.

En la Figura 2.1.a) se muestra la configuración natural en reposo del sistema cuando sobre el mismo no actúan fuerzas externas, mientras que la Figura 2.1.b) muestra el experimento realizado por Hooke, que consiste en aplicar una fuerza F sobre la masa y medir el desplazamiento de la misma en el momento que se alcanza nuevamente una configuración en reposo. Lo que Hooke observó es que el valor de la fuerza aplicada es proporcional al desplazamiento u que la misma provoca. Si llamamos k al factor de proporcionalidad, entonces tenemos $F = ku$. Por otra parte, el esquema de cuerpo libre mostrado en la Figura 2.1.b) muestra que en esa situación de reposo la fuerza del resorte R debe ser igual a la fuerza aplicada F , puesto que en caso contrario se estaría violando la segunda Ley de Newton. Frecuentemente diremos que F es la *fuerza externa* del sistema, mientras que R es la *fuerza interna* del mismo. Por otra parte, la variación de longitud $\Delta\ell$ del resorte coincide en este caso con el desplazamiento u de la masa. Además, por la tercera ley de Newton tenemos que la fuerza R que el resorte realiza sobre la masa es igual en magnitud y de sentido contrario a la fuerza que la masa realiza sobre el resorte. Podemos expresar entonces la llamada *ley del comportamiento constitutivo* del resorte, la cual relaciona la fuerza ejercida sobre el mismo con su variación de longitud:

$$R = k\Delta\ell. \quad (2.1)$$

Para resortes metálicos o constituidos por otros materiales que llamaremos *elásticos*, y cuya masa pueda ser considerada despreciable, es en general una buena aproximación asumir que esa ley del comportamiento constitutivo es válida también en cualquier otra situación, independientemente de si el sistema se encuentra en reposo o no. Así, la ecuación del movimiento del sistema de la Figura 2.1.c) la obtenemos fácilmente utilizando la segunda ley de Newton. La fuerza neta aplicada sobre la masa es igual a la variación de su cantidad de movimiento, es decir:

$$F(t) - R(t) = \partial_t[m\partial_t u(t)] = m\partial_{tt}^2 u(t). \quad (2.2)$$

Note que hemos utilizado la notación $\partial_t u$ para la derivada de $u(t)$, lo cual no es estándar de los libros de matemáticas, en donde se prefiere la notación de Newton u' o la de Leibniz du/dt . La notación de Newton no tiene una generalización práctica en dominios de dimensión mayor a uno, mientras que la de Leibniz es poco compacta. La utilización de la notación ∂_t en vez de d_t tiene por objetivo mantener una clara distinción entre derivadas y diferenciales, por ejemplo en expresiones como $du = \partial_t u dt$, la cual es típica y útil en espacios de dimensión mayor a uno. Por otra parte, note que hemos considerado constante independiente del tiempo la masa m .

Utilizando la ley del comportamiento constitutivo y despejando el valor de la fuerza aplicada, obtenemos la ecuación que gobierna el movimiento del sistema:

$$F = ku + m\partial_{tt}^2 u \quad t \in (0, \infty). \quad (2.3)$$

La expresión anterior muestra también la convención de notación que utilizaremos frecuentemente en lo que sigue. Al omitir el argumento t expresamos una igualdad funcional, que en este caso es que la función F es igual a la función $ku + m\partial_{tt}^2 u$. A la derecha indicamos el dominio en donde esa igualdad funcional es válida, que en este caso es el intervalo $(0, +\infty)$, indicado simplemente por la desigualdad $t > 0$.

Conocida la expresión funcional de la fuerza F , la posición inicial $u(0) = u_0$ y la velocidad inicial $\partial_t u(0) = v_0$, la ecuación que gobierna el problema permite encontrar el desplazamiento u , la variación de longitud $\Delta\ell = u$ y la fuerza interna $R = k\Delta\ell$ para todo tiempo positivo. Por ejemplo, en la sección siguiente se analiza el caso la fuerza externa es nula.

2.2.1. Vibraciones naturales

Analicemos el caso en que la fuerza F de la ecuación (2.3) es nula. En este caso obtenemos la ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden y autónoma que podemos expresar de la siguiente manera:

$$m\partial_{tt}^2 u + ku = 0 \quad t \in (0, \infty). \quad (2.4)$$

El procedimiento habitual para obtener la solución de ecuaciones diferenciales como la anterior satisfaciendo además ciertas condiciones iniciales consiste en una primera instancia en proponer soluciones del tipo $u(t) = e^{\lambda t}$ y ver qué valores λ son adecuados. Como en este problema particular las soluciones para el parámetro λ

son imaginarias, aquí consideraremos $\lambda = i\omega$, con lo cual los valores reales posibles para ω los obtenemos al considerar $u(t) = e^{i\omega t}$ en la ecuación (2.4), con lo que obtenemos:

$$-m\omega^2 e^{i\omega t} + kue^{i\omega t} \quad t \in (0, \infty). \quad (2.5)$$

Siendo $e^{i\omega t}$ una función no nula para cualquier valor de t , fácilmente vemos que los únicos valores posibles para ω que permiten satisfacer la ecuación diferencial son dados por $\pm \sqrt{k/m}$. A la raíz positiva $\omega = \sqrt{k/m}$ se le llama *frecuencia natural de vibración del sistema*, y su nombre proviene de la naturaleza oscilatoria armónica de las soluciones del problema. Dada la naturaleza lineal de la ecuación diferencial (2.4) (que tiene como consecuencia que las combinaciones lineales de soluciones de la ecuación sean también soluciones de la misma), la solución general es dada por la siguiente expresión:

$$u(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}, \quad (2.6)$$

donde C_1 y C_2 son constantes que podrán ser buscadas de forma tal que la solución satisfaga además ciertas condiciones iniciales, lo cual es considerado en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 2.1 Considere que la masa tiene una posición inicial \hat{u}_0 y una velocidad inicial \hat{v}_0 . Utilice entonces la identidad $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)$ para mostrar que la solución del problema es dada por la siguiente expresión:

$$u(t) = \hat{u}_0 \cos(\omega t) + [\hat{v}_0/\omega] \sin(\omega t) \quad \text{con } \omega = \sqrt{k/m}. \quad (2.7)$$

2.2.2. Potencia y trabajo

Aunque la ecuación del movimiento (2.3) permite resolver completamente el problema (admitiendo que podemos hallar una solución para la expresión funcional de la fuerza F , lo cual no siempre es fácil), veremos que en el análisis del sistema convendrá introducir los conceptos de *potencia*, *trabajo* y *energía*. Así, la *potencia* de la fuerza externa F que actúa sobre la masa m es definida como el producto $F\partial_t u$ entre el valor de la fuerza y la velocidad de la masa. El *trabajo* realizado por la fuerza externa es definido como la integral en el tiempo de su potencia, es decir:

$$\text{Trabajo externo} = \int_{t_1}^{t_2} F \partial_t u \, dt. \quad (2.8)$$

En el caso de la fuerza interna R del sistema podemos introducir conceptos análogos. En este caso la potencia es $-R\partial_t u$, visto que la fuerza R fue considerada positiva en el sentido contrario al de F de acuerdo con la Figura (2.1). Su trabajo es definido entonces por la siguiente integral:

$$\text{Trabajo interno} = \int_{t_1}^{t_2} -R \partial_t u \, dt. \quad (2.9)$$

Si pensamos ahora en la potencia de la fuerza neta ejercida sobre la masa, y utilizamos la ecuación (2.2), obtenemos:

$$(F - R)\partial_t u = m\partial_{tt}^2 u(t)\partial_t u = \partial_t \left[\frac{1}{2}m(\partial_t u)^2 \right] = \partial_t \mathcal{K}. \quad (2.10)$$

La expresión anterior indica que la potencia neta ejercida sobre la masa es igual a la tasa de variación de su *energía cinética* \mathcal{K} , la cual es definida por la expresión $\mathcal{K} = \frac{1}{2}m(\partial_t u)^2$. Así, el trabajo realizado por la fuerza neta sobre la masa en el intervalo $[t_1, t_2]$ es:

$$\int_{t_1}^{t_2} (F - R)\partial_t u dt = \int_{t_1}^{t_2} \partial_t \mathcal{K} dt = \mathcal{K}(t_2) - \mathcal{K}(t_1), \quad (2.11)$$

con lo cual tenemos que el trabajo neto realizado sobre la masa es igual a la variación de su energía cinética. Pasemos ahora a ver con más detalle el trabajo realizado por la fuerza del resorte. Dicha fuerza deriva de una energía potencial, puesto que tenemos:

$$R(u) = ku = \partial_u \mathcal{E}(u), \quad \text{con } \mathcal{E}(u) = \frac{1}{2}ku^2. \quad (2.12)$$

La energía potencial \mathcal{E} se denomina *energía de deformación del resorte*, la cual puede también ser definida en forma más general por la expresión $\mathcal{E} = \frac{1}{2}k\Delta\ell^2$. Con eso, fácilmente obtenemos que el trabajo de la fuerza del resorte es igual a menos la variación de su energía de deformación:

$$\int_{t_1}^{t_2} -R\partial_t u dt = \int_{t_1}^{t_2} -\partial_u \mathcal{E} \partial_t u dt = \int_{u_1}^{u_2} \partial_u \mathcal{E} du = -[\mathcal{E}(u_2) - \mathcal{E}(u_1)], \quad (2.13)$$

donde se han utilizado las notaciones $u_1 = u(t_1)$ y $u_2 = u(t_2)$. Como el trabajo de la fuerza del resorte no se “pierde” sino que conduce a un incremento de igual magnitud en un tipo de energía potencial, se dice que la fuerza del resorte es *conservativa*. Si ahora utilizamos la expresión anterior junto con (2.11), obtenemos:

$$\text{Trabajo externo} = \int_{t_1}^{t_2} F\partial_t u dt = \mathcal{E}(u_2) - \mathcal{E}(u_1) + \mathcal{K}(t_2) - \mathcal{K}(t_1), \quad (2.14)$$

lo cual expresa que el trabajo de la fuerza externa es igual a la variación de la energía total del sistema, es decir, la variación de la energía de deformación más la variación de la energía cinética.

Supongamos ahora que la fuerza externa F que actúa sobre el sistema masa-resorte es también conservativa, es decir, la misma es función del desplazamiento u de la masa y puede obtenerse a partir de un *potencial* U por la expresión:

$$F(u) = -\partial_u U(u). \quad (2.15)$$

En ese caso, su trabajo puede también calcularse en la forma:

$$\int_{t_1}^{t_2} F\partial_t u dt = \int_{t_1}^{t_2} -\partial_u U \partial_t u dt = \int_{u_1}^{u_2} -\partial_u U du = -[U(u_2) - U(u_1)].$$

Por lo tanto, el trabajo de la fuerza externa es igual a menos la variación de su energía potencial U . El resultado anterior junto con la expresión (2.14) implica que la *energía mecánica total* del sistema se conserva:

$$U(u_2) + \mathcal{E}(u_2) + \mathcal{K}(t_2) = U(u_1) + \mathcal{E}(u_1) + \mathcal{K}(t_1) = \text{cte}. \quad (2.16)$$

No es difícil ver que los resultados que hemos obtenido son generalizables a sistemas que integren más de una masa y más de un resorte. Basta sumar los trabajos realizados sobre todas las masas, las energías de deformación de todos los resortes y las energías potenciales de todas las fuerzas. En resumen, podemos expresar los resultados obtenidos de la siguiente manera:

- El trabajo neto realizado por todas las fuerzas externas e internas sobre las masas de un sistema es igual a la variación de la energía cinética total del sistema.
- Las fuerzas de los resortes que admiten un comportamiento constitutivo elástico son *conservativas*, en el sentido que el trabajo que las mismas realizan es igual a menos la variación de la energía de deformación de los resortes. Con eso, el trabajo total de las fuerzas internas es igual a menos la variación de la energía de deformación total del sistema.
- El trabajo total de las fuerzas externas es igual a la variación de la suma de las energías de deformación y cinéticas del sistema.
- Si las fuerzas externas son también conservativas, entonces la energía mecánica total del sistema se conserva, cualquiera sea la evolución dinámica del mismo.

2.3. Diferentes formulaciones del equilibrio

Diremos que un sistema mecánico se encuentra en *equilibrio* cuando ninguna de las componentes del mismo experimenta una variación de su estado de movimiento. Esa simple definición admite diferentes formulaciones matemáticas, las cuales están inspiradas en los diferentes puntos de vista acerca de la acción que una fuerza realiza sobre una partícula o un cuerpo. Las formulaciones que más nos interesarán están descritas en las secciones siguientes.

2.3.1. Balance de fuerzas

Esta formulación es la que se obtiene de forma más directa a partir de la segunda ley de Newton. En este caso el aspecto que nos interesa de la acción de una fuerza que actúa sobre un cuerpo es su capacidad de producir una variación en la cantidad de movimiento del mismo. Siendo que en el equilibrio no existe variación del estado de movimiento de las componentes de un sistema, entonces las fuerzas netas que

actúan sobre esas componentes deben ser nulas. Por ejemplo, en el sistema masa-resorte de la Figura 2.1 debe cumplirse $R - F = 0$, con lo cual $R = F$. Siendo $R = ku$, entonces el desplazamiento de la masa en la posición de equilibrio solamente puede ser $u = F/k$. Si ahora realizamos un diagrama de cuerpo libre del resorte, vemos fácilmente que su equilibrio implica que fuerza realizada en la sujeción de su extremo izquierdo es $-F$.

De forma un poco más general, supongamos que la masa puede moverse en todas las direcciones del espacio euclidiano tridimensional, y que actúan sobre ella fuerzas dadas por uno o más resortes y una o más fuerzas externas. Para simplificar el análisis admitamos que sobre la misma actúan tres fuerzas, F_1 , F_2 y F_3 , que actúan sobre la partícula y que pueden ser internas del sistema (resortes que la vinculan a tierra) o acciones externas. Lo cierto es que el sistema está en equilibrio si y solamente si esa partícula no sufre variación de su cantidad de movimiento, lo cual, de acuerdo con la segunda ley de Newton, implica que la fuerza neta sobre la misma sea nula, es decir:

$$F_1 + F_2 + F_3 = \mathbf{0}. \quad (2.17)$$

2.3.2. Balance de trabajo virtual

En este caso el aspecto destacado de la acción de una fuerza sobre un cuerpo es el trabajo que la misma realiza en un posible desplazamiento. Consideremos por ejemplo el sistema masa-resorte, en particular el diagrama de cuerpo libre de la masa en la Figura (2.1). Como la masa está libre, podemos pensar que la misma tiene una cierta velocidad v . La potencia neta sobre la masa es $(F - R)v$, la cual debe ser nula en el equilibrio, o de lo contrario la energía cinética de la masa (y en consecuencia el estado del movimiento de la misma) estaría variando. Por lo tanto debe cumplirse $(F - R)v = 0$ para toda posible velocidad v . Como esa velocidad no es necesariamente real, sino solamente posible, la misma es llamada *velocidad virtual*. Si multiplicamos la expresión anterior por un cierta extensión de tiempo Δt y definimos el *desplazamiento virtual* $\bar{u} = v\Delta t$, entonces tenemos que el equilibrio de la masa implica $(F - R)\bar{u} = 0$, es decir, *trabajo virtual neto* nulo para todo posible desplazamiento virtual \bar{u} (la barra superior es utilizada para diferenciar el desplazamiento virtual \bar{u} del desplazamiento real u del equilibrio, con el cual no está relacionado. El desplazamiento virtual usualmente es interpretado como un desplazamiento pequeño producido a partir de la configuración de equilibrio que se está analizando). Claramente se tiene

$$(F - R)\bar{u} = 0 \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad F - R = 0,$$

por lo cual esta formulación del equilibrio de la masa es completamente equivalente a la del balance de fuerzas. Hemos visto que la potencia de la fuerza del resorte es $-Rv$, y por lo tanto su trabajo virtual es $-R\bar{u}$. Con eso el *balance de trabajo virtual* expresa que la suma de los trabajos virtuales de las fuerzas externas e internas es nulo. Sin embargo, en la bibliografía es usual que se cambie el signo del trabajo

virtual de la fuerza interna, definiéndolo como $R\bar{u}$, con lo cual se pierde en parte la idea de balance, es decir, suma nula, pero se gana la regla mnemotécnica *trabajo virtual interno es igual al trabajo virtual externo*, expresada matemáticamente en la forma:

$$R\bar{u} = F\bar{u} \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}.$$

Podría parecer que esta formulación del equilibrio no sería tan práctica como la formulación del balance de fuerzas, pero veremos que sí tendrá un rol muy importante en la formulación de métodos de resolución, en particular métodos numéricos, así como en la formulación de modelos matemáticos aproximados para los elementos estructurales utilizados en ingeniería.

En el caso más general estudiado en la sección anterior, en que la masa puede moverse en el espacio euclidiano tridimensional, y actúan sobre la misma tres fuerzas diferentes, tenemos que tanto las fuerzas aplicadas como el desplazamiento tienen naturaleza vectorial, y el trabajo es entonces calculado como el producto escalar de la fuerza neta y el desplazamiento virtual. El trabajo neto nulo se expresa en la forma:

$$(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3) \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}^3. \quad (2.18)$$

Aplicando la propiedad distributiva del producto escalar tenemos fácilmente que la ecuación anterior puede expresarse en forma equivalente como un balance de los trabajos virtuales realizados individualmente por las diferentes fuerzas:

$$\mathbf{F}_1 \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_2 \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{F}_3 \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}^3. \quad (2.19)$$

No es difícil ver que la expresión (2.17) de balance de fuerzas es equivalente a la expresión (2.19) de balance de trabajos virtuales. De hecho, si (2.17) se cumple, entonces (2.18) se cumple también, y por lo tanto se cumple (2.19). Por otra parte, si se cumple (2.19) entonces se cumple (2.18). Pero si en (2.18) tomamos $\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3$ (el desplazamiento virtual puede ser el vector en \mathcal{V}^3 que queramos), entonces tenemos $\|\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3\|^2 = 0$. Como el único vector de norma nula es el vector nulo, tenemos que se cumple (2.17).

Observación 2.2 La expresión (2.19) se generaliza a sistemas de partículas sumando las ecuaciones de balance de todas las partículas, con lo que obtenemos una ecuación global que nos dice que el sistema está en equilibrio cuando se verifica el balance de todos los trabajos, internos y externos, realizados sobre todas las partículas, para cualquier elección de los desplazamientos virtuales de las mismas. Por otra parte, al igual que hicimos en el caso del sistema masa-resorte, podemos separar las fuerzas actuantes en internas y externas, cambiar el signo de los trabajos internos para expresar el equilibrio en la forma de una igualdad entre el trabajo virtual interno y el trabajo virtual externo.

2.3.3. Energía potencial total mínima o estacionaria

Consideremos el sistema masa-resorte de la Figura 2.1 sometido a fuerzas externas conservativas, y supongamos que en el tiempo t_1 la masa está en equilibrio estático en la posición correspondiente al desplazamiento u . Con ello su energía mecánica total será $U(u) + \mathcal{E}(u)$. Supongamos además que u es un mínimo local estricto de la *energía potencial total* $\pi(u) = U(u) + \mathcal{E}(u)$, es decir, en un cierto entorno abierto \mathcal{D} de u cualquier desplazamiento $v \neq u$ cumple $\pi(v) > \pi(u)$. Con ello, si la evolución dinámica del sistema llevara la masa desde la posición u a la posición $v \in \mathcal{D}$ en el tiempo t_2 , entonces se violaría la igualdad en (2.16) cualquiera sea la energía cinética (siempre no negativa) en el tiempo t_2 , con lo cual el sistema en realidad no podría abandonar la posición dada por el desplazamiento u .

Los mínimos locales estrictos de la energía potencial total siempre serán entonces puntos de equilibrio estable de la ecuación del movimiento del sistema. Esa propiedad es en general válida en sistemas más complejos. El equilibrio puede entonces ser obtenido como una condición de mínima energía potencial total. No es difícil advertir que otros puntos de equilibrio podrán existir también, por ejemplo los máximos locales o cualquier otro punto estacionario de la energía potencial total, aunque esos puntos no serán en general puntos de equilibrio estable, lo cual resultará del estudio de la ecuación del movimiento del sistema. En el sistema masa-resorte sometido a fuerzas constantes, como en algunos otros sistemas de comportamiento lineal que veremos más adelante, solamente tendremos un único punto de equilibrio estable que será un mínimo global estricto de la energía potencial total.

Veamos que un mínimo local de la energía potencial total es un punto de equilibrio en el sentido del balance de trabajo virtual. Si u es ese mínimo, entonces sea la función f definida para un parámetro real α de la siguiente manera:

$$f(\alpha) = \pi(u + \alpha\bar{u}) = U(u + \alpha\bar{u}) + \mathcal{E}(u + \alpha\bar{u}). \quad (2.20)$$

Claramente f tiene un mínimo en $\alpha = 0$ para cualquier desplazamiento virtual \bar{u} que se considere, y por lo tanto $\partial_\alpha f(0) = 0$. Derivando y evaluando en el punto $\alpha = 0$, tenemos:

$$\partial_u U\bar{u} + \partial_u \mathcal{E}\bar{u} = 0 \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}. \quad (2.21)$$

Recordando que $F = -\partial_u U$ y $R = \partial_u \mathcal{E}$, vemos que hemos obtenido la igualdad $R\bar{u} = F\bar{u} \quad \forall \bar{u} \in \mathbb{R}$, es decir, u es un punto de equilibrio en el sentido del balance de trabajo virtual.

Note que la conclusión habría sido exactamente la misma si se hubiera supuesto que u es un máximo u otro punto estacionario de la energía potencial total π . Admitamos ahora que u es un punto de equilibrio en el sentido del balance de trabajo virtual. Todo desplazamiento v puede ser obtenido adicionando un desplazamiento \bar{u} al desplazamiento u del equilibrio, es decir $v = u + \bar{u}$ para el desplazamiento virtual $\bar{u} = v - u$. Por lo tanto, considerando que para una fuerza externa constante

$U(u) = -Fu$, tenemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(v) &= \frac{1}{2}k(u + \bar{u})^2 = \frac{1}{2}ku^2 + ku\bar{u} + \frac{1}{2}k\bar{u}^2 = \mathcal{E}(u) + R\bar{u} + \mathcal{E}(\bar{u}), \\ U(v) &= -F(u + \bar{u}) = -Fu - F\bar{u} = U(u) - F\bar{u}.\end{aligned}$$

Sumando esos resultados obtenemos:

$$\begin{aligned}\pi(v) &= U(v) + \mathcal{E}(v) = U(u) + \mathcal{E}(u) + R\bar{u} - F\bar{u} + \mathcal{E}(\bar{u}) \\ &= \pi(u) + \mathcal{E}(\bar{u}) > \pi(u) \quad \forall v \in \mathbb{R}, v \neq u.\end{aligned}$$

Queda así demostrado que para fuerzas constantes el punto de equilibrio según el balance de trabajo virtual es un mínimo global estricto de la energía potencial total. En ese caso la formulación del equilibrio como mínimo de la energía potencial total es equivalente a la formulación del balance de trabajo virtual.

En el caso en que el comportamiento del elemento elástico sea no lineal, que las fuerzas externas no sean constantes, o que el problema contenga alguna ecuación no lineal, entonces el sistema podrá tener más de un punto de equilibrio, algunos de los cuales podrán ser puntos estacionarios de la energía potencial total que no sean mínimos de la misma, y por lo tanto serán puntos de equilibrio inestable. Si algún componente tiene un comportamiento no elástico, o las fuerzas externas no son conservativas, entonces no podrá ser posible definir una energía potencial total para el sistema. En ese caso los puntos de equilibrio del sistema, si existiesen, deberán ser hallados utilizando alguna de las formulaciones anteriores.

En forma gráfica, las diferentes formulaciones del equilibrio se representan en la Figura 2.2. La energía potencial total estacionaria es en realidad mínima en muchas situaciones de interés práctico.

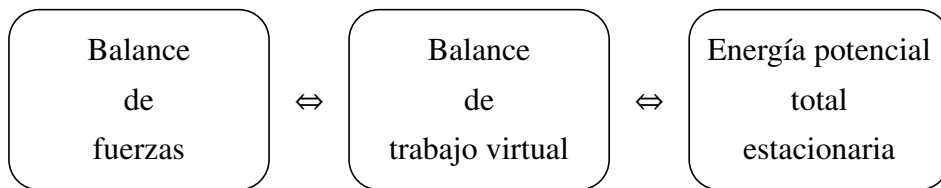


Figura 2.2: Diferentes formulaciones del equilibrio.

Capítulo 3

Elasticidad lineal unidimensional

En este capítulo consideraremos uno de los problemas más simples que existen entre aquellos involucran un cuerpo sólido deformable. Se trata de una barra de directriz recta compuesta de un material sólido elástico de comportamiento lineal, la cual es sometida a fuerzas externas axiales que ponen la barra en tensión según la dirección axial.

En primer lugar estudiaremos el planteo clásico del equilibrio de la barra, lo que nos permitirá introducir el concepto de *fuerza directa*. Luego veremos la formulación de la cinemática de la deformación de la barra, e introduciremos el concepto de *deformación de ingeniería*. Finalmente introduciremos la ley lineal habitual del comportamiento del material para obtener la ecuación constitutiva de la barra.

Con esos conceptos introducidos estaremos listos para presentar la *formulación clásica* del *problema de elasticidad lineal*. Una versión del teorema del trabajo virtual válido para este problema nos permitirá además introducir la *formulación variacional* del problema. Posteriormente introduciremos el concepto de energía potencial total del sistema, el cual nos permitirá formular el problema como un problema de optimización. Se mostrará también que las tres formulaciones del problema son equivalentes, en el sentido que una solución de uno de los problemas que satisfaga ciertas condiciones de regularidad será solución también de los otras dos formulaciones.

3.1. Equilibrio

En esta sección consideraremos una barra, de secciones transversales con dimensiones mucho menores que la longitud de la misma, sometida a la acción de fuerzas externas dirigidas según la dirección axial. Consideraremos que en el instante analizado la barra está en equilibrio y en reposo. Cada sección transversal de la barra puede ser identificada por el valor de una cierta coordenada x que crece a lo largo del eje de la misma y que adopta valores en el intervalo abierto $I = (x_i, x_f)$, como es mostrado en la Figura 3.1.

Supondremos que las fuerzas actuantes sobre una parte \mathcal{D} de la barra limitada por las secciones transversales de coordenadas x_a y x_b son de dos tipos:

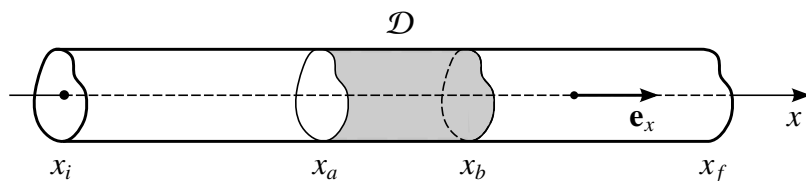


Figura 3.1: Geometría de la barra.

- **Fuerzas de volumen:** son fuerzas que actúan sobre las partículas del interior de la barra y cuya resultante es dada por:

$$\mathbf{F}_{\mathcal{D}} = \int_{x_a}^{x_b} b(x) \mathbf{e}_x dx, \quad (3.1)$$

donde b es la fuerza por unidad de longitud que actúa sobre las partículas del interior de la barra.

- **Fuerzas de superficie:** son fuerzas que actúan sobre las partículas de las secciones transversales x_a y x_b de \mathcal{D} . Supondremos que la fuerza de superficie transmitida por la parte derecha de la sección x de la barra sobre la parte izquierda es dada por la expresión $\mathcal{N}(x) \mathbf{e}_x = \sigma(x) A(x) \mathbf{e}_x$ donde \mathcal{N} es llamada *fuerza axial* o *fuerza directa*, σ es la *tensión de ingeniería* y A es el área de la sección transversal. Consideraremos el caso en que el área A de la sección transversal varía levemente a lo largo de la barra. Grandes variaciones del área A o variaciones repentinas no serán consideradas aquí, puesto que para ese caso es necesaria la utilización de la teoría general de la elasticidad tridimensional. Haciendo uso del principio de acción y reacción, la resultante de las fuerzas de superficie es:

$$\mathbf{F}_{\partial \mathcal{D}} = \mathcal{N}(x_b) \mathbf{e}_x - \mathcal{N}(x_a) \mathbf{e}_x. \quad (3.2)$$

El equilibrio de la parte \mathcal{D} de la barra implica que la suma de las resultantes (3.1) y (3.2) sea nula, y por lo tanto deberá cumplirse:

$$\mathcal{N}(x_b) - \mathcal{N}(x_a) + \int_{x_a}^{x_b} b(x) dx = 0.$$

La expresión anterior es válida para cualquier valor de las variables x_a y x_b en I . Podemos entonces considerar x_a fijo y x_b variable. Si derivamos la expresión anterior con respecto a x_b obtenemos:

$$\partial_x \mathcal{N}(x_b) + b(x_b) = 0.$$

Como la igualdad de la ecuación anterior es válida para todo x_b en I , podemos escribir en forma más general:

$$\partial_x \mathcal{N}(x) + b(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Esta expresión es conocida como *ecuación puntual de equilibrio*.

Ejercicio 3.1 Demuestre que si la ecuación puntual de equilibrio es satisfecha en toda sección $x \in I$, entonces cualquier parte \mathcal{D} de la barra estará en equilibrio.

3.2. Deformaciones

Las tensiones en la barra producen deformaciones que pueden ser medidas. Asumiémos que la sección transversal de la barra que en la configuración indeformada es dada por la coordenada x , en la configuración deformada es dada por el valor x' :

$$x' = x + u(x),$$

donde u es la *función desplazamiento* definida en la configuración indeformada. Consideremos un segmento de la barra limitado por las secciones transversales de coordenadas x_a y $x_b = x_a + h$. La deformación longitudinal media de ese segmento se define como el cociente entre la variación de longitud de ese segmento y su longitud original. Tomando $x_b \rightarrow x_a$ estaremos cuantificando el valor de la deformación en un entorno pequeño de x_a . Por lo tanto, podemos definir la deformación de ingeniería en x_a en la dirección longitudinal por el límite:

$$\varepsilon(x_a) = \lim_{x_b \rightarrow x_a} \frac{(x'_b - x'_a) - (x_b - x_a)}{x_b - x_a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_a + h) - u(x_a)}{h},$$

y por lo tanto, de acuerdo con la definición de derivada de una función, tenemos:

$$\varepsilon(x) = \partial_x u(x) \quad \forall x \in I.$$

Note además que la deformación de ingeniería permite calcular fácilmente la variación de longitud $\Delta \ell$ de la porción de la barra limitada por las secciones transversales de coordenadas x_a y x_b :

$$\Delta \ell = (x'_b - x'_a) - (x_b - x_a) = u(x_b) - u(x_a) = \int_{x_a}^{x_b} \varepsilon(x) dx.$$

3.3. Ecuación constitutiva

Si el material que conforma la barra es elástico lineal, entonces la tensión $\sigma(x)$ existente en una sección de la barra depende únicamente del valor de la deformación de ingeniería $\varepsilon(x)$ y es proporcional a la misma, por lo que tenemos:

$$\sigma(x) = E(x)\varepsilon(x) \quad \forall x \in I,$$

donde E es una propiedad de rigidez del material que es llamada *módulo de Young*. Multiplicando la ecuación anterior por el área transversal obtenemos la llamada *ecuación constitutiva* de la barra:

$$N(x) = E(x)A(x)\varepsilon(x) \quad \forall x \in I. \quad (3.3)$$

3.4. Problema de elasticidad lineal

El *problema de elasticidad lineal* consiste en hallar la función desplazamiento u , la deformación de ingeniería ε y la fuerza directa \mathcal{N} en cualquier sección de la barra compuesta por un material elástico lineal de módulo de Young E . Para obtener un problema lineal consideraremos la *aproximación de pequeños desplazamientos*, la cual asume que la ecuación de equilibrio es válida en la configuración indeformada.

Para introducir los conceptos consideraremos que el extremo izquierdo de la barra está fijo y por lo tanto no puede desplazarse independientemente de la deformación causada por las fuerzas aplicadas, vea la Figura 3.2. En el extremo derecho de la barra supondremos que conocemos el valor de la fuerza aplicada.

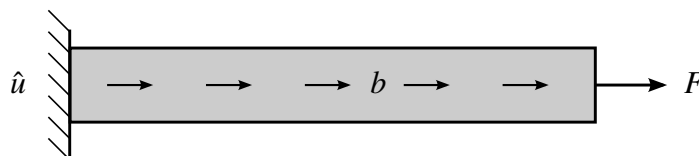


Figura 3.2: Problema de elasticidad lineal.

Llamaremos \bar{I} a la clausura del intervalo abierto I , es decir, el menor intervalo cerrado que contiene a I . Consideraremos también la siguiente notación:

Notación 3.2 Diremos que una función $f : D \rightarrow E$ cumple $f \in C^n(H, E)$ si f y todas sus derivadas hasta el orden n existen y son continuas en el conjunto $H \subset D$.

La *formulación clásica* del problema de elasticidad lineal de la Figura 3.2, también llamada *formulación fuerte*, consiste en hallar las funciones

$$\begin{aligned} u : \bar{I} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{con } u \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}), \text{ y } u \in C^2(I, \mathbb{R}), \\ \varepsilon : \bar{I} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{con } \varepsilon \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}), \text{ y } \varepsilon \in C^1(I, \mathbb{R}), \\ \mathcal{N} : \bar{I} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{con } \mathcal{N} \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}), \text{ y } \mathcal{N} \in C^1(I, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

que satisfagan las ecuaciones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_x \mathcal{N} + b = 0 & \text{en } I \text{ (ecuación de equilibrio),} \\ \varepsilon = \partial_x u & \text{en } I \text{ (relación desplazamiento-deformación),} \\ \mathcal{N} = EA\varepsilon & \text{en } I \text{ (ecuación constitutiva),} \\ u(x_i) = \hat{u} & \text{(condición de contorno cinemática),} \\ \mathcal{N}(x_f) = F & \text{(condición de contorno mecánica).} \end{array} \right.$$

En el problema de elasticidad lineal, el intervalo $I = (x_i, x_f)$ es considerado conocido, al igual que las propiedades $E, A \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R})$, que no necesariamente consideraremos constantes, la fuerza $b \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R})$, y los valores \hat{u} y F de las condiciones de contorno. Note que las condiciones de contorno indicadas son válidas para el problema de la Figura 3.2, y deben ser modificadas si se tienen otras configuraciones de apoyos.

Ejercicio 3.3 Pruebe que el problema de elasticidad planteado es lineal, es decir, considerando la misma barra definida en el intervalo I de propiedades A y E , si tenemos un problema a) con solución $(u^a, \varepsilon^a, \mathcal{N}^a)$ para los datos (b^a, \hat{u}^a, F^a) y otro problema b) de solución $(u^b, \varepsilon^b, \mathcal{N}^b)$ para los datos (b^b, \hat{u}^b, F^b) , entonces cualquier combinación lineal de las soluciones es solución para el problema dado por la misma combinación lineal de los datos. Esta propiedad del problema de elasticidad lineal es conocida como *Principio de superposición*.

3.4.1. Ecuación de Navier

Partiendo de la ecuación constitutiva (3.3) de la barra, y sustituyendo ε por su valor en función del desplazamiento u tenemos:

$$\mathcal{N} = EA\partial_x u \quad \text{en } I.$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de equilibrio obtenemos:

$$\partial_x (EA\partial_x u) + b = 0 \quad \text{en } I.$$

En el caso usual en que los valores de las propiedades materiales y del área transversal sean constantes, obtenemos la llamada *ecuación de Navier* de la barra:

$$EA\partial_{xx}^2 u + b = 0 \quad \text{en } I.$$

Ejercicio 3.4 Muestre que en el caso en que las fuerzas de volumen sean nulas, el desplazamiento tiene la siguiente expresión general: $u(x) = C_1x + C_2$.

3.4.2. Teorema del trabajo virtual

El teorema siguiente lo utilizaremos para introducir una formulación alternativa a la formulación clásica del problema de elasticidad lineal:

Teorema 3.5 (Teorema del trabajo virtual) Considere el problema de elasticidad lineal de la Figura 3.2. Sea \mathcal{N} la fuerza directa en equilibrio con las fuerzas externas b y F , y sea \bar{u} un desplazamiento nulo en el apoyo de deformación $\bar{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{N} + b &= 0 \quad \text{en } I, & \bar{\varepsilon} &= \partial_x \bar{u} \quad \text{en } I, \\ \mathcal{N}(x_f) &= F, & \bar{u}(x_i) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces se cumple:

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{N} \bar{\varepsilon} dx = \int_{x_i}^{x_f} b \bar{u} dx + F \bar{u}(x_f). \quad (3.4)$$

Demostración. Considerando la relación desplazamiento-deformación entre \bar{u} y $\bar{\varepsilon}$ e integrando por partes obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{N} \bar{\varepsilon} dx = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{N} \partial_x \bar{u} dx = (\mathcal{N} \bar{u}) \Big|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \partial_x \mathcal{N} \bar{u} dx.$$

Note que la tesis del teorema, ecuación (3.4), resulta fácilmente de la expresión anterior sustituyendo $\partial_x \mathcal{N}$ por $-b$, $\bar{u}(x_i)$ por 0 y $\mathcal{N}(x_f)$ por F . \square

Observación 3.6 A una función \bar{u} que cumple la condición $\bar{u}(x_i) = 0$ sobre el extremo apoyado de la barra le denominaremos *desplazamiento virtual*. El mismo no tiene por qué tener relación con el *desplazamiento real* u solución del problema de elasticidad lineal, ni tiene que cumplir cualquier ley física, es solamente una función matemática auxiliar. A la integral a la izquierda en la ecuación (3.4) se le denomina *trabajo de las fuerzas internas debido al desplazamiento virtual* o simplemente *trabajo virtual interno*, mientras que al lado derecho en (3.4) se le denomina *trabajo de las fuerzas externas debido al desplazamiento virtual* o simplemente *trabajo virtual externo*. El teorema del trabajo virtual expresa que si existe equilibrio entre la fuerza directa \mathcal{N} y las fuerzas externas b y F entonces *el trabajo virtual interno es igual al trabajo virtual externo* para cualquier desplazamiento virtual. Esa es la interpretación brindada en buena parte de la bibliografía, y utilizada por ser fácil de recordar, aunque la noción física precisa es que el trabajo virtual neto es nulo, lo cual expresa mejor la idea de balance de fuerzas externas e internas en cuanto a su acción total, tal como fue discutido en la Sección 2.3 del Capítulo 2.

3.4.3. Formulación variacional en desplazamientos

La llamada *formulación variacional* del problema de elasticidad lineal, también llamada *formulación débil*, se obtiene considerando el teorema del trabajo virtual en lugar en lugar de las expresiones mecánicas de equilibrio de fuerzas. Consideraremos aquí la formulación en desplazamientos, es decir, eliminaremos las incógnitas ε y \mathcal{N} utilizando la relación desplazamiento-deformación y la ecuación constitutiva. Para el problema de la Figura 3.2 se definen los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{u : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : u(x_i) = \hat{u}\}, \\ \bar{\mathcal{U}} &= \{\bar{u} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : \bar{u}(x_i) = 0\}. \end{aligned}$$

La formulación variacional en desplazamientos del problema de elasticidad lineal consiste en hallar el desplazamiento $u \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$\int_I EA \partial_x u \partial_x \bar{u} dx = \int_I b \bar{u} dx + F \bar{u}(x_f) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

La condición de admisibilidad requerida en la definición del conjunto solución \mathcal{U} y el conjunto de los desplazamientos virtuales $\bar{\mathcal{U}}$ es escogida de forma tal que las

integrales de la ecuación anterior tengan sentido y además se cumpla la existencia y unicidad de la solución de la formulación variacional. La definición precisa de los conjuntos \mathcal{U} y $\bar{\mathcal{U}}$ es un problema delicado que ha tenido respuesta gracias al desarrollo teórico del área de las matemáticas conocida como análisis funcional. Si bien la definición precisa es más general, por el momento consideraremos como admisibles a funciones u y \bar{u} continuas en \bar{I} , es decir $u, \bar{u} \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R})$ tales que sus derivadas sean continuas por partes en I , es decir, podemos dividir I en un conjunto finito de intervalos dentro de los cuales las derivadas $\partial_x u$ y $\partial_x \bar{u}$ sean continuas.

Note que la condición de contorno $u(x_i) = \hat{u}$ la exigimos explícitamente al requerir que la solución u esté en el conjunto \mathcal{U} . Por esta razón esta condición de contorno se le llama *condición de contorno esencial* de la formulación variacional. Por el contrario, la condición de contorno $\mathcal{N}(x_f) = F$ de la formulación clásica queda excluida, puesto que es reemplazada por la tesis del teorema del trabajo virtual junto con la ecuación puntual de equilibrio. A esta condición de contorno se le llama *condición de contorno natural* de la formulación variacional.

Es claro que si el desplazamiento u es una solución de la formulación clásica del problema de elasticidad lineal, entonces, utilizando el teorema del trabajo virtual, rápidamente podemos demostrar que ese desplazamiento es también una solución de la formulación variacional.

Sin embargo, la formulación variacional del problema de elasticidad lineal admite soluciones que no admite la formulación clásica. Por ejemplo, una solución de la formulación variacional cuya derivada segunda no exista o no sea continua en I no será solución de la formulación clásica.

En el ejemplo siguiente se muestra que fuerzas puntuales localizadas en el interior de la barra traccionada pueden ser incluidas naturalmente en la formulación variacional, simplemente adicionando el trabajo virtual que realizan. Por el contrario, la formulación clásica del problema requeriría ajustes mayores, puesto que la ecuación puntual de equilibrio no queda bien definida donde la fuerza directa no es diferenciable.

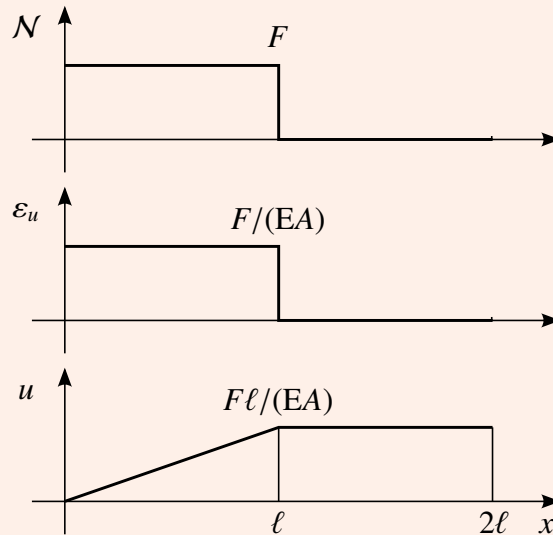
Ejemplo 3.7 Sea una barra de extremos $x_i = 0$ y $x_f = 2\ell$, y por lo tanto $I = (0, 2\ell)$. Supongamos que las condiciones de contorno son $u(x_i) = 0$ y $\mathcal{N}(x_f) = 0$. Supongamos que en la sección $x = \ell$ aplicamos una fuerza puntual de valor F . Admitiendo que el trabajo virtual de una fuerza puntual de valor F aplicada en el punto x es $F\bar{u}(x)$ entonces la formulación variacional del problema de elasticidad lineal consiste en encontrar el desplazamiento $u \in \mathcal{U}$ tal que:

$$\int_I EA \partial_x u \partial_x \bar{u} dx = F\bar{u}(\ell) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}},$$

donde $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}} = \{u : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : u(0) = 0\}$.

Observe que aplicando ecuaciones de equilibrio integrales podemos hallar \mathcal{N} , aplicando la ecuación la constitutiva podemos hallar ε , y luego integrando esta función podemos obtener u . Estos resultados son representados en los gráficos

de la figura siguiente:



Note que la solución u representada en la figura no tiene derivada continua en $x = \ell$ y por lo tanto la derivada de la fuerza directa en ese punto no existe. Por esta razón, la función u representada en la figura no es solución de la formulación clásica del problema de elasticidad lineal tal como ha sido planteada, ni tampoco satisface la ecuación de Navier en $x = \ell$, aunque sí es una buena candidata a ser la solución de la formulación variacional.

Si la solución de la formulación variacional satisface las condiciones de regularidad exigidas por la formulación clásica, entonces la misma es una solución de la formulación clásica y podemos hablar de una cierta equivalencia entre las dos formulaciones. Esto es mostrado en el teorema siguiente.

Teorema 3.8 (Equivalencia entre formulaciones clásica y variacional) Si los datos del problema y la solución $u \in \mathcal{U}$ de la formulación variacional del problema de elasticidad lineal cumplen con las condiciones de regularidad requeridas por la formulación clásica, entonces dicha función también es solución del problema de elasticidad lineal en la formulación clásica.

Demostración. En primer lugar notamos que la condición de contorno cinemática de la formulación clásica es requerida explícitamente a la solución de la formulación variacional. Falta mostrar entonces que se satisfacen las tres ecuaciones de campo y la condición de contorno mecánica. Partiendo del desplazamiento solución de la formulación variacional, definimos las siguientes magnitudes para completar una terna solución:

$$\varepsilon = \partial_x u, \quad N = EA\varepsilon.$$

Note que si u tiene la regularidad requerida por la formulación clásica entonces con esta definición ε y N también la tendrán, y además tendremos satisfechas dos de las

ecuaciones de campo. Partiendo ahora de la ecuación fundamental de la formulación variacional, el teorema del trabajo virtual, y utilizando integración por partes, tenemos:

$$\int_I b\bar{u} \, dx + F\bar{u}(x_f) = \int_B \mathcal{N} \partial_x \bar{u} \, dx = \mathcal{N}(x_f)\bar{u}(x_f) - \int_I \partial_x \mathcal{N} \bar{u} \, dx \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

Reordenando los términos, tenemos:

$$\int_I (\partial_x \mathcal{N} + b)\bar{u} \, dx + (F - \mathcal{N}(x_f))\bar{u} = 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

Así, aplicando el Lema 1.89 obtenemos las ecuaciones faltantes de la formulación clásica: $\partial_x \mathcal{N} + \mathbf{b} = \mathbf{0}$ en I y $\mathcal{N}(x_f) = F$. \square

El planteo del problema de elasticidad lineal se simplifica considerablemente introduciendo los siguientes funcionales:

$$a(u, \bar{u}) = \int_I EA \partial_x u \partial_x \bar{u} \, dx, \quad \ell(\bar{u}) = \int_I b\bar{u} \, dx + F\bar{u}(x_f).$$

Con estas notaciones, la solución de la formulación variacional del problema de elasticidad lineal es el desplazamiento $u \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$a(u, \bar{u}) = \ell(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

Ejercicio 3.9 Demuestre que el funcional a es bilineal, es decir:

$$\begin{aligned} a(u, \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2) &= \alpha_1 a(u, \bar{u}_1) + \alpha_2 a(u, \bar{u}_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \bar{u}) &= \alpha_1 a(u_1, \bar{u}) + \alpha_2 a(u_2, \bar{u}) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

es simétrico:

$$a(u, \bar{u}) = a(\bar{u}, u),$$

y es definido positivo en $\bar{\mathcal{U}}$ (para esto asuma que E y A son dadas por funciones continuas y positivas en \bar{I} , y que las funciones de $\bar{\mathcal{U}}$ son continuas con derivadas continuas por partes en \bar{I}):

$$\begin{aligned} a(\bar{u}, \bar{u}) &\geq 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}, \\ a(\bar{u}, \bar{u}) &> 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}, \text{ con } \bar{u} \neq 0. \end{aligned}$$

Demuestre también que ℓ es un funcional lineal:

$$\ell(\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2) = \alpha_1 \ell(\bar{u}_1) + \alpha_2 \ell(\bar{u}_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

3.4.4. Teorema de la mínima energía potencial total

La *energía potencial total* correspondiente al desplazamiento $u \in \mathcal{U}$ es la suma de la energía de deformación de la barra y la energía potencial de las fuerzas externas, la cual se define como menos el trabajo que realizan las mismas en el desplazamiento u . En términos de los funcionales a y ℓ introducidos en la sección anterior, la misma es la cantidad $\pi(u)$ dada por:

$$\pi(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u).$$

En la notación integral tenemos, para el problema de la Figura 3.2:

$$\pi(u) = \int_I \frac{1}{2}EA(\partial_x u)^2 ds - \int_I bu ds - Fu(x_f).$$

Como muestra el teorema siguiente, la energía potencial total es mínima para la solución del problema de elasticidad lineal:

Teorema 3.10 (Mínima energía potencial total) Toda solución del problema de elasticidad lineal es un mínimo global en \mathcal{U} de la energía potencial total. Recíprocamente, todo mínimo local en \mathcal{U} de la energía potencial total es un mínimo global que es solución del problema de elasticidad lineal.

Demostración. Veamos primero que toda solución u del problema de elasticidad lineal es un mínimo global de la energía potencial total $\pi(u)$. Para eso sea $\pi(v)$ la energía potencial total de un campo de desplazamientos cualquiera $v \in \mathcal{U}$. Si definimos $\bar{e} = v - u$, tenemos $\bar{e} \in \bar{\mathcal{U}}$ y además:

$$\begin{aligned} \pi(v) &= \frac{1}{2}a(u + \bar{e}, u + \bar{e}) - \ell(u + \bar{e}) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u) + \frac{1}{2}a(\bar{e}, \bar{e}) + a(u, \bar{e}) - \ell(\bar{e}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Como u es solución, los dos últimos términos se anulan entre sí. Por lo tanto:

$$\pi(v) = \pi(u) + \frac{1}{2}a(\bar{e}, \bar{e}).$$

Como muestra el Ejercicio 3.9, la cantidad $a(\bar{e}, \bar{e})$ es siempre no negativa y es estrictamente positiva si $\bar{e} \neq 0$. Por lo tanto:

$$\pi(v) \geq \pi(u) \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

Donde la igualdad se cumple solamente si $v = u$, y portanto el mínimo es único.

Veamos ahora que todo mínimo local de π es una solución del problema variacional. Sea $u \in \mathcal{U}$ un mínimo local de π , y $\bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}$ un desplazamiento virtual cualquiera. Si consideramos el desplazamiento virtual \bar{u} como una variación del desplazamiento real u , entonces los Lemas 1.79 y 1.86 nos dicen que las condiciones necesarias de optimalidad se expresan en la forma:

$$\delta_{\bar{u}}\pi(u) = \partial_{\varepsilon} [\pi(u + \varepsilon\bar{u})]_{\varepsilon=0} = 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

Con eso, tomando $v = u + \varepsilon \bar{u}$ y $\bar{v} = \varepsilon \bar{u}$ en (3.5), tenemos fácilmente:

$$\delta_{\bar{u}}\pi(u) = a(u, \bar{u}) - \ell(\bar{u}) = 0 \quad \forall \bar{u} \in \tilde{\mathcal{U}}.$$

El mínimo local u es entonces solución de la formulación variacional, por lo cual debe ser en realidad un mínimo global en \mathcal{U} de la energía potencial total. \square

Para finalizar esta sección veamos qué relaciones se cumplen entre las diferentes formulaciones del problema de elasticidad lineal. Hemos visto en este capítulo cuatro formulaciones matemáticas diferentes y equivalentes del equilibrio mostradas en la Figura 3.3. Las primeras dos formulaciones del equilibrio mostradas en la figura constituyen versiones alternativas del mismo balance de fuerzas visto en el Capítulo 2, siendo la ecuación puntual de equilibrio la utilizada a la formulación clásica del problema de elasticidad. La tercera formulación conduce a la formulación variacional del problema de elasticidad lineal, y la cuarta conduce a una formulación del problema de elasticidad que consiste en encontrar la solución como un mínimo o un punto estacionario de la energía potencial total.

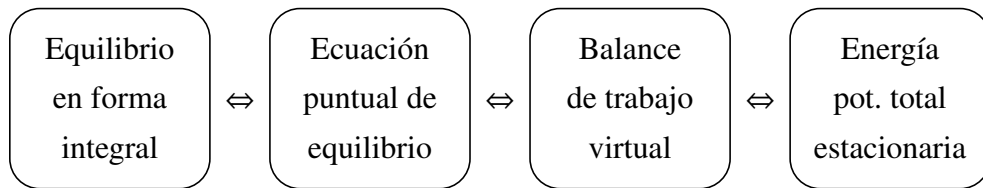


Figura 3.3: Formulaciones del equilibrio en el problema de elasticidad lineal.

Capítulo 4

Método de Rayleigh-Ritz

En pocas palabras, *el método de Rayleigh-Ritz* consiste en buscar la solución del problema, o una aproximación la misma, en un espacio generado por una base finita, imponiendo la ecuación fundamental de la formulación variacional para los desplazamientos virtuales generados por esa misma base. En la aplicación del método al problema que nos ocupa, el mismo coincide con el *método de residuos ponderados de Bubnov-Galerkin*, por lo que se denomina con ese nombre o simplemente con el nombre de *Galerkin* en muchos textos.

Supongamos que conocemos una función u_0 en el conjunto solución \mathcal{U} y las funciones $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ en el conjunto de los desplazamientos virtuales $\bar{\mathcal{U}}$. Entonces, podemos definir los conjuntos $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ y $\bar{\mathcal{U}}' \subset \bar{\mathcal{U}}$ en la forma:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}' &= \{u_0 + \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\}, \\ \bar{\mathcal{U}}' &= \{\beta_1 \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2 + \dots + \beta_n \bar{u}_n : \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}$$

En el caso habitual en que los desplazamientos virtuales $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ son linealmente independientes, los espacios \mathcal{U}' y $\bar{\mathcal{U}}'$ tienen dimensión n . La aproximación numérica de la solución obtenida por el método de Rayleigh-Ritz es el desplazamiento $u \in \mathcal{U}'$ que satisface el teorema del trabajo virtual considerando los desplazamientos virtuales pertenecientes a $\bar{\mathcal{U}}'$, es decir:

$$a(u, \bar{u}) = \ell(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}'. \quad (4.1)$$

Por lo tanto tenemos:

$$a\left(u_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{u}_j, \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{u}_i\right) = \ell\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{u}_i\right) \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n,$$

que puede reescribirse como:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_j a(\bar{u}_j, \bar{u}_i) = \sum_{i=1}^n \beta_i \ell(\bar{u}_i) - \sum_{i=1}^n \beta_i a(u_0, \bar{u}_i) \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n.$$

Por lo tanto, llamando \mathbf{K} a la matriz de componentes $K_{ij} = a(\bar{u}_j, \bar{u}_i)$, \mathbf{F} al vector de componentes $F_i = \ell(\bar{u}_i) - a(u_0, \bar{u}_i)$ y $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ a los vectores de parámetros, podemos expresar esta última ecuación en la forma:

$$\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{F} \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n, \quad (4.2)$$

y por lo tanto debe cumplirse:

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}. \quad (4.3)$$

Ejercicio 4.1 Muestre que se cumple (4.3) utilizando la igualdad (4.2).

4.1. Propiedades del sistema lineal

Note que tenemos n incógnitas α_i mientras que (4.3) representa n ecuaciones lineales. Veamos si este sistema lineal de ecuaciones tiene solución. En primer lugar, la matriz \mathbf{K} es simétrica por causa de la simetría de a . Además \mathbf{K} es positiva. Para ver esto escojamos un vector $\boldsymbol{\beta}$ cualquiera y definamos la función $e = \beta_1 \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2 + \dots + \beta_n \bar{u}_n$. Entonces, por causa de la bilinealidad de a obtenemos:

$$a(e, e) = a\left(\sum_{j=1}^n \beta_j \bar{u}_j, \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{u}_i\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_i \beta_j a(\bar{u}_j, \bar{u}_i) = \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\beta}.$$

La igualdad anterior nos permite demostrar el lema siguiente:

Lema 4.2 La matriz \mathbf{K} es positiva, es decir, $\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\beta} \geq 0$ para todo $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n$. Si además el funcional bilineal a es definido positivo en $\bar{\mathcal{U}}$ y las funciones $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ son linealmente independientes, entonces la matriz \mathbf{K} es definida positiva, es decir $\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\beta} > 0$ para todo $\boldsymbol{\beta} \neq \mathbf{0}$.

Demostración. Note que $\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\beta} = a(e, e) \geq 0$ por ser a positivo en $\bar{\mathcal{U}}$. Veamos que el producto $\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\beta}$ es nulo solamente si $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$. Si $\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\beta} = 0$, entonces $a(e, e) = 0$. Por ser a definido positivo en $\bar{\mathcal{U}}$, entonces debe ser $e = \beta_1 \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2 + \dots + \beta_n \bar{u}_n = 0$. Como la combinación lineal de las funciones linealmente independientes $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ es nula, entonces cada uno de los coeficientes es nulo, y por lo tanto $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$. \square

Observación 4.3 Si se cumplen las hipótesis del lema anterior, entonces la matriz \mathbf{K} es simétrica y definida positiva. En ese caso la matriz \mathbf{K} es invertible, y el sistema lineal (4.3) tiene solución única. Por lo tanto, bajo las hipótesis del lema anterior, la solución de Rayleigh-Ritz $u \in \mathcal{U}'$ es única.

4.2. Propiedades de la solución de Rayleigh-Ritz

Dado un problema de elasticidad lineal, por lo general no es posible conocer un conjunto de funciones $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$, que junto con u_0 nos permitan encontrar la solución exacta u del problema. Lo que sí es posible hacer es definir $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ igual a un conjunto de funciones que sepamos puedan aproximar bien cualquier función del conjunto \mathcal{U} . Por ejemplo, podemos definir $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ como la base de las funciones polinómicas u otro tipo de base utilizada en métodos de interpolación. En el caso general, la solución exacta del problema no podrá ser representada por una combinación lineal del conjunto \mathcal{U} , y entonces la solución u del sistema lineal de ecuaciones (4.3) será solamente una aproximación de la solución exacta, que llamaremos *solución aproximada*. El teorema siguiente nos muestra el significado físico de la solución aproximada obtenida por el método de Rayleigh-Ritz.

Teorema 4.4 (Mínima energía potencial total de la solución de Rayleigh-Ritz) Supongamos son dadas una función $u_0 \in \mathcal{U}$ y funciones $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \in \bar{\mathcal{U}}$ linealmente independientes. Supongamos además que se cumplen las hipótesis del Ejercicio 3.9 y entonces el funcional a es definido positivo. Entonces la solución única u del sistema de ecuaciones (4.3) es la función de \mathcal{U}' que posee la mínima energía potencial total.

Demostración. Sea v una función cualquiera en \mathcal{U}' . Entonces v podrá expresarse como $v = u + \bar{e}$ con $\bar{e} \in \bar{\mathcal{U}}$. Por lo tanto tenemos:

$$\pi(v) = \frac{1}{2}a(u + \bar{e}, u + \bar{e}) - \ell(u + \bar{e}) = \frac{1}{2}a(u, u) - \ell(u) + \frac{1}{2}a(\bar{e}, \bar{e}) + a(u, \bar{e}) - \ell(\bar{e}).$$

Como u es solución de (4.1), los dos últimos términos se anulan entre sí. Por lo tanto, para $\bar{e} \neq \mathbf{0}$, tenemos:

$$\pi(v) = \pi(u) + \frac{1}{2}a(\bar{e}, \bar{e}) > \pi(u),$$

lo que demuestra el teorema. □

A partir de ahora llamemos $u^* \in \mathcal{U}$ a la solución exacta del problema. Si u^* no estuviera en el espacio \mathcal{U}' , entonces la solución de Rayleigh-Ritz, que continuaremos llamando u , no podría ser exactamente igual a u^* , solo podría ser una buena aproximación en el mejor caso. El teorema anterior nos muestra que si u^* pertenece a \mathcal{U}' entonces la solución de Rayleigh-Ritz u sí será exacta, puesto que u tiene energía potencial total mínima en \mathcal{U}' y no puede haber otra función con energía potencial total menor a la de u^* .

Sin embargo, en caso de que u^* no pertenezca a \mathcal{U}' , necesitamos averiguar qué magnitud puede tener el error $u^* - u$ para saber si u es o no una buena aproximación de la solución exacta. En particular, sería muy importante probar que la solución de Rayleigh-Ritz u es la que más se aproxima a u^* entre todas las funciones $v \in \mathcal{U}'$. El primer problema que se nos plantea es cómo saber si una función u se aproxima más a u^* que otra función v . Para hacer esta comparación podemos considerar una norma en el espacio $\bar{\mathcal{U}}$ y comparar las normas $\|u^* - u\|$ y $\|u^* - v\|$.

Teorema 4.5 (Mínimo error de la solución de Rayleigh-Ritz) Supongamos son dadas una función $u_0 \in \mathcal{U}$ y funciones $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n \in \bar{\mathcal{U}}$ linealmente independientes. Supongamos además que se cumplen las hipótesis del Ejercicio 3.9 y entonces el funcional a es definido positivo. Entonces la solución única u del sistema de ecuaciones (4.3) es la función de \mathcal{U}' que más se aproxima a la solución exacta u^* del problema de elasticidad lineal, en el sentido que cumple:

$$a(u^* - u, u^* - u) < a(u^* - v, u^* - v) \quad \forall v \neq u \text{ en } \mathcal{U}' .$$

Demostración. La solución exacta u^* y la solución de Rayleigh-Ritz u cumplen:

$$a(u^*, \bar{u}) = \ell(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}} , \quad (4.4)$$

$$a(u, \bar{u}) = \ell(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}' . \quad (4.5)$$

Considerando $\bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}'$ y restando las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$a(u^* - u, \bar{u}) = 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}' . \quad (4.6)$$

Sea v una función cualquiera en \mathcal{U}' . La misma puede expresarse como $v = u + \bar{e}$ con $\bar{e} \in \bar{\mathcal{U}}'$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} a(u^* - v, u^* - v) &= a(u^* - u - \bar{e}, u^* - u - \bar{e}) \\ &= a(u^* - u, u^* - u) - 2a(u^* - u, \bar{e}) + a(\bar{e}, \bar{e}) . \end{aligned}$$

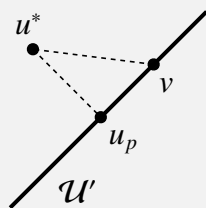
Como el segundo término se anula entonces obtenemos el resultado buscado. \square

Observación 4.6 Si el funcional a es definido positivo en $\bar{\mathcal{U}}$, entonces podemos definir la *norma de la energía* $\|\bar{u}\|_a = \sqrt{a(\bar{u}, \bar{u})}$, y expresar el resultado del teorema anterior en la forma:

$$\|u^* - u\|_a < \|u^* - v\|_a \quad \forall v \neq u \text{ en } \mathcal{U}' .$$

Note además que $\frac{1}{2}a(u^* - u, u^* - u) = \frac{1}{2}\|u^* - u\|_a^2$ es la energía de deformación correspondiente a al desplazamiento $u^* - u$, por lo que podemos decir que la solución de Rayleigh-Ritz es el campo de desplazamientos $u \in \mathcal{U}'$ tal que la energía de deformación de la diferencia $u^* - u$ es mínima.

Observación 4.7 (Interpretación geométrica de la solución de Rayleigh-Ritz) Considere la figura siguiente, donde el espacio \mathcal{U}' se ha representado como unidimensional.



La proyección u_p de u^* es el punto de \mathcal{U}' más cercano a la solución exacta u^* , y es tal que el vector $u^* - u_p$ es normal a \mathcal{U}' . De hecho, por Pitágoras tenemos que cualquier otro punto v de \mathcal{U}' dista de u^* la distancia $\|u^* - v\|_a$, la cual satisface $\|u^* - v\|_a^2 = \|u^* - u_p\|_a^2 + \|u_p - v\|_a^2 \geq \|u^* - u_p\|_a^2$. Siendo $u^* - u_p$ normal al espacio \mathcal{U}' , el mismo es normal a todo $\bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}'$. Por lo tanto se cumple:

$$a(u^* - u_p, \bar{u}) = 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}'. \quad (4.7)$$

Utilizando la linealidad de a , si a la ecuación anterior le cambiamos el signo y le sumamos la ecuación (4.4), entonces obtenemos:

$$a(u_p, \bar{u}) = \ell(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}'. \quad (4.8)$$

Note que la proyección u_p satisface la ecuación variacional de Rayleigh-Ritz, y por lo tanto u_p es la solución que habíamos llamado u . Note además que las cuentas presentadas son válidas cualquiera sea la dimensión de \mathcal{U}' .

Capítulo 5

Método de elementos finitos

El método de elementos finitos es un método numérico que permite hallar una solución aproximada de la formulación variacional del problema de elasticidad lineal. En la Sección 4 veremos el planteo del método teórico sobre el que se fundamenta el mismo, y en la Sección 5.1 veremos los detalles de implementación que conducen a un método práctico y sistemático de resolución.

5.1. Discretización de elementos finitos

Para definir las funciones u_0 y $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$, se utiliza la llamada *discretización de elementos finitos*. La misma consiste en dividir el intervalo I en un conjunto de partes que llamaremos *elementos*. Dentro de los elementos las funciones u_0 y $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n$ se representan por polinomios que interpolan los llamados *valores nodales*.

Veamos por ejemplo el caso del elemento lineal. Supongamos dividimos el intervalo I en tres elementos lineales como es mostrado en la Figura 5.1. Los desplazamientos que podemos representar con esa discretización corresponden a las funciones continuas y lineales sobre los elementos que pueden ser definidas por los cuatro valores nodales U_1, U_2, U_3 y U_4 como es mostrado en la figura. Por lo tanto podremos tomar $u_0 = \hat{u}\hat{N}_1$ y las funciones \hat{N}_2, \hat{N}_3 y \hat{N}_4 mostradas en la Figura 5.1 como el desplazamiento de \mathcal{U} y los desplazamientos virtuales del conjunto $\bar{\mathcal{U}}$ que utilizaremos para definir los conjuntos \mathcal{U}' y $\bar{\mathcal{U}}'$. El método de elementos finitos nada más consiste en aplicar el método de Rayleigh-Ritz utilizando la base de funciones definida de esta forma.

El método de elementos finitos tiene un conjunto importante de ventajas:

- Define una base de funciones que es siempre linealmente independiente y que es *ajustable* a las características del problema de acuerdo con la precisión deseada: para mejorar la precisión de los resultados se puede utilizar un número mayor de elementos más pequeños.
- Las incógnitas del problema tienen un significado físico evidente: son los desplazamientos de los nodos del problema.

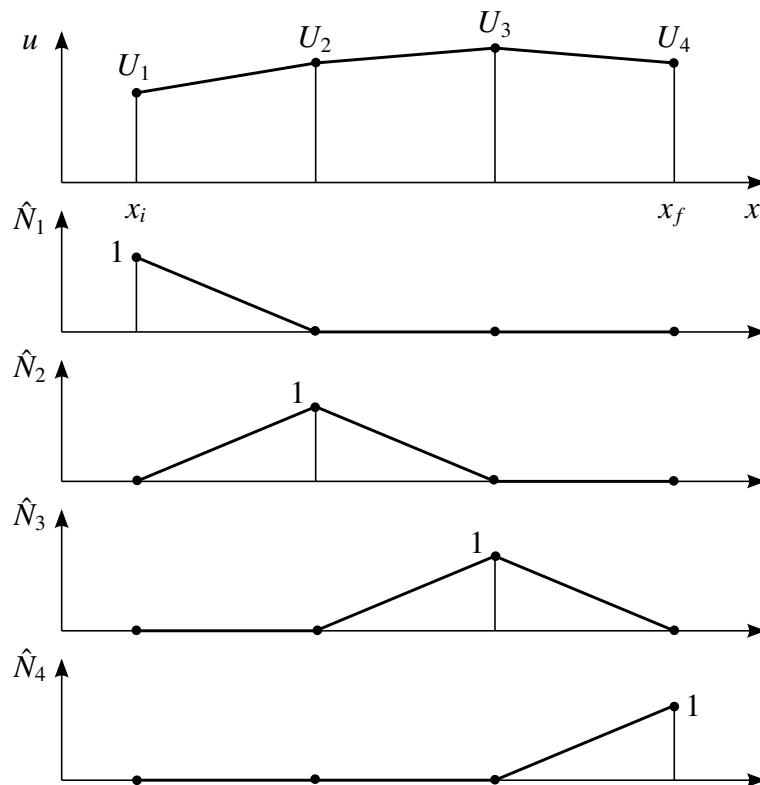


Figura 5.1: Discretización de elementos finitos.

- Es muy eficiente en la tarea de integración: conduce a integrales de funciones polinómicas de grado bajo. Además, si el número de elementos es importante, veremos que el número de integrales a realizar es proporcional al número de elementos de la estructura, el cual es mucho menor que el número de componentes de la matriz \mathbf{K} .
- Si el número de elementos es importante, veremos que el método conduce a matrices \mathbf{K} con un número importante de componentes nulas, lo cual facilita enormemente la resolución de los sistemas lineales.

Ejercicio 5.1 Considere el problema representado en la Figura 3.2, donde el área transversal A y el módulo de Young E son constantes. Suponga que la barra se divide en n elementos y los desplazamientos real y virtual se representan con las funciones lineales por partes de la Figura 5.1. Demuestre por inducción completa que la solución que proporciona el método de elementos finitos es el *interpolante lineal por partes*, es decir, la función lineal por partes tal que los desplazamientos de los nodos coinciden con la solución exacta. ¿Qué se puede decir de los desplazamientos calculados en el interior de los elementos?

5.2. Implementación del método

En el caso más general de dividir la barra en $n - 1$ elementos, la representación de elementos finitos de la aproximación de la solución es:

$$u = \hat{N}_1 U_1 + \hat{N}_2 U_2 + \dots + \hat{N}_n U_n,$$

donde se deberá cumplir $U_1 = \hat{u}$ para satisfacer la condición de contorno en el extremo x_i de la barra. Olvidemos por el momento esta condición y pensemos por ejemplo que conocemos la reacción R del apoyo del extremo izquierdo de la barra correspondiente a la solución del problema. Si definimos la matriz

$$\hat{\mathbf{N}} = (\hat{N}_1 \quad \hat{N}_2 \quad \dots \quad \hat{N}_n),$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= \{\hat{\mathbf{N}}\mathbf{U} : \mathbf{U} \in \mathbb{R}^n\}, \\ \bar{\mathcal{U}}' &= \{\hat{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{U}} : \bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Además, definiendo

$$\hat{\mathbf{B}} = (\partial_x \hat{N}_1 \quad \partial_x \hat{N}_2 \quad \dots \quad \partial_x \hat{N}_n),$$

tenemos $\partial_x u = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{U}$ y $\partial_x \bar{u} = \hat{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{U}}$. El método de Rayleigh-Ritz requiere en este caso:

$$\int_I EA \partial_x u \partial_x \bar{u} dx = \int_I b \bar{u} dx + R \bar{u}(x_i) + F \bar{u}(x_f) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}',$$

que podemos escribirlo en la forma:

$$\int_I \bar{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{B}}^T EA \hat{\mathbf{B}} \mathbf{U} dx = \int_I \bar{\mathbf{U}}^T \hat{\mathbf{N}}^T b dx + R \bar{U}_1 + F \bar{U}_n \quad \forall \bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^n,$$

o también:

$$\bar{\mathbf{U}}^T \left(\int_I \hat{\mathbf{B}}^T EA \hat{\mathbf{B}} dx \right) \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}^T \left(\int_I \hat{\mathbf{N}}^T b dx \right) + \bar{\mathbf{U}}^T (R \mathbf{e}_1 + F \mathbf{e}_n) \quad \forall \bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^n,$$

donde $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ es un vector cuya primer componente es uno y las demás cero, mientras que $\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ tiene todas las componentes nulas excepto la última que vale uno. Como la ecuación anterior es válida para todo $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^n$ deberá cumplirse:

$$\int_I \hat{\mathbf{B}}^T EA \hat{\mathbf{B}} dx \mathbf{U} = \int_I \hat{\mathbf{N}}^T b dx + R \mathbf{e}_1 + F \mathbf{e}_n.$$

Por lo tanto, llamando:

$$\hat{\mathbf{K}} = \int_I \hat{\mathbf{B}}^T EA \hat{\mathbf{B}} dx, \quad \hat{\mathbf{F}} = \int_I \hat{\mathbf{N}}^T b dx,$$

tenemos:

$$\hat{\mathbf{K}}\mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}} + R\mathbf{e}_1 + F\mathbf{e}_n.$$

En particular, para la discretización de tres elementos mostrada en la Figura 5.1 obtenemos:

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Note que este sistema lineal no lo podemos resolver porque desconocemos el valor R de la reacción del apoyo. Por otra parte, la matriz $\hat{\mathbf{K}}$ es singular, ya que para un conjunto nulo de fuerzas externas sabemos que el vector \mathbf{U} admite cualquier desplazamiento rígido como solución del sistema lineal. El procedimiento que emplearemos para determinar la solución consiste en utilizar primero la condición de contorno $U_1 = \hat{u}$, resolver el sistema lineal dado por las líneas 2 a 4 del sistema anterior y utilizar la primera línea para obtener posteriormente la reacción R . Por lo tanto, el sistema que debemos resolver es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21}\hat{u} \\ K_{31}\hat{u} \\ K_{41}\hat{u} \end{pmatrix}.$$

En el sistema lineal de la ecuación anterior podemos identificar la matriz \mathbf{K} , el vector $\boldsymbol{\alpha}$ y el vector \mathbf{F} del método de Rayleigh-Ritz. La matriz \mathbf{K} del sistema lineal es llamada *matriz de rigidez de la estructura*, el vector \mathbf{U} es llamado *vector de desplazamientos nodales de la estructura* mientras que al vector \mathbf{F} correspondiente a la suma de los vectores del lado derecho se le llama *vector de fuerzas nodales equivalentes de la estructura*.

5.2.1. Ecuación del elemento finito

Se puede observar en la Figura 5.1 que algunas de las componentes de la matriz \mathbf{K} que debemos calcular son nulas. Eso pasa cuando calculamos $a(u_0, \bar{u}_2)$, $a(u_0, \bar{u}_3)$ y $a(\bar{u}_1, \bar{u}_3)$. Además, las que no son nulas, como por ejemplo $a(\bar{u}_1, \bar{u}_2)$, no necesitan ser integradas en todo el intervalo I sino solamente en el segundo elemento donde ni \bar{u}_1 ni \bar{u}_2 se anulan. Si el intervalo I es dividido en un número grande de elementos, entonces la mayoría de las integrales serán nulas. La mejor estrategia para estructurar el cálculo de la matriz \mathbf{K} y el vector \mathbf{F} de forma de considerar únicamente las integrales no nulas se obtiene de considerar la *ecuación del elemento finito*. Este procedimiento no solamente permitirá evitar las integrales nulas sino que facilitará la comprensión y la programación del método de elementos finitos.

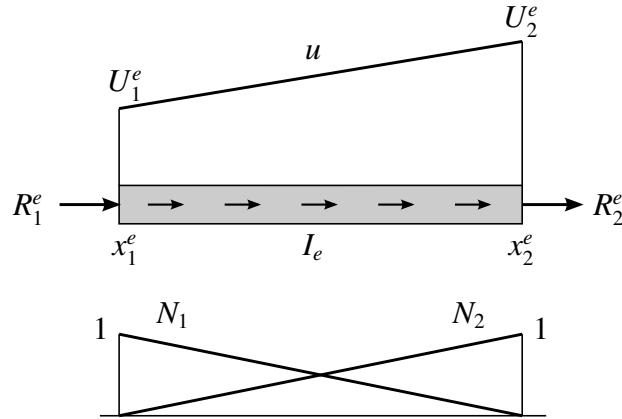


Figura 5.2: Elemento lineal.

Para obtener la ecuación del elemento supondremos conocidas las fuerzas R_1^e y R_2^e existentes en el extremo izquierdo x_1^e y en el extremo derecho x_2^e del elemento, vea la Figura 5.2. El teorema del trabajo virtual aplicado al elemento resulta entonces en:

$$\int_{I_e} EA \partial_x u \partial_x \bar{u} dx = \int_{I_e} b \bar{u} dx + R_1^e \bar{u}(x_1^e) + R_2^e \bar{u}(x_2^e) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}_e,$$

donde los espacios \mathcal{U}_e y $\bar{\mathcal{U}}_e$ del elemento son definidos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}_e &= \{N_1 U_1^e + N_2 U_2^e : U_1^e, U_2^e \in \mathbb{R}\}, \\ \bar{\mathcal{U}}_e &= \{N_1 \bar{U}_1^e + N_2 \bar{U}_2^e : \bar{U}_1^e, \bar{U}_2^e \in \mathbb{R}\}, \end{aligned}$$

donde N_1 y N_2 son las *funciones de interpolación del elemento* mostradas en la Figura 5.2. Llamando:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= (N_1 \quad N_2), & \mathbf{U}^e &= (U_1^e \quad U_2^e)^\top, \\ \mathbf{B} &= (\partial_x N_1 \quad \partial_x N_2), & \bar{\mathbf{U}}^e &= (\bar{U}_1^e \quad \bar{U}_2^e)^\top, \end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{N} \mathbf{U}^e, & \partial_x u &= \mathbf{B} \mathbf{U}^e, \\ \bar{u} &= \mathbf{N} \bar{\mathbf{U}}^e, & \partial_x \bar{u} &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}}^e. \end{aligned}$$

Con estas notaciones, el teorema del trabajo virtual puede escribirse como:

$$\int_{I_e} (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{U}^e dx = \int_{I_e} (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \mathbf{N}^\top b dx + (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \begin{pmatrix} R_1^e \\ R_2^e \end{pmatrix} \quad \forall \bar{\mathbf{U}}^e \in \mathbb{R}^2.$$

Nuevamente, simplificando $\bar{\mathbf{U}}^e$ y definiendo:

$$\mathbf{K}^e = \int_{I_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{B} dx, \quad \mathbf{F}^e = \int_{I_e} \mathbf{N}^\top b dx, \quad \mathbf{R}^e = \begin{pmatrix} R_1^e \\ R_2^e \end{pmatrix},$$

tenemos la ecuación del elemento finito:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e,$$

donde \mathbf{K}^e es llamada *matriz de rigidez del elemento* y \mathbf{F}^e *vector de fuerzas nodales equivalentes del elemento*. Las componentes de \mathbf{F}^e , vistas como fuerzas puntuales, son equivalentes a b en el sentido que realizan el mismo trabajo para desplazamientos virtuales en $\tilde{\mathbf{U}}_e$. En algunos casos podremos aproximar el campo de fuerzas de volumen b por una función lineal en el elemento, es decir, podremos tomar $b = \mathbf{N}\mathbf{b}^e$, donde $\mathbf{b}^e = (b_1^e \ b_2^e)^\top$ es el vector de valores nodales correspondiente a b .

Ejercicio 5.2 Muestre que en el elemento lineal de la Figura 5.2 las fuerzas nodales equivalentes F_1^e y F_2^e tienen la misma magnitud que las fuerzas puntuales que realizarían el mismo trabajo virtual que las fuerzas distribuidas dadas por b para cualquier desplazamiento virtual de $\tilde{\mathbf{U}}$. Utilizando este resultado, halle el valor de las fuerzas nodales equivalentes a una fuerza puntual aplicada sobre una sección transversal de coordenada x y muestre que ambas fuerzas nodales son expresiones lineales de x .

5.2.2. Montaje de la ecuación global

El primer paso para obtener el sistema de ecuaciones del método de elementos finitos es ensamblar las ecuaciones de los elementos. Por ejemplo, si consideramos la discretización de dos elementos de la Figura 5.1 tenemos las siguientes ecuaciones de elementos:

$$\begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \end{pmatrix}, \\ \\ 2 \quad 3 \\ \begin{pmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1^2 \\ R_2^2 \end{pmatrix}, \\ \\ 3 \quad 4 \\ \begin{pmatrix} K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^3 \\ F_2^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1^3 \\ R_2^3 \end{pmatrix}, \end{array}$$

donde se ha utilizado la numeración global para los valores nodales U_1 , U_2 , U_3 y U_4 del desplazamiento. Note que los subíndices colocados encima de la matriz de rigidez indican cuál es el desplazamiento que multiplica los elementos de una determinada columna, mientras que los índices colocados a la izquierda de las matrices simplemente numera las ecuaciones con índices iguales a los de las columnas. Por lo tanto, si ordenamos las ecuaciones de acuerdo a esos índices (sumando las

ecuaciones con igual índice), obtenemos:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 + F_1^2 \\ F_2^2 + F_1^3 \\ F_2^3 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 + R_1^2 \\ R_2^2 + R_1^3 \\ R_2^3 \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Note que este es el mismo sistema de la ecuación (5.1) obtenida anteriormente, solamente que ahora tenemos algunas diferencias en las notaciones empleadas. De hecho, la incógnita R_1^1 es la reacción R sobre el extremo izquierdo de la barra, mientras que por el principio de acción y reacción tenemos $R_2^1 + R_1^2 = R_2^2 + R_1^3 = 0$.

Observación 5.3 En el sistema lineal que se obtiene de ensamblar las ecuaciones de los elementos se cancelan todas las incógnitas que representan fuerzas de superficie entre los elementos.

Al igual que antes, este sistema lineal no puede ser resuelto pues no han sido impuestas las condiciones de contorno $U_1 = \hat{u}$ y $R_2^3 = F$. La primera línea del sistema de ecuaciones servirá para encontrar el valor de la reacción $R = R_1^1$ mientras que las tres líneas siguientes definen el sistema lineal del método de elementos finitos:

$$\begin{matrix} & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 & 0 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 + K_{11}^3 & K_{12}^3 \\ 0 & K_{21}^3 & K_{22}^3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} F_2^1 + F_1^2 \\ F_2^2 + F_1^3 \\ F_2^3 \end{pmatrix} & + & \begin{pmatrix} -K_{21}^1 \hat{u} \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \end{matrix}.$$

Observación 5.4 En el caso en que el intervalo original sea dividido en un número importante de elementos, la matriz de rigidez es *dispersa*, es decir, posee un gran número de componentes nulas. Este hecho es consecuencia de la forma en que fueron escogidas las funciones del método de Rayleigh-Ritz. Como puede observarse en la Figura 5.1, dichas funciones son nulas en todo el dominio con la excepción de los elementos adyacentes a un nodo dado. De hecho, hemos visto que el número de integrales a realizar es proporcional al número de elementos de la estructura. Por lo tanto, el número de elementos no nulos de la matriz de rigidez será aproximadamente proporcional al número de elementos utilizado, el cual es mucho menor al número total de componentes de la matriz ensamblada. Esta característica de la matriz de rigidez permite resolver los sistemas lineales de forma muy eficiente utilizando algoritmos específicos para este tipo de matriz definida positiva y dispersa.

5.2.3. Elemento isoparamétrico lineal

Todavía nos falta determinar un modo sencillo de calcular las integrales definidas sobre los elementos. Veamos el caso del elemento lineal. Como muestra la Figura 5.3, podemos utilizar un el cambio de variable que lleva el intervalo $I_0 = [-1, 1]$ en el intervalo $I_e = [x_1^e, x_2^e]$ correspondiente al elemento número e . Este cambio de variable será útil para realizar todas las integrales en el mismo intervalo $[-1, 1]$. En el caso del *elemento isoparamétrico* definimos el cambio de variable utilizando las mismas funciones de interpolación N_1 y N_2 que utilizamos para aproximar los desplazamientos. Para el caso del elemento lineal, estas funciones cumplen:

$$\begin{aligned} N_1(-1) &= 1, & N_1(1) &= 0, \\ N_2(-1) &= 0, & N_2(1) &= 1. \end{aligned}$$

El cambio de variable será entonces dado por la función $\hat{x} : I_0 \rightarrow I_e$ que puede expresarse en la forma:

$$\begin{aligned} \hat{x}(\eta) &= N_1(\eta)x_1^e + N_2(\eta)x_2^e, \\ \Rightarrow \hat{x} &= \mathbf{N} \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \end{pmatrix}, \quad \text{con } \mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

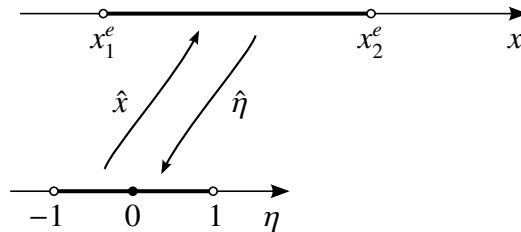


Figura 5.3: Transformación de coordenadas en el elemento lineal.

Por ser utilizadas también para representar la geometría del elemento, las funciones N_1 y N_2 son también llamadas *funciones de forma*. Un simple cálculo muestra que las mismas son dadas por:

$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta), \quad N_2(\eta) = \frac{1}{2}(1 + \eta).$$

Las derivadas de la función \hat{x} (Jacobiana del cambio de variable) y de su inversa $\hat{\eta}$ serán importantes a la hora de calcular integrales y derivadas sobre el elemento de referencia I_0 de funciones inicialmente definidas sobre I_e . Las mismas pueden hallarse en la forma:

$$\mathbf{J} = \partial_\eta \hat{x}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \partial_x \hat{\eta}.$$

Por lo general \mathbf{J} se calcula derivando las funciones de forma, mientras que \mathbf{J}^{-1} se calcula invirtiendo el valor \mathbf{J} . Veamos entonces el cálculo de \mathbf{J} . Las derivadas de la

función \hat{x} son dadas por:

$$\begin{aligned}\partial_\eta \hat{x} &= \partial_\eta N_1 x_1^e + \partial_\eta N_2 x_2^e, \\ \Rightarrow \mathbf{J} = \partial_\eta \hat{x} &= \partial_\eta \mathbf{N} \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \end{pmatrix}, \quad \text{con } \partial_\eta \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \partial_\eta N_1 & \partial_\eta N_2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Veamos cómo estas expresiones pueden servirnos para calcular integrales. La matriz de rigidez del elemento \mathbf{K}^e y el vector de fuerzas nodales \mathbf{F}^e pueden calcularse en la forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{K}^e &= \int_{I_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{B} \, dx = \int_{I_0} J_0 \mathbf{B}^\top \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{B} \, d\eta, \\ \mathbf{F}^e &= \int_{I_e} \mathbf{N}^\top b \, dx = \int_{I_0} J_0 \mathbf{N}^\top b \, d\eta,\end{aligned}$$

donde J_0 es el determinante Jacobiano del cambio de variable dado por $J_0 = |\mathbf{J}|$. Note que en las expresiones anteriores los integrandos son funciones de la variable η . Admitiendo que \mathbf{N} es la matriz de las funciones de forma que hemos expresado en función de η , la dificultad mayor estriba en calcular la matriz $\mathbf{B} = \partial_x \mathbf{N}$, puesto que debemos calcular derivadas de la matriz \mathbf{N} respecto de la variable x .

La transformación del elemento nos sirve para definir las funciones de forma correspondientes a la configuración I_e . Admitiendo la ambigüedad en la notación, las funciones de forma definidas en I_e son dadas por:

$$\begin{aligned}N_1(x) &= N_1(\hat{\eta}(x)), \\ N_2(x) &= N_2(\hat{\eta}(x)),\end{aligned}$$

cuyas derivadas pueden hallarse como:

$$\begin{aligned}\partial_x N_i &= \partial_\eta N_i \partial_x \hat{\eta}, \\ \Rightarrow \partial_x \mathbf{N} &= \begin{pmatrix} \partial_x N_1^e & \partial_x N_2^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\eta N_1 & \partial_\eta N_2 \end{pmatrix} \partial_x \hat{\eta}, \\ \Rightarrow \partial_x \mathbf{N} &= \mathbf{J}^{-1} \partial_\eta \mathbf{N}.\end{aligned}$$

Veamos un resumen de todos estos cálculos para el caso del elemento cuadrático. El procedimiento para calcular las matrices de rigidez y los vectores de fuerzas nodales de los elementos es el siguiente:

Ejemplo 5.5 Los cálculos correspondientes al elemento de barra isoparamétrico cuadrático son los siguientes:

- Datos: posiciones de los nodos, funciones de forma, propiedades materiales y cargas externas:

$$x_1^e, x_2^e, x_3^e, \quad N_1(\eta), N_2(\eta), N_3(\eta), \quad E, A, b.$$

- Matriz de las funciones de interpolación y sus derivadas respecto de η :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix}, \quad \partial_\eta \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \partial_\eta N_1 & \partial_\eta N_2 & \partial_\eta N_3 \end{pmatrix}.$$

- Jacobiana de la transformación, su inversa y el determinante Jacobiano:

$$\mathbf{J} = \partial_{\eta} \mathbf{N} \begin{pmatrix} x_1^e \\ x_2^e \\ x_3^e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \text{inv}(\mathbf{J}), \quad J_0 = |\mathbf{J}|.$$

- Derivadas respecto de x , y matriz \mathbf{B} :

$$\partial_x \mathbf{N} = \mathbf{J}^{-1} \partial_{\eta} \mathbf{N}, \quad \mathbf{B} = \partial_x \mathbf{N}.$$

- Integrales en los elementos:

$$\mathbf{K}^e = \int_{I_0} J_0 \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{B} \, d\eta, \quad \mathbf{F}^e = \int_{I_0} J_0 \mathbf{N}^T b \, d\eta.$$

Ejercicio 5.6 Para el elemento lineal de área y módulo de Young constantes y para fuerzas de volumen lineales, es decir $b = \mathbf{N} \mathbf{b}^e$, muestre que las expresiones analíticas correspondientes a \mathbf{K}^e y \mathbf{F}^e son dadas por:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^e = \frac{\ell}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{b}^e,$$

donde $\ell = |x_2^e - x_1^e|$. Usando los resultados anteriores halle \mathbf{F}^e para b constante en el elemento.

5.2.4. Otros elementos isoparamétricos de tipo \mathbf{C}^0

Los elementos de tipo \mathbf{C}^0 son los que conducen a espacios \mathcal{U}' compuestos por funciones continuas pero no diferenciables en todo el dominio, como por ejemplo es el caso del elemento lineal, vea la Figura 5.1.

Ya hemos mencionado que podemos utilizar funciones de forma lineales o cuadráticas y, en general, podemos utilizar funciones de forma polinómicas de grado n . Para este caso, las condiciones que pediremos que cumplan las funciones de forma son las siguientes:

$$N_i(\eta_j) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

donde η_j es la coordenada del nodo j del elemento, por ejemplo $\eta_j = (2j - 2 - n)/n$. Para obtener las funciones de forma podemos utilizar los polinomios de Lagrange de grado n que se definen como:

$$L_i^n(\eta) = (\eta - \eta_1)(\eta - \eta_2) \dots (\eta - \eta_{i-1})(\eta - \eta_{i+1}) \dots (\eta - \eta_{n+1}).$$

Note que $L_i^n(\eta_j) = 0$ para todo $j \neq i$. Sin embargo $L_i^n(\eta_i)$ es distinto de 1, y por lo

tanto el polinomio debe ser normalizado. Para eso definimos los polinomios:

$$\ell_i^n(\eta) = \frac{L_i^n(\eta)}{L_i^n(\eta_i)}.$$

Utilizando estos polinomios, podemos definir para el elemento de grado n :

$$N_i(\eta) = \ell_i^n(\eta) \quad \text{para } \eta \in [-1, 1].$$

La Figura 5.4 muestra el gráfico de las funciones de forma lineales, cuadráticas y cúbicas.

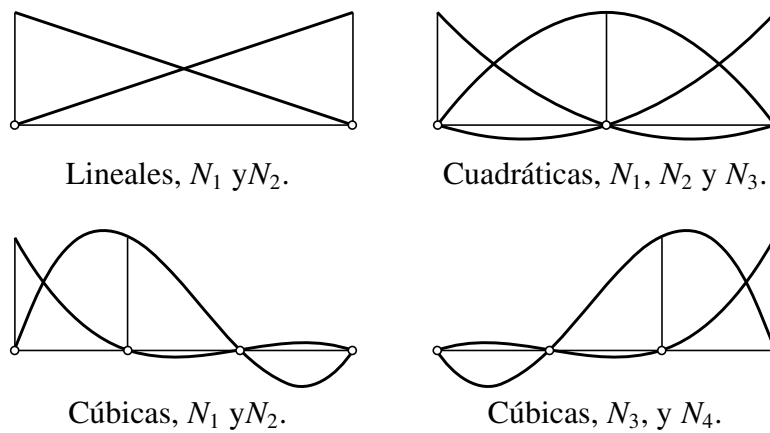


Figura 5.4: Funciones de forma del elemento de barra.

Ejercicio 5.7 Para los polinomios de Lagrange normalizados de grado n demuestre que se cumple:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \ell_i^n(\eta) = 1 \quad \forall \eta \in [-1, 1].$$

5.2.5. Integración numérica

Con excepción de los elementos lineales, no es posible o no es eficiente realizar una integración analítica para calcular las matrices de los elementos y los vectores de fuerzas nodales, por lo tanto se utilizan métodos numéricos. El procedimiento más utilizado es el método conocido como *cuadratura de Gauss-Legendre* que consiste en aproximar el valor de la integral en la siguiente forma:

$$I = \int_{-1}^1 f(\eta) d\eta \approx I_q = \sum_{i=1}^q w_i f(\eta_i),$$

donde los valores η_i son conocidos como *puntos de Gauss-Legendre* y los valores w_i son conocidos como *pesos de Gauss-Legendre*.

Una característica importante del método es que la cuadratura de Gauss-Legendre de orden q integra exactamente cualquier polinomio de orden $2q - 1$, y por esa razón el número de puntos utilizado es escogido de acuerdo al orden de los polinomios de interpolación del elemento. El método de Gauss-Legendre no es exacto en el caso en que la función que se está integrando no sea polinómica, pero tiene la ventaja de garantizar el mínimo error posible para un número fijo q de evaluaciones de la función. Algunos valores de los puntos y pesos de Gauss-Legendre son dados en el Cuadro 5.1.

Cuadro 5.1: Puntos y pesos de integración de Gauss-Legendre.

q	η_i	w_i	grado
1	0,0000 0000 0000 0000	2,0000 0000 0000 0000	1
2	$\pm 0,5773$ 5026 9189 6257	1,0000 0000 0000 0000	3
3	$\pm 0,7745$ 9666 9241 4834 0,0000 0000 0000 0000	0,5555 5555 5555 5556 0,8888 8888 8888 8889	5
4	$\pm 0,8611$ 3631 1594 0526 $\pm 0,3399$ 8104 3584 8563	0,3478 5484 5137 4538 0,6521 4515 4862 5461	7
5	$\pm 0,9061$ 7984 5938 6640 $\pm 0,5384$ 6931 0105 6831 0,0000 0000 0000 0000	0,2369 2688 5056 1891 0,4786 2867 0499 3666 0,5688 8888 8888 8889	9
6	$\pm 0,9324$ 6951 4203 1521 $\pm 0,6612$ 0938 6466 2645 $\pm 0,2386$ 1918 6083 1969	0,1713 2449 2379 1704 0,3607 6157 3048 1386 0,4679 1393 4572 6910	11

Capítulo 6

Análisis dinámico y de vibraciones

En este capítulo estudiaremos el problema dinámico de elasticidad lineal, que se diferencia de los vistos en los capítulos anteriores en que las funciones que definen el problema y su solución dependen también del tiempo. En este caso la ecuación de balance de la cantidad de movimiento lineal tendrá el rol que antes ocupaba la ecuación de equilibrio. Con eso plantearemos un problema dinámico de elasticidad lineal para el cual hallaremos su ecuación del movimiento y sus modos y frecuencias naturales. Luego de formular el problema en forma variacional, veremos el método de semidiscretización, el cual nos permitirá utilizar el método de elementos finitos para obtener una ecuación diferencial ordinaria. Esa ecuación nos permitirá hallar modos y frecuencias naturales aproximados para el problema. Para resolver el problema general veremos el método de Newmark.

6.1. Ecuación de balance de cantidad de movimiento lineal

Retornando al problema de elasticidad lineal, consideremos en este caso la situación en que la barra no se encuentra en equilibrio. Por lo tanto debemos revisar la ecuación de equilibrio la cual debe ser sustituida por una ecuación de balance de momento lineal. Admitiendo que sobre la barra de la Figura 6.1 actúan las mismas fuerzas que en el caso del equilibrio, entonces el balance de la cantidad de movimiento lineal en la dirección horizontal nos conduce en un determinado instante t a la siguiente ecuación:

$$N(x_b, t) - N(x_a, t) + \int_{x_a}^{x_b} b(x, t) dx = \partial_t \int_{x_a}^{x_b} \rho(x) A(x) \partial_t u(x, t) dx .$$

La expresión anterior es análoga a la segunda ley de Newton para una partícula, donde tenemos la fuerza neta igualada a la variación de la cantidad de movimiento lineal de la misma. En este caso cantidad de movimiento lineal es dada por una integral, puesto que la masa está distribuida de acuerdo con la densidad ρ del material y el área A de la sección transversal. Note también que se asume que las magnitudes N , b y u pueden depender del tiempo, mientras que las propiedades de la barra ρ y A se asumen independientes del mismo.

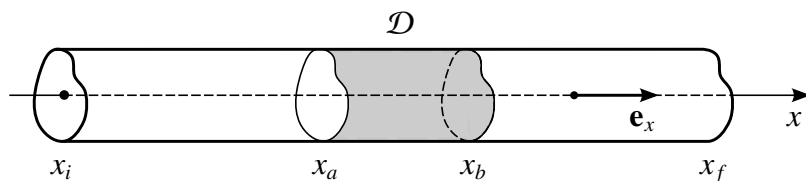


Figura 6.1: Geometría de la barra.

Introduciendo la derivada con respecto al tiempo dentro de la integral a la derecha y reordenando los términos tenemos:

$$\mathcal{N}(x_b, t) - \mathcal{N}(x_a, t) + \int_{x_a}^{x_b} b(x, t) - \rho(x)A(x)\partial_{tt}^2 u(x, t) dx = 0.$$

Note que si definimos la “fuerza” $b^*(x, t) = b(x, t) - \rho(x)A(x)\partial_{tt}^2 u(x, t)$ entonces obtenemos una expresión matemática completamente análoga a la ecuación de equilibrio que teníamos en el Capítulo 3. Aunque el significado de esta ecuación es diferente, permite las mismas manipulaciones matemáticas que consideramos en el Capítulo 3, por lo que debe cumplirse:

$$\partial_x \mathcal{N}(x, t) + b^*(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in I \times (0, \infty).$$

Sustituyendo $b^*(x, t)$, tenemos:

$$\partial_x \mathcal{N}(x, t) + b(x, t) - \rho(x)A(x)\partial_{tt}^2 u(x, t) = 0 \quad \forall (x, t) \in I \times (0, \infty).$$

Esta expresión es conocida como *ecuación puntual de balance de cantidad de movimiento lineal*.

Ejercicio 6.1 Demuestre que si la ecuación puntual de balance de cantidad de movimiento lineal es satisfecha en toda sección $x \in I$, y en todo tiempo $t \in (0, \infty)$, entonces se satisface la ecuación integral de balance de cantidad de movimiento lineal para cualquier parte \mathcal{D} de la barra en cualquier tiempo t .

6.2. Problema dinámico de elasticidad lineal

La relación desplazamiento-deformación de la barra es una relación cinemática que naturalmente no es afectada por la ausencia de equilibrio. En el caso de la ecuación constitutiva simplemente asumiremos que ocurre lo mismo y que la ausencia de equilibrio no afecta la misma, siendo el módulo de Young E independiente del tiempo. Así, la *formulación clásica* del problema dinámico de elasticidad lineal consiste en hallar las funciones

$$\begin{aligned} u &: \bar{I} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} && \text{con } u \in C^0(\bar{I} \times [0, \infty), \mathbb{R}), \text{ y } u \in C^2(I \times (0, \infty), \mathbb{R}), \\ \varepsilon &: \bar{I} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} && \text{con } \varepsilon \in C^0(\bar{I} \times [0, \infty), \mathbb{R}), \text{ y } \varepsilon \in C^1(I \times (0, \infty), \mathbb{R}), \\ \mathcal{N} &: \bar{I} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} && \text{con } \mathcal{N} \in C^0(\bar{I} \times [0, \infty), \mathbb{R}), \text{ y } \mathcal{N} \in C^1(I \times (0, \infty), \mathbb{R}), \end{aligned}$$

que satisfagan las ecuaciones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \partial_x \mathcal{N} + b = \rho A \partial_{tt}^2 u & \text{en } I \times (0, \infty) & \text{(ecuación de bal. de cant. de mov. lineal),} \\ \varepsilon = \partial_x u & \text{en } I \times (0, \infty) & \text{(relación desplazamiento-deformación),} \\ \mathcal{N} = EA \varepsilon & \text{en } I \times (0, \infty) & \text{(ecuación constitutiva),} \\ u(x_i, t) = \hat{u}(t) & t \in (0, \infty) & \text{(condición de contorno cinemática),} \\ \mathcal{N}(x_f, t) = F(t) & t \in (0, \infty) & \text{(condición de contorno mecánica),} \\ u(x, 0) = \hat{u}_0(x) & x \in I & \text{(condición inicial del desplazamiento),} \\ \partial_t u(x, 0) = \hat{v}_0(x) & x \in I & \text{(condición inicial de la velocidad).} \end{array} \right.$$

Los datos del problema son el intervalo $I = (x_i, x_f)$, las propiedades materiales $E, A, \rho \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R})$, que posiblemente varíen en el intervalo I pero no en el tiempo, la fuerza $b \in C^0(\bar{I} \times [0, \infty), \mathbb{R})$, las funciones $\hat{u}, F \in C^0([0, \infty), \mathbb{R})$ de las condiciones de contorno, y las funciones $u_0, v_0 \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R})$ de las condiciones iniciales. Las condiciones de contorno indicadas son válidas para el problema de la Figura 3.2 del Capítulo 3, y deben ser modificadas si se tienen otras configuraciones de apoyos.

El problema planteado, a pesar de ser bastante más complejo, continúa siendo lineal de acuerdo con el ejercicio siguiente:

Ejercicio 6.2 Pruebe que el problema de elasticidad planteado es lineal, es decir, considerando la misma barra definida en el intervalo I de propiedades A y E , si tenemos un problema a) con solución $(u^a, \varepsilon^a, \mathcal{N}^a)$ para los datos $(b^a, \hat{u}^a, F^a, \hat{u}_0^a, \hat{v}_0^a)$ y otro problema b) de solución $(u^b, \varepsilon^b, \mathcal{N}^b)$ para los datos $(b^b, \hat{u}^b, F^b, \hat{u}_0^b, \hat{v}_0^b)$, entonces cualquier combinación lineal de las soluciones es solución para el problema dado por la misma combinación lineal de los datos.

6.2.1. Ecuación del movimiento del problema

La ecuación del movimiento del problema cumple el rol análogo a la ecuación de Navier vista para el caso de equilibrio estático, y puede obtenerse de forma similar. De hecho, la ecuación de Navier para la “fuerza” b^* es:

$$\partial_x (EA \partial_x u) + b^* = 0 \quad \text{en } I \times (0, \infty).$$

Sustituyendo b^* , tenemos:

$$\partial_x (EA \partial_x u) + b - \rho A \partial_{tt}^2 u = 0 \quad \text{en } I \times (0, \infty).$$

En el caso usual en que los valores de las propiedades materiales y del área transversal sean constantes, obtenemos la siguiente versión simplificada:

$$EA \partial_{xx}^2 u + b - \rho A \partial_{tt}^2 u = 0 \quad \text{en } I \times (0, \infty).$$

6.2.2. Modos y frecuencias naturales de vibración

Las vibraciones libres del problema son las soluciones de la ecuación del problema de elasticidad para las fuerzas b y F , y el desplazamiento \hat{u} nulos. Consideremos

por el momento el caso en que las propiedades E , A , y ρ son constantes independientes de la variable x . Evidentemente, para diferentes condiciones iniciales se obtienen diferentes soluciones. Un procedimiento habitual para encontrar la solución del problema consiste en ignorar por el momento las condiciones de contorno y las condiciones iniciales, y ver en qué situación una solución del tipo $u(x, t) = e^{ikx}e^{i\omega t}$ puede ser solución de la ecuación del movimiento del problema. Imponiendo esa solución en la ecuación diferencial del movimiento obtenemos:

$$-EAk^2 e^{ikx} e^{i\omega t} + \rho A \omega^2 e^{ikx} e^{i\omega t} = 0 \quad t \in (0, \infty). \quad (6.1)$$

Siendo las funciones exponenciales no nulas, la ecuación anterior es satisfecha si y solamente si se cumple la siguiente relación:

$$Ek^2 = \rho \omega^2. \quad (6.2)$$

Note que si el *número de onda* κ y la *frecuencia angular* ω satisfacen la ecuación anterior, entonces los valores opuestos también la satisfacen, por lo que, dada la naturaleza lineal de la ecuación diferencial, una solución más general es dada por la siguiente expresión:

$$u(t) = C_1 e^{ikx} e^{i\omega t} + C_2 e^{-ikx} e^{i\omega t} + C_3 e^{ikx} e^{-i\omega t} + C_4 e^{-ikx} e^{-i\omega t}, \quad (6.3)$$

donde C_1 , C_2 , C_3 y C_4 son constantes que podrán ser buscadas de forma tal que la solución satisfaga además otras condiciones del problema. Por ejemplo, el ejercicio siguiente considera las condiciones de contorno:

Ejercicio 6.3 Considere la barra definida en el intervalo $I = (0, \ell)$. Muestre que en ese caso la solución del tipo (6.3) que satisface las condiciones de contorno es dada por la siguiente expresión:

$$u(t) = C_1 \sin(\kappa x) e^{i\omega t} + C_2 \sin(\kappa x) e^{-i\omega t} \quad \text{con } \kappa = \frac{(2n+1)\pi}{2\ell}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (6.4)$$

La solución del ejercicio anterior es de hecho la solución del problema de elasticidad si las condiciones iniciales son dadas por funciones compatibles con la misma. Si las condiciones iniciales son dadas por funciones diferentes, entonces un procedimiento que exprese las funciones de las condiciones iniciales como series de funciones sinusoidales deberá ser utilizado.

Como conclusión podemos afirmar que existen infinitas soluciones posibles para la ecuación del movimiento. Si la vibración no es dada por una combinación de movimientos de diferentes frecuencias, entonces el aspecto espacial de la solución es proporcional a la función $\sin(\kappa x)$, que llamaremos *modo de vibración*, donde el número de onda κ puede adoptar un número infinito de valores discretos diferentes. Por su parte, existe también un número infinito de valores discretos para las posibles *frecuencias naturales* ω , estando cada una de ellas asociada a un cierto modo de vibración de acuerdo con la ecuación (6.2).

6.2.3. Formulación variacional en desplazamientos

Para obtener la formulación variacional del problema podemos nuevamente apelar a la “fuerza” $b^* = b - \rho A \partial_{tt}^2 u$. Con eso nos queda un problema análogo al de equilibrio, y por lo tanto las mismas manipulaciones matemáticas introducidas en el Capítulo 3 nos conducen a una versión del teorema del trabajo virtual que se expresa como sigue para cualquier desplazamiento virtual:

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{N} \bar{\varepsilon} dx = \int_{x_i}^{x_f} b^* \bar{u} dx + F \bar{u}(x_f). \quad (6.5)$$

Sustituyendo b^* y reordenando los términos, tenemos:

$$\int_{x_i}^{x_f} \rho A \partial_{tt}^2 u \bar{u} dx + \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{N} \bar{\varepsilon} dx = \int_{x_i}^{x_f} b \bar{u} dx + F \bar{u}(x_f). \quad (6.6)$$

Note que en esta ecuación el desplazamiento virtual \bar{u} es una función arbitraria del conjunto de desplazamientos virtuales $\bar{\mathcal{U}}$ de deformación $\bar{\varepsilon} = \partial_x \bar{u}$, que a diferencia de u no depende del tiempo. Dicho de otro modo, en un instante de tiempo dado consideramos una función \bar{u} para expresar el balance de cantidad de movimiento lineal en la forma de la ecuación (6.6).

Para obtener una formulación en desplazamientos debemos sustituir \mathcal{N} utilizando la relación desplazamiento-deformación y la ecuación constitutiva. Para el problema de la Figura 3.2 se definen los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{u : \bar{I} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : u(x_i, t) = \hat{u}(t) \text{ para } t \in [0, \infty)\}, \\ \bar{\mathcal{U}} &= \{\bar{u} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : \bar{u}(x_i) = 0\}. \end{aligned}$$

La formulación variacional en desplazamientos del problema de elasticidad lineal consiste en hallar el desplazamiento $u \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$\begin{cases} \int_{x_i}^{x_f} \rho A \partial_{tt}^2 u \bar{u} dx + \int_I EA \partial_x u \partial_x \bar{u} dx = \int_I b \bar{u} dx + F \bar{u}(x_f) & \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}, \forall t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \hat{u}_0(x) \text{ y } \partial_t u(x, 0) = \hat{v}_0(x) & \text{para } x \in I. \end{cases}$$

Note que en la definición de la formulación variacional hemos considerado las condiciones iniciales en su versión clásica. Muchos autores consideran una versión integral aproximada de las mismas, vea por ejemplo el libro de Hughes [7]. La versión aproximada puede ser necesaria como veremos a continuación. Sobre las condiciones de admisibilidad de los conjuntos \mathcal{U} y $\bar{\mathcal{U}}$ valen los mismos comentarios realizados en el Capítulo 3. Por otra parte, el planteo del problema se simplifica considerablemente introduciendo el siguiente funcional:

$$m(v, \bar{u}) = \int_I \rho A v \bar{u} dx.$$

Con estas notación adicional, la solución de la formulación variacional del problema de elasticidad lineal es el desplazamiento $u \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$\begin{cases} m(\partial_{tt}^2 u, \bar{u}) + a(u, \bar{u}) = \ell(\bar{u}) & \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}, \forall t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \hat{u}_0(x) \text{ y } \partial_t u(x, 0) = \hat{v}_0(x) & \text{para } x \in I. \end{cases} \quad (6.7)$$

Ejercicio 6.4 Demuestre que el funcional m es bilineal, es decir:

$$\begin{aligned} m(u, \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2) &= \alpha_1 m(u, \bar{u}_1) + \alpha_2 m(u, \bar{u}_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ m(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \bar{u}) &= \alpha_1 m(u_1, \bar{u}) + \alpha_2 m(u_2, \bar{u}) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

es simétrico:

$$m(u, \bar{u}) = m(\bar{u}, u),$$

y es definido positivo en $\bar{\mathcal{U}}$ (para esto asuma que ρ y A son dadas por funciones continuas y positivas en \bar{I} , y que las funciones de $\bar{\mathcal{U}}$ son continuas):

$$\begin{aligned} m(\bar{u}, \bar{u}) &\geq 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}, \\ m(\bar{u}, \bar{u}) &> 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}, \text{ con } \bar{u} \neq 0. \end{aligned}$$

Siguiendo la idea del método de Rayleigh-Ritz, supongamos que conocemos una función u_0 en el conjunto solución \mathcal{U} (no confundirla con la condición inicial \hat{u}_0), y las funciones $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ en el conjunto de los desplazamientos virtuales $\bar{\mathcal{U}}$. Entonces, podemos definir los conjuntos $\mathcal{U}' \subset \mathcal{U}$ y $\bar{\mathcal{U}}' \subset \bar{\mathcal{U}}$ en la forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= \{u_0 + \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 + \dots + \alpha_n \bar{u}_n : \alpha_1, \dots, \alpha_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}\}, \\ \bar{\mathcal{U}}' &= \{\beta_1 \bar{u}_1 + \beta_2 \bar{u}_2 + \dots + \beta_n \bar{u}_n : \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

La diferencia fundamental con el caso de equilibrio estático es que ahora los coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son funciones del tiempo. La aproximación numérica de la solución es entonces el desplazamiento $u \in \mathcal{U}'$ que satisface la ecuación (6.7) pero considerando solamente los desplazamientos virtuales pertenecientes a $\bar{\mathcal{U}}'$, es decir:

$$\begin{cases} m(\partial_t^2 u, \bar{u}) + a(u, \bar{u}) = \ell(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}', \forall t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) = \hat{u}_0(x) \text{ y } \partial_t u(x, 0) = \hat{v}_0(x) \text{ para } x \in I. \end{cases} \quad (6.8)$$

Por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned} m\left(\partial_t^2 u_0 + \sum_{j=1}^n \partial_t^2 \alpha_j \bar{u}_j, \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{u}_i\right) + a\left(u_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j \bar{u}_j, \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{u}_i\right) \\ = \ell\left(\sum_{i=1}^n \beta_i \bar{u}_i\right) \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in (0, \infty), \end{aligned}$$

que puede reescribirse como:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_i \partial_t^2 \alpha_j m(\bar{u}_j, \bar{u}_i) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_j a(\bar{u}_j, \bar{u}_i) \\ = \sum_{i=1}^n \beta_i \ell(\bar{u}_i) - \sum_{i=1}^n \beta_i m(\partial_t^2 u_0, \bar{u}_i) - \sum_{i=1}^n \beta_i a(u_0, \bar{u}_i) \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Por lo tanto, llamando \mathbf{M} a la matriz de componentes $M_{ij} = m(\bar{u}_j, \bar{u}_i)$, llamando \mathbf{K} a la matriz de componentes $K_{ij} = a(\bar{u}_j, \bar{u}_i)$, \mathbf{F} al vector de componentes $F_i = \ell(\bar{u}_i) - m(\partial_{tt}^2 u_0, \bar{u}_i) - a(u_0, \bar{u}_i)$ y $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\beta}$ a los vectores de parámetros, podemos expresar esta última ecuación en la forma:

$$\boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{M} \partial_{tt}^2 \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}^\top \mathbf{F} \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in (0, \infty), \quad (6.9)$$

y entonces debe cumplirse:

$$\mathbf{M} \partial_{tt}^2 \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{F}. \quad (6.10)$$

Note que la ecuación (6.10) es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para la cual necesitamos condiciones iniciales. La dificultad que se nos presenta es que las condiciones iniciales clásicas podrían no ser satisfechas exactamente en el caso general. Sin embargo, supongamos que las condiciones iniciales satisfacen las expresiones siguientes (o las expresiones siguientes constituyen una buena aproximación de las verdaderas condiciones iniciales):

$$\begin{aligned} \hat{u}_0(x) &= u_0(x, 0) + \hat{\alpha}_1 \bar{u}_1(x) + \hat{\alpha}_2 \bar{u}_2(x) + \dots + \hat{\alpha}_n \bar{u}_n(x), \\ \hat{v}_0(x) &= \partial_t u_0(x, 0) + \hat{\beta}_1 \bar{u}_1(x) + \hat{\beta}_2 \bar{u}_2(x) + \dots + \hat{\beta}_n \bar{u}_n(x), \end{aligned}$$

entonces las condiciones iniciales que necesitamos son dadas simplemente por:

$$\boldsymbol{\alpha}(0) = \hat{\boldsymbol{\alpha}}, \quad \partial_t \boldsymbol{\alpha}(0) = \hat{\boldsymbol{\beta}}. \quad (6.11)$$

Veremos en la sección siguiente que las condiciones iniciales no suelen ser una dificultad cuando se emplea el método de elementos finitos, puesto que las mismas pueden imponerse nodo a nodo de una manera natural.

Ejercicio 6.5 Verifique que son adecuadas las condiciones iniciales (6.11).

Ejercicio 6.6 Muestre que la matriz \mathbf{M} es simétrica y definida positiva.

6.3. Elementos finitos: método de semidiscretización

El método de semidiscretización consiste en discretizar el dominio espacial, mientras que dejamos el tiempo continuo. En el método de elementos finitos dividimos la barra en $n - 1$ elementos, y la representación de elementos finitos de la aproximación de la solución es:

$$u(x, t) = \hat{N}_1(x)U_1(t) + \hat{N}_2(x)U_2(t) + \dots + \hat{N}_n(x)U_n(t),$$

donde las funciones $\hat{N}_1, \dots, \hat{N}_n$ son las mismas funciones de interpolación utilizadas en el caso del equilibrio estático considerado en el Capítulo 3. Los valores nodales del desplazamiento dependen del tiempo, y son los responsables de la variación en

el tiempo de la aproximación de elementos finitos. Dicho de otro modo, para cada tiempo la aproximación polinomial por partes del método de elementos finitos será diferente por causa de la variación temporal de los valores nodales.

Note que deberá cumplirse $U_1(t) = \hat{u}(t)$ en todo tiempo para satisfacer la condición de contorno en el extremo x_i de la barra. Al igual que en el caso estático, dejaremos de lado por el momento esta condición de contorno y procederemos como si conociéramos la reacción R del apoyo del extremo izquierdo de la barra correspondiente a la solución del problema. Si definimos la matriz

$$\hat{\mathbf{N}} = (\hat{N}_1 \quad \hat{N}_2 \quad \dots \quad \hat{N}_n),$$

tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}' &= \{\hat{\mathbf{N}}\mathbf{U} : \mathbf{U} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n\}, \\ \bar{\mathcal{U}}' &= \{\hat{\mathbf{N}}\bar{\mathbf{U}} : \bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Además, definiendo

$$\hat{\mathbf{B}} = (\partial_x \hat{N}_1 \quad \partial_x \hat{N}_2 \quad \dots \quad \partial_x \hat{N}_n),$$

tenemos $\partial_x u = \hat{\mathbf{B}}\mathbf{U}$ y $\partial_x \bar{u} = \hat{\mathbf{B}}\bar{\mathbf{U}}$, con lo que podemos plantear:

$$\begin{aligned} \int_I \rho A \partial_t^2 u \bar{u} \, dx + \int_I EA \partial_x u \partial_x \bar{u} \, dx \\ = \int_I b \bar{u} \, dx + R \bar{u}(x_i) + F \bar{u}(x_f) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}', \forall t \in (0, \infty), \end{aligned}$$

que podemos escribirlo en la forma:

$$\begin{aligned} \int_I \bar{\mathbf{U}}^\top \hat{\mathbf{N}}^\top \rho A \hat{\mathbf{N}} \partial_t^2 \mathbf{U} \, dx + \int_I \bar{\mathbf{U}}^\top \hat{\mathbf{B}}^\top EA \hat{\mathbf{B}} \mathbf{U} \, dx \\ = \int_I \bar{\mathbf{U}}^\top \hat{\mathbf{N}}^\top b \, dx + R \bar{U}_1 + F \bar{U}_n \quad \forall \bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in (0, \infty), \end{aligned}$$

o también:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{U}}^\top \left(\int_I \hat{\mathbf{N}}^\top \rho A \hat{\mathbf{N}} \, dx \right) \partial_t^2 \mathbf{U} + \bar{\mathbf{U}}^\top \left(\int_I \hat{\mathbf{B}}^\top EA \hat{\mathbf{B}} \, dx \right) \mathbf{U} \\ = \bar{\mathbf{U}}^\top \left(\int_I \hat{\mathbf{N}}^\top b \, dx \right) + \bar{\mathbf{U}}^\top (R \mathbf{e}_1 + F \mathbf{e}_n) \quad \forall \bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^n, \forall t \in (0, \infty), \end{aligned}$$

donde $\mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^n$ es un vector cuya primer componente es uno y las demás cero, mientras que $\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ tiene todas las componentes nulas excepto la última que vale uno. Como la ecuación anterior es válida para todo $\bar{\mathbf{U}} \in \mathbb{R}^n$, deberá cumplirse:

$$\int_I \hat{\mathbf{N}}^\top \rho A \hat{\mathbf{N}} \, dx \partial_t^2 \mathbf{U} + \int_I \hat{\mathbf{B}}^\top EA \hat{\mathbf{B}} \, dx \mathbf{U} = \int_I \hat{\mathbf{N}}^\top b \, dx + R \mathbf{e}_1 + F \mathbf{e}_n \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Por lo tanto, llamando:

$$\hat{\mathbf{M}} = \int_I \hat{\mathbf{N}}^\top \rho A \hat{\mathbf{N}} dx, \quad \hat{\mathbf{K}} = \int_I \hat{\mathbf{B}}^\top E A \hat{\mathbf{B}} dx, \quad \hat{\mathbf{F}} = \int_I \hat{\mathbf{N}}^\top b dx,$$

tenemos:

$$\hat{\mathbf{M}} \partial_t^2 \mathbf{U} + \hat{\mathbf{K}} \mathbf{U} = \hat{\mathbf{F}} + R \mathbf{e}_1 + F \mathbf{e}_n \quad \forall t \in (0, \infty).$$

En particular, para la discretización de tres elementos mostrada en la Figura 5.1 obtenemos:

$$\begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t^2 U_1 \\ \partial_t^2 U_2 \\ \partial_t^2 U_3 \\ \partial_t^2 U_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Al igual que en el caso del equilibrio estático, este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias no lo podemos resolver porque desconocemos la función R de la reacción del apoyo. El procedimiento que emplearemos para determinar la solución consiste en utilizar primero la condición de contorno $U_1 = \hat{u}$ para reducir el sistema quedándonos con las líneas 2 a 4 del sistema anterior. La primera línea puede ser utilizada luego para obtener la reacción R . Por lo tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales que debemos resolver es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t^2 U_2 \\ \partial_t^2 U_3 \\ \partial_t^2 U_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ F \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_{21} \partial_t^2 \hat{u} \\ M_{31} \partial_t^2 \hat{u} \\ M_{41} \partial_t^2 \hat{u} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} K_{21} \hat{u} \\ K_{31} \hat{u} \\ K_{41} \hat{u} \end{pmatrix} \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Note que en sistema lineal de la ecuación anterior podemos identificar las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} , el vector $\boldsymbol{\alpha}$ y el vector \mathbf{F} de la ecuación (6.10). La matriz \mathbf{M} es llamada *matriz de masa de la estructura*, mientras que \mathbf{K} , \mathbf{U} y \mathbf{F} conservan los nombres vistos en el caso de equilibrio estático.

Las condiciones iniciales para la ecuación diferencial anterior se encuentran fácilmente aproximando las funciones \hat{u}_0 y \hat{v}_0 por funciones en el espacio de los elementos finitos. Si $\hat{\mathbf{U}}_0 = (\hat{U}_2, \hat{U}_3, \hat{U}_4)^\top$ y $\hat{\mathbf{V}}_0 = (\hat{V}_2, \hat{V}_3, \hat{V}_4)^\top$ son sus valores nodales, entonces las condiciones iniciales para el vector $\mathbf{U} = (U_2, U_3, U_4)^\top$ son:

$$\mathbf{U}(0) = \hat{\mathbf{U}}_0, \quad \partial_t \mathbf{U}(0) = \hat{\mathbf{V}}_0.$$

6.3.1. Ecuación del elemento finito

El montaje de las matrices del sistema de ecuaciones diferenciales del problema es realizado en la misma forma que en el caso de equilibrio estático. Para eso consideramos la ecuación del elemento finito.

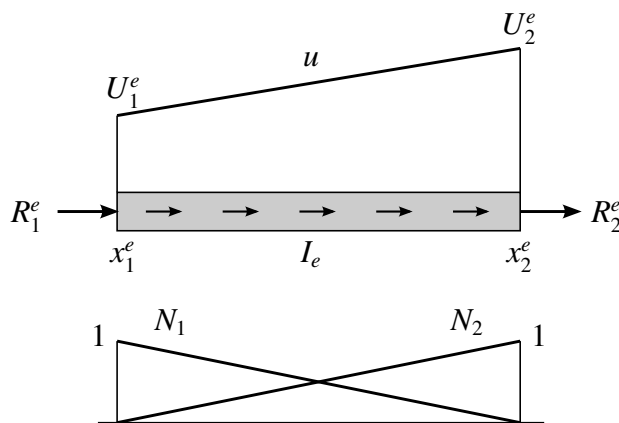


Figura 6.2: Elemento lineal.

Para ilustrar el procedimiento consideraremos nuevamente el elemento lineal de la Figura 6.2. Para obtener la ecuación del elemento supondremos conocidas las fuerzas R_1^e y R_2^e existentes en el extremo izquierdo x_1^e y en el extremo derecho x_2^e del elemento. La ecuación del elemento es:

$$\begin{aligned} \int_{I_e} \rho A \partial_{tt}^2 u \bar{u} \, dx + \int_{I_e} EA \partial_x u \partial_x \bar{u} \, dx \\ = \int_{I_e} b \bar{u} \, dx + R_1^e \bar{u}(x_1^e) + R_2^e \bar{u}(x_2^e) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}_e, \forall t \in (0, \infty), \end{aligned}$$

donde $\bar{\mathcal{U}}_e$ es definido en la misma forma que en el caso de equilibrio estático. Si consideramos las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= (N_1 \quad N_2), & \mathbf{U}^e &= (U_1^e \quad U_2^e)^\top, \\ \mathbf{B} &= (\partial_x N_1 \quad \partial_x N_2), & \bar{\mathbf{U}}^e &= (\bar{U}_1^e \quad \bar{U}_2^e)^\top, \end{aligned}$$

entonces tenemos:

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{N} \mathbf{U}^e, & \partial_x u &= \mathbf{B} \mathbf{U}^e, \\ \bar{u} &= \mathbf{N} \bar{\mathbf{U}}^e, & \partial_x \bar{u} &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}}^e. \end{aligned}$$

Con estas notaciones, la ecuación anterior se escribe como:

$$\begin{aligned} \int_{I_e} (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \mathbf{N}^\top \rho A \mathbf{N} \partial_{tt}^2 \mathbf{U}^e \, dx + \int_{I_e} (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \mathbf{B}^\top E A \mathbf{B} \mathbf{U}^e \, dx \\ = \int_{I_e} (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \mathbf{N}^\top b \, dx + (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \begin{pmatrix} R_1^e \\ R_2^e \end{pmatrix} \quad \forall \bar{\mathbf{U}}^e \in \mathbb{R}^2, \forall t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Nuevamente, simplificando $\bar{\mathbf{U}}^e$ y definiendo:

$$\mathbf{M}^e = \int_{I_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{B} \, dx, \quad \mathbf{K}^e = \int_{I_e} \mathbf{B}^\top \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{B} \, dx, \quad \mathbf{F}^e = \int_{I_e} \mathbf{N}^\top b \, dx, \quad \mathbf{R}^e = \begin{pmatrix} R_1^e \\ R_2^e \end{pmatrix},$$

tenemos la ecuación del elemento finito:

$$\mathbf{M}^e \partial_{tt}^2 \mathbf{U}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e \quad \forall t \in (0, \infty),$$

donde \mathbf{M}^e es llamada *matriz de masa del elemento*.

A partir de las ecuaciones de los elementos, el proceso de montaje de la ecuación global es similar al caso del equilibrio estático. En particular, la matriz de masa \mathbf{M} es ensamblada a partir de las matrices \mathbf{M}^e de los elementos siguiendo el mismo procedimiento por el que se ensambla la matriz de rigidez \mathbf{K} a partir de las matrices \mathbf{K}^e de los elementos.

6.3.2. Modos y frecuencias naturales de la ecuación semidiscreta

Los modos y frecuencias naturales están relacionados a las soluciones de la ecuación diferencial en el caso en que las fuerzas externas y los desplazamientos impuestos son nulos. En este caso, la ecuación diferencial es la siguiente:

$$\mathbf{M} \partial_{tt}^2 \mathbf{U} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Si buscamos \mathbf{U} como una solución armónica en el tiempo y con frecuencia ω , entonces $\mathbf{U} = \hat{\mathbf{U}} e^{i\omega t}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}.$$

Si llamamos $\lambda = \omega^2$ obtenemos la siguiente ecuación:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{0}.$$

La ecuación anterior es una versión generalizada del problema de valores-vec-tores propios, en donde la matriz de masa \mathbf{M} está en lugar de la matriz identidad en el problema habitual. Siendo las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} simétricas y definidas positivas de tamaño n , no es difícil demostrar, usando el teorema espectral, que pueden encontrarse n pares de soluciones $(\lambda_k, \hat{\mathbf{U}}_k)$ diferentes con las siguientes propiedades: los valores λ_k son todos reales positivos, y los vectores propios, también llamados *modos de vibración* diagonalizan simultáneamente las matrices \mathbf{M} y \mathbf{K} . A las raíces cuadradas positivas de los valores λ_k les llamaremos *frecuencias naturales* del problema.

Ejercicio 6.7 Utilice que \mathbf{M} es definida positiva para mostrar que existe una única matriz simétrica y definida positiva $\mathbf{M}^{1/2}$ tal que $\mathbf{M}^{1/2} \mathbf{M}^{1/2} = \mathbf{M}$. Sea $\mathbf{M}^{-1/2}$ la matriz inversa de $\mathbf{M}^{1/2}$. Utilice el cambio de variable $\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{V}$ para obtener el problema de valores propios habitual $(\mathbf{M}^{-1/2} \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1/2} - \omega^2 \mathbf{I}) \hat{\mathbf{V}} = \mathbf{0}$. Utilice el teorema espectral para demostrar las propiedades mencionadas sobre las fre-

cuencias naturales y los modos de vibración.

Ejercicio 6.8 Considere una barra de un cierto largo dado y propiedades ρ , E y A constantes. Utilice una discretización de diferente número de elementos para obtener diferentes aproximaciones de las frecuencias naturales del problema continuo. Compare las soluciones obtenidas con las soluciones exactas dadas en la Sección 6.2.2.

6.3.3. Solución del problema dinámico por el método de Newmark

Veamos en esta sección cómo resolver la ecuación diferencial del problema obtenida aplicando el método de elementos finitos y la semidiscretización. El problema que tenemos es hallar $\mathbf{U} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ solución del sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\partial_{tt}^2\mathbf{U} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} & \forall t \in (0, \infty), \\ \mathbf{U}(0) = \hat{\mathbf{U}}_0 \text{ y } \partial_t\mathbf{U}(0) = \hat{\mathbf{V}}_0. \end{cases}$$

El sistema anterior es un caso particular del sistema más general siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\partial_{tt}^2\mathbf{U} + \mathbf{C}\partial_t\mathbf{U} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} & \forall t \in (0, \infty), \\ \mathbf{U}(0) = \hat{\mathbf{U}}_0 \text{ y } \partial_t\mathbf{U}(0) = \hat{\mathbf{V}}_0, \end{cases}$$

donde la matriz \mathbf{C} es simétrica y positiva semidefinida (incluso podría ser nula). Este sistema es el que aparece cuando al moverse la barra ocurre algún tipo de amortiguamiento viscoso que se opone al movimiento.

El método de Newmark es uno de los más populares para resolver este problema. Supongamos que dividimos el tiempo en intervalos de tamaño Δt . Sean entonces las siguientes notaciones: $t_n = n\Delta t$, $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}(t_n)$, $\mathbf{V}_n = \partial_t\mathbf{U}(t_n)$, $\mathbf{A}_n = \partial_{tt}^2\mathbf{U}(t_n)$. La aproximación obtenida por el método de Newmark para \mathbf{U}_n , \mathbf{V}_n y \mathbf{A}_n se basa en utilizar iterativamente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{A}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{V}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}, \\ \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t\mathbf{V}_n + \frac{1}{2}\Delta t^2[(1 - 2\beta)\mathbf{A}_n + 2\beta\mathbf{A}_{n+1}], \\ \mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + \Delta t[(1 - \gamma)\mathbf{A}_n + \gamma\mathbf{A}_{n+1}]. \end{cases} \quad (6.12)$$

Note que la primera ecuación es exactamente la ecuación diferencial del problema en el tiempo t_n , mientras que las siguientes son fórmulas de diferencias finitas. Los parámetros β y γ son importantes pues determinan la precisión y estabilidad del método de integración. Algunos métodos conocidos que contempla el método general son dados en el Cuadro 6.1.

La idea del método iterativo de Newmark es primero hallar \mathbf{A}_0 resolviendo la ecuación $\mathbf{M}\mathbf{A}_0 = \mathbf{F}_0 - \mathbf{K}\mathbf{U}_0 - \mathbf{C}\mathbf{V}_0$, lo cual implica resolver un sistema lineal con la matriz \mathbf{M} . Con eso y utilizando las condiciones iniciales tenemos la terna inicial $(\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0, \mathbf{A}_0)$. La iteración del método consiste utilizar el sistema (6.12) para obtener la terna correspondiente al tiempo t_{n+1} , es decir $(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1})$, teniendo como datos todas las matrices y la terna en el tiempo t_n , es decir $(\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n, \mathbf{A}_n)$.

Cuadro 6.1: Algunos métodos de la familia.

β	γ	Método
0	1/2	Diferencia central
1/12	1/2	Fox-Goodwin
1/6	1/2	Aceleración lineal
1/4	1/2	Aceleración media

Evidentemente, considerar (6.12) como un sistema lineal de tamaño $3n \times 3n$ no es eficiente. Existen varias formas de reordenar mejor las cuentas. Una de esas formas consiste en primero obtener los llamados *predictores*:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}_{n+1} &= \mathbf{U}_n + \Delta t \mathbf{V}_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1 - 2\beta) \mathbf{A}_n, \\ \tilde{\mathbf{V}}_{n+1} &= \mathbf{V}_n + \Delta t (1 - \gamma) \mathbf{A}_n.\end{aligned}$$

Luego se resuelve el sistema lineal siguiente para hallar \mathbf{A}_{n+1} :

$$(\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K}) \mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{K} \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} - \mathbf{C} \tilde{\mathbf{V}}_{n+1}. \quad (6.13)$$

Finalmente hallamos \mathbf{U}_{n+1} y \mathbf{V}_{n+1} utilizando las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \mathbf{A}_{n+1}, \\ \mathbf{V}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{V}}_{n+1} + \gamma \Delta t \mathbf{A}_{n+1}.\end{aligned}$$

La decisión sobre qué valores γ y β utilizar es realmente difícil. La estabilidad incondicional del algoritmo se obtiene utilizando $2\beta \geq \gamma \geq 1/2$. En teoría el valor $\gamma = 1/2$ proporciona la mayor precisión en la solución de la ecuación diferencial, pero como la misma no representa exactamente el comportamiento del problema continuo, es habitual utilizar $\gamma > 1/2$ para introducir disipación en los modos de alta frecuencia, los cuales normalmente no son característicos del problema continuo sino que aparecen por el procedimiento de discretización [7]. Si no fuera necesario introducir disipación en los modos de alta frecuencia, entonces valores razonables a considerar serían $\gamma = 1/2$ y $\beta = 1/4$.

Ejercicio 6.9 Interpretar las fórmulas de diferencias finitas en (6.12) como expresiones aproximadas de expansiones truncadas de Taylor con la fórmula de Lagrange para el resto.

Capítulo 7

Viga de Euler-Bernoulli

En este capítulo es dedicado a introducir el problema de la viga de Euler-Bernoulli. Primero se describe la formulación clásica del problema y luego su formulación variacional. Se introduce también el método de elementos finitos para el problema. La característica particular del problema considerado es que para la aproximación de la solución se requieren funciones de interpolación que puedan representar funciones continuamente diferenciales en todo el dominio discretizado. Eso será logrado utilizando las funciones de forma cúbicas de Hermite.

7.1. Equilibrio

En esta sección consideraremos una viga, de secciones transversales con dimensiones mucho menores que la longitud de la misma, sometida a la acción de fuerzas y momentos externos dirigidos según muestra la Figura 7.1. Consideraremos que en el instante analizado la viga está en equilibrio y en reposo. Cada sección transversal de la viga puede ser identificada por el valor de una cierta coordenada x que crece a lo largo del eje de la misma y que adopta valores en el intervalo abierto $I = (x_i, x_f)$, como es mostrado en la figura.

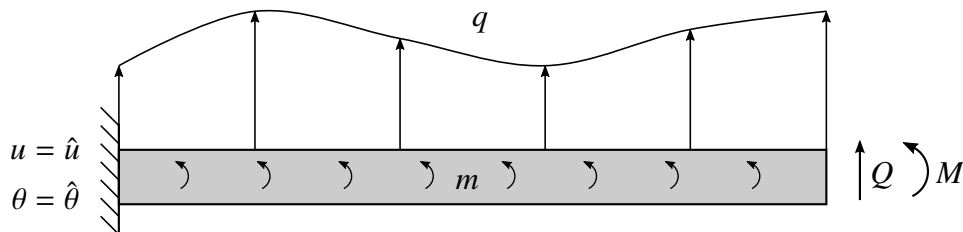


Figura 7.1: Viga de Euler-Bernoulli.

Las fuerzas de volumen que actúan sobre la viga son un momento distribuido de magnitud m y una fuerza vertical distribuida de magnitud q . En el extremo derecho de la barra tenemos las fuerzas de superficie, que son dadas por un momento M y una fuerza vertical Q .

En una parte cualquiera \mathcal{D} de la viga asumiremos que actúan también fuerzas internas que le realizan las otras partes de la viga. Admitiremos que esas fuerzas internas están dadas por el llamado *momento flector* \mathcal{M} , que asumiremos positivo si en el extremo derecho de la parte \mathcal{D} tiene sentido antihorario, y la llamada *fuerza cortante* \mathcal{Q} , que asumiremos positiva si en el extremo derecho de \mathcal{D} es dirigida hacia arriba. Así, en este caso tendremos dos ecuaciones de equilibrio para la parte \mathcal{D} , una ecuación de momentos y una de fuerzas. Si la parte \mathcal{D} está definida entre las coordenadas x_a y x_b , entonces la ecuación de equilibrio de fuerzas se expresa en la forma:

$$\mathcal{Q}(x_b) - \mathcal{Q}(x_a) + \int_{x_a}^{x_b} q(x) dx = 0.$$

La expresión anterior es válida para cualesquier valores de las variables x_a y x_b en I . Podemos entonces considerar x_a fijo y x_b variable. Si derivamos la expresión anterior con respecto a x_b obtenemos:

$$\partial_x \mathcal{Q}(x_b) + q(x_b) = 0.$$

En forma más general, podemos escribir:

$$\partial_x \mathcal{Q}(x) + q(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Esta expresión es conocida como *ecuación puntual de equilibrio de fuerzas*. La ecuación de momentos podemos tomarla por ejemplo respecto del origen del sistema de coordenadas. Procediendo de esa manera, tenemos:

$$\mathcal{M}(x_b) - \mathcal{M}(x_a) + \mathcal{Q}(x_b)x_b - \mathcal{Q}(x_a)x_a + \int_{x_a}^{x_b} m(x) dx + \int_{x_a}^{x_b} q(x)x dx = 0.$$

Derivando respecto de x_b , tenemos:

$$\partial_x \mathcal{M}(x_b) + \mathcal{Q}(x_b) + \partial_x \mathcal{Q}(x_b)x_b + m(x_b) + q(x_b)x_b = 0.$$

Si simplificamos la expresión anterior utilizando la ecuación puntual de equilibrio de fuerzas, obtenemos la *ecuación puntual de equilibrio de momentos*, la cual puede escribirse como:

$$\partial_x \mathcal{M}(x) + \mathcal{Q}(x) + m(x) = 0 \quad \forall x \in I.$$

Ejercicio 7.1 Demuestre que si las ecuaciones puntuales de equilibrio de fuerzas y momentos son satisfechas en toda sección $x \in I$, entonces cualquier parte \mathcal{D} de la barra estará en equilibrio.

7.2. Deformaciones

En la viga de Euler-Bernoulli asumiremos que las fuerzas actuantes producen la deformación ilustrada en la Figura 7.2. En este caso la sección transversal de la viga que en la configuración indeformada es dada por la coordenada x , en la configuración deformada sufre un desplazamiento vertical de magnitud u y un giro de ángulo θ que es tal que la sección transversal se mantiene perpendicular a la línea media deformada. Así, bajo la hipótesis de desplazamientos pequeños, aproximaremos θ por su tangente, lo cual proporciona:

$$\theta(x) = \partial_x u(x) \quad \forall x \in I.$$

Además de ese ángulo consideraremos la curvatura de la línea media deformada de la viga. Bajo la hipótesis de desplazamientos pequeños consideraremos que la misma se aproxima bien por la derivada segunda del desplazamiento vertical, lo cual también puede expresarse en la forma:

$$\kappa(x) = \partial_x \theta(x) \quad \forall x \in I.$$

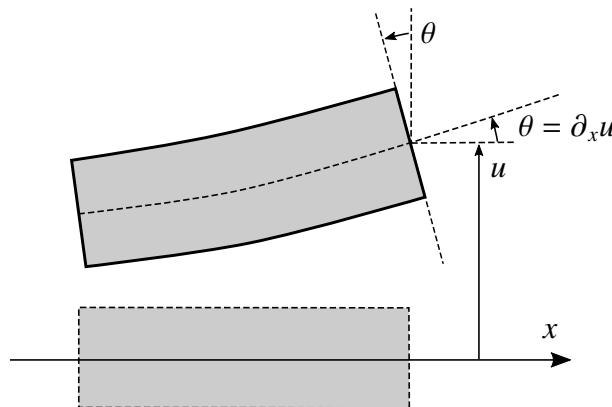


Figura 7.2: Porción deformada de la viga.

7.3. Ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva de la viga relaciona el momento flector \mathcal{M} con la curvatura κ . Tal relación es lineal si el material que conforma la barra es elástico lineal. La misma se expresa en la forma:

$$\mathcal{M}(x) = E(x)I_z(x)\kappa(x) \quad \forall x \in I, \quad (7.1)$$

donde E es el módulo de Young e I_z es un momento de área de segundo orden de la sección transversal respecto del baricentro de la misma, también llamado *momento de inercia*. Si bien la ecuación constitutiva expresada requiere una explicación más detallada, note que parece natural que el momento sea proporcional al módulo de Young, la curvatura, y una propiedad geométrica de la sección transversal.

7.4. Problema de la viga de Euler-Bernoulli

El *problema de la viga de Euler-Bernoulli* consiste en hallar la función desplazamiento u , el ángulo de giro θ , la curvatura κ , el momento flector \mathcal{M} y la fuerza cortante Q en cualquier sección de la viga compuesta por un material elástico lineal de módulo de Young E y con la propiedad geométrica I_z .

Para introducir los conceptos consideraremos que la sección transversal del extremo izquierdo de la viga está empotrada, y por lo tanto no puede desplazarse ni girar independientemente de la deformación causada por las fuerzas aplicadas, vea la Figura 7.1. En el extremo derecho de la barra supondremos que conocemos los valores del momento y de la fuerza vertical aplicados. En esta situación, la formulación clásica consiste en hallar las funciones

$$\begin{aligned} u &: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} && \text{con } u \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}), \text{ y } u \in C^4(I, \mathbb{R}), \\ \theta &: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} && \text{con } \theta \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}), \text{ y } \theta \in C^3(I, \mathbb{R}), \\ \kappa &: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} && \text{con } \kappa \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}), \text{ y } \kappa \in C^2(I, \mathbb{R}), \\ \mathcal{M} &: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} && \text{con } \mathcal{M} \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}), \text{ y } \mathcal{M} \in C^2(I, \mathbb{R}), \\ Q &: \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} && \text{con } Q \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R}), \text{ y } Q \in C^1(I, \mathbb{R}), \end{aligned}$$

que satisfagan las ecuaciones siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_x \mathcal{M} + Q + m = 0 & \text{en } I \text{ (ecuación de equilibrio de momentos),} \\ \partial_x Q + q = 0 & \text{en } I \text{ (ecuación de equilibrio de fuerzas),} \\ \theta = \partial_x u \text{ y } \kappa = \partial_x \theta & \text{en } I \text{ (relaciones cinemáticas),} \\ \mathcal{M} = EI_z \kappa & \text{en } I \text{ (ecuación constitutiva),} \\ u(x_i) = \hat{u} \text{ y } \theta(x_i) = \hat{\theta} & \text{(condiciones de contorno cinemáticas),} \\ \mathcal{M}(x_f) = M \text{ y } Q(x_f) = Q & \text{(condiciones de contorno mecánicas).} \end{array} \right.$$

En el problema de elasticidad lineal, el intervalo $I = (x_i, x_f)$ es considerado conocido, al igual que las propiedades $E, I_z \in C^2(\bar{I}, \mathbb{R})$, que no necesariamente consideraremos constantes, el momento $m \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R})$, la fuerza $q \in C^0(\bar{I}, \mathbb{R})$, y los valores $\hat{u}, \hat{\theta}, M$ y Q de las condiciones de contorno. Note que las condiciones de contorno indicadas son válidas para el problema de la Figura 7.1, y deben ser modificadas si se tienen otras configuraciones de apoyos.

Ejercicio 7.2 Pruebe que el problema de la viga de Euler-Bernoulli es lineal, es decir, considerando la misma viga definida en el intervalo I de propiedades E e I_z , si tenemos un problema a) con solución $(u^a, \theta^a, \kappa^a, \mathcal{M}^a, Q^a)$ para los datos $(m^a, q^a, \hat{u}^a, \hat{\theta}^a, M^a, Q^a)$ y otro problema b) de solución $(u^b, \theta^b, \kappa^b, \mathcal{M}^b, Q^b)$ para los datos $(m^b, q^b, \hat{u}^b, \hat{\theta}^b, M^b, Q^b)$, entonces cualquier combinación lineal de las soluciones es solución para el problema dado por la misma combinación lineal de los datos.

7.4.1. Teorema del trabajo virtual

El teorema del trabajo virtual válido para el problema de la viga de Euler-Bernoulli es el siguiente:

Teorema 7.3 (Teorema del trabajo virtual) Considere el problema de la viga de Euler-Bernoulli de la Figura 7.1. Sean \mathcal{M} y \mathcal{Q} las fuerzas internas en equilibrio con las fuerzas externas m , q , M y Q , y sea \bar{u} un desplazamiento nulo en el apoyo de giro $\bar{\theta}$ también nulo en el apoyo, y de curvatura $\bar{\kappa}$:

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{M} + \mathcal{Q} + m &= 0 \text{ en } I, & \bar{\kappa} &= \partial_x \bar{\theta} \text{ en } I, \\ \partial_x \mathcal{Q} + q &= 0 \text{ en } I, & \bar{\theta} &= \partial_x \bar{u} \text{ en } I, \\ \mathcal{M}(x_f) &= M, & \bar{\theta}(x_i) &= 0. \\ \mathcal{Q}(x_f) &= Q, & \bar{u}(x_i) &= 0. \end{aligned}$$

Entonces se cumple:

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{M} \bar{\kappa} \, dx = \int_{x_i}^{x_f} m \bar{\theta} \, dx + \int_{x_i}^{x_f} q \bar{u} \, dx + M \bar{\theta}(x_f) + Q \bar{u}(x_f). \quad (7.2)$$

Demostración. Considerando la relación cinemática entre $\bar{\theta}$ y $\bar{\kappa}$ e integrando por partes obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{M} \bar{\kappa} \, dx = \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{M} \partial_x \bar{\theta} \, dx = (\mathcal{M} \bar{\theta}) \Big|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \partial_x \mathcal{M} \bar{\theta} \, dx.$$

Si en la expresión anterior sustituimos $\partial_x \mathcal{M}$ por $-(\mathcal{Q} + m)$, $\bar{\theta}(x_i)$ por 0 y $\mathcal{M}(x_f)$ por M , obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{M} \bar{\kappa} \, dx = M(x_f) \bar{\theta}(x_f) + \int_{x_i}^{x_f} m \bar{\theta} \, dx + \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{Q} \bar{\theta} \, dx.$$

Si en la última integral sustituimos $\bar{\theta}$ por $\partial_x \bar{u}$ y la integramos por partes, obtenemos:

$$\int_{x_i}^{x_f} \mathcal{M} \bar{\kappa} \, dx = M(x_f) \bar{\theta}(x_f) + \int_{x_i}^{x_f} m \bar{\theta} \, dx + (\mathcal{Q} \bar{u}) \Big|_{x_i}^{x_f} - \int_{x_i}^{x_f} \partial_x \mathcal{Q} \bar{u} \, dx.$$

La tesis (7.2) del teorema resulta de sustituir en la expresión anterior $\partial_x \mathcal{Q}$ por $-q$, $\bar{u}(x_i)$ por 0, y $\mathcal{Q}(x_f)$ por Q . \square

7.4.2. Formulación variacional en desplazamientos

formulación variacional en desplazamientos del problema de la viga de Euler-Bernoulli se obtiene considerando el teorema del trabajo virtual en lugar en lugar de las expresiones mecánicas de equilibrio de fuerzas. Consideraremos aquí la formulación en desplazamientos, es decir, eliminaremos las incógnitas κ , θ , \mathcal{M} y \mathcal{Q} utilizando las relaciones cinemáticas y la ecuación constitutiva. Para el problema de la Figura 7.1 se definen los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{u : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : u(x_i) = \hat{u} \text{ y } \partial_x u(x_i) = \hat{\theta}\}, \\ \bar{\mathcal{U}} &= \{\bar{u} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : \bar{u}(x_i) = 0 \text{ y } \partial_x \bar{u}(x_i) = 0\}. \end{aligned}$$

La formulación variacional en desplazamientos del problema de la viga de Euler-Bernoulli consiste en hallar el desplazamiento $u \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$\int_{x_i}^{x_f} EI_z \partial_{xx}^2 u \partial_{xx}^2 \bar{u} \, dx = \int_{x_i}^{x_f} m \partial_x \bar{u} \, dx + \int_{x_i}^{x_f} q \bar{u} \, dx + M \partial_x \bar{u}(x_f) + Q \bar{u}(x_f) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

La condición de admisibilidad requerida en la definición del conjunto solución \mathcal{U} y el conjunto de los desplazamientos virtuales $\bar{\mathcal{U}}$ es escogida de forma tal que las integrales de la ecuación anterior tengan sentido y además se cumpla la existencia y unicidad de la solución de la formulación variacional. Note que las operaciones involucradas son diferentes que en el caso de la elasticidad lineal, porque en este caso aparecen derivadas segundas de la función incógnita u y del desplazamiento virtual \bar{u} . Si bien la definición precisa es más general, por el momento consideraremos como admisibles a funciones u y \bar{u} continuamente diferenciables en \bar{I} , es decir $u, \bar{u} \in C^1(\bar{I}, \mathbb{R})$, tales que sus derivadas segundas sean continuas por partes en I , es decir, podemos dividir I en un conjunto finito de intervalos dentro de los cuales las derivadas $\partial_{xx}^2 u$ y $\partial_{xx}^2 \bar{u}$ sean continuas.

Note que las condiciones de contorno cinemáticas $u(x_i) = \hat{u}$ y $\partial_x u(x_i) = \hat{\theta}$ son exigidas explícitamente al requerir que la solución u esté en el conjunto \mathcal{U} . Por esta razón, estas condiciones de contorno serán las condiciones de contorno esenciales de la formulación variacional. Por el contrario, las condiciones de contorno mecánicas $\mathcal{M}(x_f) = M$ y $\mathcal{Q}(x_f) = Q$ de la formulación clásica quedan excluidas de la formulación, puesto que son reemplazadas por la tesis del teorema del trabajo virtual junto con las ecuaciones puntuales de equilibrio. Estas serán entonces las condiciones de contorno naturales de la formulación variacional.

Por otra parte, si el desplazamiento u es una solución de la formulación clásica del problema de la viga de Euler-Bernoulli, entonces, utilizando el teorema del trabajo virtual, rápidamente podemos demostrar que ese desplazamiento es también una solución de la formulación variacional. Al igual que en el problema de elasticidad lineal, lo opuesto no es válido a menos que la solución de la formulación variacional cumpla cierta condición de regularidad. Se deja como ejercicio mostrar la equivalencia de ambos problemas en esa situación:

Ejercicio 7.4 Muestre que si la solución de la formulación variacional del problema de Euler-Bernoulli cumple con la condición de regularidad exigida en la formulación clásica, entonces la misma es solución de esa formulación.

El planteo del problema queda similar al problema estudiado en el Capítulo 3 introduciendo los siguientes funcionales:

$$a(u, \bar{u}) = \int_{x_i}^{x_f} EI_z \partial_{xx}^2 u \partial_{xx}^2 \bar{u} \, dx,$$

$$\ell(u) = \int_{x_i}^{x_f} m \partial_x \bar{u} \, dx + \int_{x_i}^{x_f} q \bar{u} \, dx + M \partial_x \bar{u}(x_f) + Q \bar{u}(x_f).$$

Con estas notaciones, la solución de la formulación variacional del problema de la viga de Euler-Bernoulli es el desplazamiento $u \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$a(u, \bar{u}) = \ell(\bar{u}) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

Ejercicio 7.5 Demuestre que el funcional a es bilineal, es decir:

$$\begin{aligned} a(u, \alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2) &= \alpha_1 a(u, \bar{u}_1) + \alpha_2 a(u, \bar{u}_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \\ a(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \bar{u}) &= \alpha_1 a(u_1, \bar{u}) + \alpha_2 a(u_2, \bar{u}) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

es simétrico:

$$a(u, \bar{u}) = a(\bar{u}, u),$$

y es definido positivo en $\bar{\mathcal{U}}$ (para esto asuma que E y I_z son dadas por funciones continuas y positivas en \bar{I} , y que las funciones de $\bar{\mathcal{U}}$ son continuas con derivadas primeras continuas y derivadas segundas continuas por partes en \bar{I}):

$$\begin{aligned} a(\bar{u}, \bar{u}) &\geq 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}, \\ a(\bar{u}, \bar{u}) &> 0 \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}, \text{ con } \bar{u} \neq 0. \end{aligned}$$

Demuestre también que ℓ es un funcional lineal:

$$\ell(\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2) = \alpha_1 \ell(\bar{u}_1) + \alpha_2 \ell(\bar{u}_2) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Ejercicio 7.6 Para el problema de la viga de Euler-Bernoulli proponga una expresión matemática para la energía potencial total. Muestre la equivalencia entre la formulación variacional y el problema de minimización de esa energía potencial total.

7.5. Solución por el método de elementos finitos

Si en un problema unidimensional el funcional bilineal $a(u, \bar{u})$ contempla la derivada de orden k de la función incógnita u , entonces es un resultado del análisis funcional que una función u tiene energía finita solamente si la misma tiene derivadas continuas hasta el orden $k - 1$. Por esta razón utilizamos discretizaciones de tipo $C^0(\bar{I}, \mathbb{R})$ en el problema de elasticidad lineal, puesto que en ese problema $k = 1$. En el problema de la viga de Euler-Bernoulli tenemos $k = 2$, y por lo tanto necesitamos utilizar discretizaciones de tipo $C^1(\bar{I}, \mathbb{R})$.

En el método de elementos finitos queremos además utilizar funciones que sean polinómicas por partes en una cierta partición en elementos del del intervalo \bar{I} . Un truco que vamos a utilizar para definir las funciones de la base de elementos finitos es atribuir a cada nodo dos variables nodales diferentes: la primera asociada al valor de la función en el nodo, y la segunda asociada al valor de la derivada de

la función en el nodo. Así, supongamos que tenemos una discretización que cuenta con n elementos y por lo tanto $n+1$ nodos. Entonces la representación de la solución en todo el intervalo \bar{I} es del tipo:

$$u(x) = \hat{N}_1 U_1 + \hat{N}_2 U_2 + \hat{N}_3 U_3 + \hat{N}_4 U_4 + \dots + \hat{N}_{2n+1} U_{2n+1} + \hat{N}_{2n+2} U_{2n+2} .$$

En esa representación de la solución queremos que U_1 represente el valor nodal del primer nodo de coordenada x_i , es decir $u(x_i)$, por lo tanto tenemos:

$$u(x_i) = \hat{N}_1(x_i)U_1 + \hat{N}_2(x_i)U_2 + \dots + \hat{N}_{2n+2}(x_i)U_{2n+2} = U_1 .$$

La ecuación anterior queda satisfecha si $\hat{N}_1(x_i)$ vale uno y las demás funciones valen cero en ese nodo. Por otra parte, queremos que U_2 represente el valor de la derivada $\partial_x u$ en x_i , es decir:

$$\partial_x u(x_i) = \partial_x \hat{N}_1(x_i)U_1 + \partial_x \hat{N}_2(x_i)U_2 + \dots + \partial_x \hat{N}_{2n+2}(x_i)U_{2n+2} = U_2 .$$

En este caso necesitamos que $\partial_x \hat{N}_2(x_i)$ valga uno y todas las demás funciones tengan derivada nula en x_i . La clave es entonces que las funciones \hat{N}_{2j-1} de índice impar valgan uno en el nodo j , valgan cero en todos los demás nodos, y tengan derivada nula en todos los nodos, mientras que las funciones \hat{N}_{2j} de índice par valgan cero en todos los nodos, tengan derivada igual a uno en el nodo j y tengan derivada nula en todos los demás nodos.

El método de elementos finitos nada más consiste en aplicar el método de Rayleigh-Ritz utilizando la base de funciones definida de esta forma. Por ejemplo, en el problema de la Figura 7.1 tomaríamos $u_0 = \hat{N}_1 \hat{u} + \hat{N}_2 \hat{\theta}$. Las funciones $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_{2n-1}$ simplemente las definimos como las funciones $\hat{N}_3, \dots, \hat{N}_{2n+1}$. Algunas de las funciones de esta base son mostradas en la Figura 7.3. De esta manera el método de elementos finitos preserva las ventajas mencionadas para el caso del problema de elasticidad lineal:

- Define una base de funciones que es siempre linealmente independiente y que es *ajustable* a las características del problema de acuerdo con la precisión deseada: para mejorar la precisión de los resultados se puede utilizar un número mayor de elementos más pequeños.
- Las incógnitas del problema tienen un significado físico evidente: son los desplazamientos o giros de los nodos del problema.
- Es muy eficiente en la tarea de integración: conduce a integrales de funciones polinómicas de grado bajo. Además, si el número de elementos es importante, entonces el número de integrales a realizar es proporcional al número de elementos de la estructura, el cual es mucho menor que el número de componentes de la matriz \mathbf{K} .
- Si el número de elementos es importante, veremos que el método conduce a matrices \mathbf{K} con un número importante de componentes nulas, lo cual facilita enormemente la resolución de los sistemas lineales.

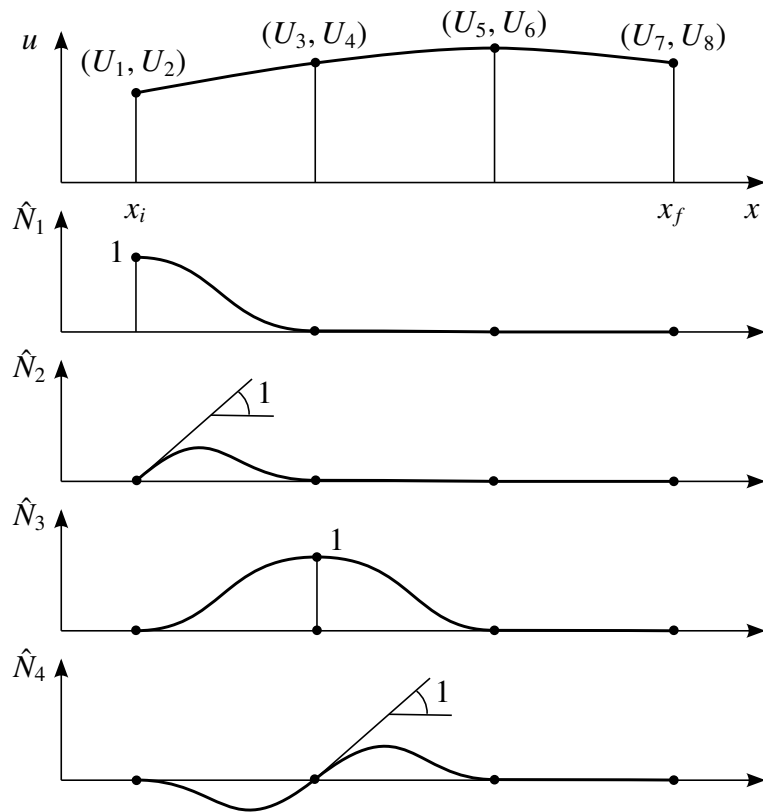


Figura 7.3: Algunas funciones de la discretización de elementos finitos.

7.5.1. Ecuación del elemento finito

Para obtener la ecuación del elemento supondremos conocidos la fuerzas y momentos R_1^e, R_2^e, R_3^e y R_4^e que actúan en los extremos del elemento, como se muestra en la la Figura 7.4.

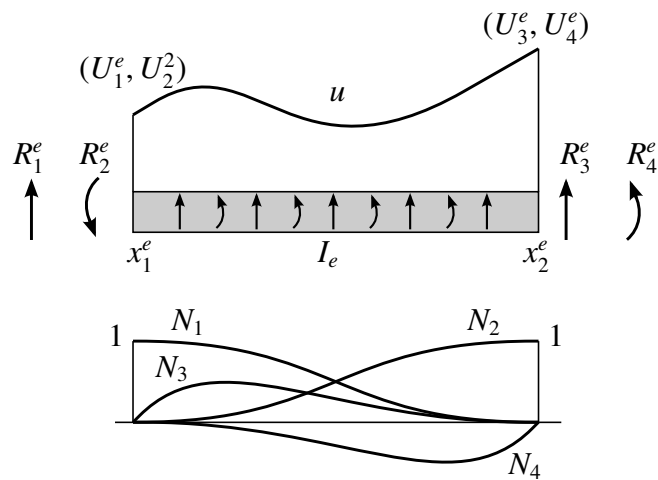


Figura 7.4: Elemento cúbico de Hermite.

Como funciones de forma en este caso utilizamos los polinomios cúbicos de Hermite, que en la coordenada natural del elemento son dados por las expresiones siguientes, donde ℓ es la longitud del elemento:

$$\begin{aligned} N_1(\eta) &= 0,25(1-\eta)^2(2+\eta), & N_2(\eta) &= 0,25(1-\eta)^2(1+\eta)(\ell/2), \\ N_3(\eta) &= 0,25(2-\eta)(1+\eta)^2, & N_4(\eta) &= 0,25(\eta-1)(1+\eta)^2(\ell/2). \end{aligned}$$

Ejercicio 7.7 Muestre que luego de considerar el cambio de variable $\hat{x}(\eta) = 0,5(1-\eta)x_1^e + 0,5(1+\eta)x_2^e$, las funciones de forma dadas en la variable x cumplen las propiedades requeridas.

La ecuación del elemento finito se obtiene en forma similar que en el caso de la elasticidad lineal. El teorema del trabajo virtual aplicado al elemento es:

$$\begin{aligned} \int_{I_e} EI_z \partial_{xx}^2 u \partial_{xx}^2 \bar{u} \, dx &= \int_{I_e} m \partial_x \bar{u} \, dx + \int_{I_e} q \bar{u} \, dx \\ &+ R_1^e \bar{u}(x_1^e) + R_1^e \partial_x \bar{u}(x_1^e) + R_3^e \bar{u}(x_2^e) + R_4^e \partial_x \bar{u}(x_2^e) \quad \forall \bar{u} \in \bar{\mathcal{U}}_e', \end{aligned}$$

donde los espacios \mathcal{U}'_e y $\bar{\mathcal{U}}'_e$ del elemento son definidos como:

$$\begin{aligned} \mathcal{U}'_e &= \{N_1 U_1^e + N_2 U_2^e + N_3 U_3^e + N_4 U_4^e : U_1^e, U_2^e, U_3^e, U_4^e \in \mathbb{R}\}, \\ \bar{\mathcal{U}}'_e &= \{N_1 \bar{U}_1^e + N_2 \bar{U}_2^e + N_3 \bar{U}_3^e + N_4 \bar{U}_4^e : \bar{U}_1^e, \bar{U}_2^e, \bar{U}_3^e, \bar{U}_4^e \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Llamando:

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= (N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4), & \mathbf{U}^e &= (U_1^e \ U_2^e \ U_3^e \ U_4^e)^\top, \\ \mathbf{D} &= (\partial_x N_1 \ \partial_x N_2 \ \partial_x N_3 \ \partial_x N_4), & \bar{\mathbf{U}}^e &= (\bar{U}_1^e \ \bar{U}_2^e \ \bar{U}_3^e \ \bar{U}_4^e)^\top, \\ \mathbf{B} &= (\partial_{xx}^2 N_1 \ \partial_{xx}^2 N_2 \ \partial_{xx}^2 N_3 \ \partial_{xx}^2 N_4), \end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{aligned} u &= \mathbf{N} \mathbf{U}^e, & \partial_x u &= \mathbf{D} \mathbf{U}^e, & \partial_{xx}^2 u &= \mathbf{B} \mathbf{U}^e, \\ \bar{u} &= \mathbf{N} \bar{\mathbf{U}}^e, & \partial_x \bar{u} &= \mathbf{D} \bar{\mathbf{U}}^e, & \partial_{xx}^2 \bar{u} &= \mathbf{B} \bar{\mathbf{U}}^e. \end{aligned}$$

Con estas notaciones, el teorema del trabajo virtual puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \int_{I_e} (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \mathbf{B}^\top EI_z \mathbf{B} \mathbf{U}^e \, dx &= \int_{I_e} (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \mathbf{D}^\top m \, dx \\ &+ \int_{I_e} (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top \mathbf{N}^\top q \, dx + (\bar{\mathbf{U}}^e)^\top (R_1^e \ R_2^e \ R_3^e \ R_4^e)^\top \quad \forall \bar{\mathbf{U}}^e \in \mathbb{R}^4. \end{aligned}$$

Simplificando $\bar{\mathbf{U}}^e$ y definiendo:

$$\mathbf{K}^e = \int_{I_e} \mathbf{B}^\top EI_z \mathbf{B} \, dx, \quad \mathbf{F}^e = \int_{I_e} \mathbf{D}^\top m \, dx + \int_{I_e} \mathbf{N}^\top q \, dx, \quad \mathbf{R}^e = (R_1^e \ R_2^e \ R_3^e \ R_4^e)^\top,$$

tenemos la ecuación del elemento finito:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}^e + \mathbf{R}^e,$$

Ejercicio 7.8 Halle la matriz \mathbf{K}^e de rigidez del elemento y el vector \mathbf{F}^e de fuerzas nodales equivalentes para m y q lineales.

7.5.2. Montaje de la ecuación global

El primer paso para obtener el sistema de ecuaciones del método de elementos finitos es ensamblar las ecuaciones de los elementos. Por ejemplo, si consideramos una discretización de dos elementos para el problema de la Figura 7.1, entonces tenemos las siguientes ecuaciones de elementos:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & \left(\begin{array}{cccc} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 & K_{34}^1 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 & K_{44}^1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ F_4^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \\ R_3^1 \\ R_4^1 \end{pmatrix}, \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \end{array} \\ \\ \begin{array}{cccc} & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & \left(\begin{array}{cccc} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1^2 \\ R_2^2 \\ R_3^2 \\ R_4^2 \end{pmatrix} \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \end{array} \end{array}$$

donde se ha utilizado la numeración global para los valores nodales U_1, U_2, U_3, U_4, U_5 y U_6 del desplazamiento. Note que los subíndices colocados encima de la matriz de rigidez indican cuál es el desplazamiento que multiplica los elementos de una determinada columna, mientras que los índices colocados a la izquierda de las matrices simplemente numera las ecuaciones con índices iguales a los de las columnas. Por lo tanto, si ordenamos las ecuaciones de acuerdo a esos índices (sumando las ecuaciones con igual índice), obtenemos:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & \left(\begin{array}{cccccc} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{array} \right) \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 + F_1^2 \\ F_4^1 + F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1^1 \\ R_2^1 \\ R_3^1 + R_1^2 \\ R_4^1 + R_2^2 \\ R_3^2 \\ R_4^2 \end{pmatrix}. \\ 2 & \\ 3 & \\ 4 & \\ 5 & \\ 6 & \end{array} \end{array}$$

Note que en este sistema la incógnita R_1^1 es una reacción de apoyo correspondiente a una fuerza vertical sobre el extremo izquierdo de la viga, y R_2^1 es una reacción de apoyo correspondiente a un momento. Por el principio de acción y reacción tenemos que $R_3^1 + R_2^1 = R_4^2 + R_3^2 = 0$.

Observación 7.9 En el sistema lineal que se obtiene de ensamblar las ecuaciones de los elementos se cancelan todas las incógnitas que representan fuerzas o momentos que actúan entre los elementos.

Para resolver el sistema lineal debemos imponer las condiciones de contorno $U_1 = \hat{u}$, $U_2 = \hat{\theta}$, $R_2^3 = Q$ y $R_2^4 = M$. Las dos primeras líneas del sistema de ecuaciones servirán para encontrar los valores de las reacciones de apoyo, mientras que las cuatro líneas siguientes definen el sistema lineal del método de elementos finitos:

$$\begin{array}{c} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \begin{pmatrix} K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_3^1 + F_1^2 \\ F_4^1 + F_2^2 \\ F_3^2 \\ F_4^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -K_{31}^1 \hat{u} - K_{32}^1 \hat{\theta} \\ -K_{41}^1 \hat{u} - K_{42}^1 \hat{\theta} \\ Q \\ M \end{pmatrix}.$$

El sistema reducido anterior contiene solamente datos del lado derecho y entonces puede ser resuelto para hallar los valores nodales incógnitas.

Capítulo 8

Conducción de calor

En este capítulo estudiaremos el problema de conducción de calor, cuya característica diferente con respecto a los vistos anteriormente es que el mismo es definido en un dominio tridimensional, lo cual aporta cierta complejidad tanto en la obtención de las formulaciones matemáticas del problema como en su solución numérica por el método de elementos finitos. En primer lugar estudiaremos las formulaciones matemáticas del problema, y luego nos concentraremos en el caso estacionario, el cual conduce a un problema que nos sirve para introducir el método de elementos finitos. El mismo es introducido para el caso de dominio bidimensional, siendo el método para el caso tridimensional muy similar. Finalmente estudiaremos cómo resolver el problema no estacionario.

8.1. Ecuación puntual de balance de energía térmica

En la *mecánica clásica* el *cuerpo material continuo* es una idealización utilizada para representar diferentes *cuerpos físicos*. El mismo consiste en un conjunto de *partículas*, que en determinado momento ocupan una cierta región del espacio Euclidiano tridimensional. Cada partícula representa una pequeña porción del cuerpo físico, que es lo suficientemente grande como para poseer ciertas propiedades que tienen sentido a nivel macroscópico, como *densidad*, o *temperatura*, pero lo suficientemente pequeña como para poder considerar que la misma ocupa un punto en el espacio. En términos matemáticos, consideraremos la siguiente definición:

Definición 8.1 (Cuerpo material continuo) Un *cuerpo material continuo* es un conjunto de partículas materiales que ocupa una región abierta del espacio euclidiano tridimensional, la cual debe ser limitada por una superficie bilátera y suficientemente regular de modo que el teorema de la divergencia de Gauss sea aplicable.

Como ejemplo de regiones donde es aplicable el teorema de Gauss tenemos las limitadas por una superficie bilátera continuamente diferenciable como la esfera o el toro y aquellas limitadas por la unión de un número finito de tales superficies que

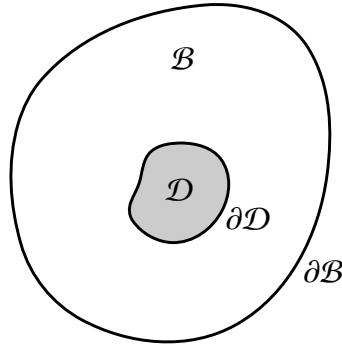


Figura 8.1: Cuerpo continuo \mathcal{B} .

se intersecan formando aristas de superficie nula, como el cubo o un sector del toro.

Considere la Figura 8.1, donde se ha representado un cuerpo continuo \mathcal{B} de superficie $\partial\mathcal{B}$. En el mismo se ha resaltado una parte arbitraria \mathcal{D} de superficie $\partial\mathcal{D}$. En un determinado instante de tiempo, la *energía térmica* \mathcal{E} contenida en \mathcal{D} es dada por la siguiente integral:

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{D}} \rho e \, dv, \quad (8.1)$$

donde ρ es la *densidad másica* del material que conforma el cuerpo \mathcal{B} , y e representa la *energía térmica específica* del cuerpo, es decir, energía térmica por unidad de masa.

Admitiendo que el cuerpo \mathcal{B} está en reposo y tiene una densidad constante en el tiempo, la energía térmica \mathcal{E} de la porción \mathcal{D} varía en el tiempo de acuerdo con el *flujo de calor* Q que recibe, lo cual se expresa en la forma:

$$\partial_t \mathcal{E} = \int_{\mathcal{D}} \rho \partial_t e \, dv = Q, \quad (8.2)$$

donde el flujo de calor Q es igual a la tasa de generación de calor en el interior del cuerpo menos el flujo de calor desde \mathcal{D} hacia el resto del cuerpo \mathcal{B} :

$$Q = \int_{\mathcal{D}} r \, dv - \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} \, da, \quad (8.3)$$

donde r es la *tasa de generación de calor*, la cual puede ser consecuencia por ejemplo de la existencia de una radiación externa que aporta calor al cuerpo, \mathbf{q} es el *vector flujo de calor* que caracteriza la intensidad de intercambio de calor a través de la superficie $\partial\mathcal{D}$ y \mathbf{n} es la dirección normal unitaria saliente al cuerpo \mathcal{D} .

Utilizando las ecuaciones (8.2) y (8.3), y el teorema de la divergencia, obtenemos, agrupando todos los términos en una sola integral:

$$\int_{\mathcal{D}} \rho \partial_t e - r + \nabla \cdot \mathbf{q} \, dv = 0 \quad \forall \mathcal{D} \subset \mathcal{B}. \quad (8.4)$$

Si admitimos que el integrando es continuo en el cuerpo \mathcal{B} , entonces la ecuación anterior implica que el mismo sea nulo en todo el cuerpo. De esta manera obtenemos la *ecuación puntual de balance de energía térmica*:

$$\rho \partial_t e - r + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad \text{en } \mathcal{B}. \quad (8.5)$$

8.2. Expresiones constitutivas

La ecuación (8.5) no es suficiente por sí misma para resolver el problema de conducción de calor. En particular faltan expresiones constitutivas particulares que especifiquen el comportamiento del medio sólido que compone el cuerpo. Estas expresiones son dos, y vinculan la energía térmica específica y el flujo de calor con el campo de temperaturas existente en el cuerpo. La primera ecuación expresa cómo varía la energía térmica almacenada en el cuerpo al variar la temperatura del mismo, y la segunda ecuación expresa cómo es el vector flujo de calor en el cuerpo cuando en el mismo existe un gradiente de temperatura. Estas ecuaciones, para un medio sólido isótropo son expresadas a continuación, donde la notación θ representa la temperatura:

$$\partial_t e = c \partial_t \theta, \quad \mathbf{q} = -\kappa \nabla \theta. \quad (8.6)$$

En las expresiones anteriores c es la *capacidad calorífica específica* del material sólido que compone el cuerpo y κ es el *coeficiente de conductividad térmica* del mismo. Tanto la capacidad calorífica específica c como el coeficiente de conductividad térmica κ son magnitudes positivas que dependen de la temperatura del cuerpo, aunque si el rango de temperaturas a considerar es limitado, entonces puede ser válida la aproximación de considerarlas como constantes independientes de la temperatura.

8.3. Problema estacionario de conducción de calor

En esta sección consideraremos el problema de conducción de calor en un cuerpo \mathcal{B} cuya superficie $\partial\mathcal{B}$ está compuesta por dos partes: $\partial\mathcal{B}_\theta$ donde es conocida la temperatura dada por la función $\hat{\theta}$, y $\partial\mathcal{B}_q$ donde es conocido el flujo normal de calor dado por la función \hat{q} . Habitualmente la temperatura es conocida en una superficie del cuerpo que esté en contacto con otro cuerpo de alta conductividad y de temperatura fija conocida, mientras que el flujo normal de calor es conocido una superficie que esté en contacto con un material aislante, que hace que el flujo normal de calor sea nulo. Sin embargo consideraremos los casos más generales en que la temperatura y flujo normal conocidos estén dados por funciones no necesariamente constantes $\hat{\theta}$ y \hat{q} , como es representado en la Figura 8.2. Las superficies $\partial\mathcal{B}_\theta$ y $\partial\mathcal{B}_q$ son complementarias en el sentido que se cumple:

$$\partial\mathcal{B}_\theta \cap \partial\mathcal{B}_q = \emptyset, \quad \overline{\partial\mathcal{B}_\theta} \cup \overline{\partial\mathcal{B}_q} = \partial\mathcal{B}. \quad (8.7)$$

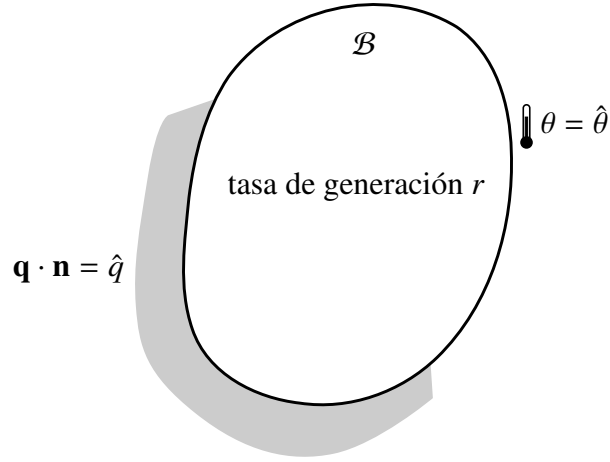


Figura 8.2: Problema de conducción de calor.

Dicho de otro modo, en todo punto de la superficie $\partial\mathcal{B}$ se conoce o bien la temperatura, o bien el flujo normal de calor.

En el caso *estacionario*, o de *equilibrio térmico*, asumimos que ha pasado suficiente tiempo como para que ya no existan variaciones significativas de temperatura. Matemáticamente esta condición es dada por la ecuación $\partial_t \theta = 0$ que expresa que es nula la tasa de variación de temperatura en el cuerpo \mathcal{B} . En esa situación, e introduciendo la magnitud adicional \mathbf{g} definida como el gradiente de la temperatura, obtenemos un problema muy similar a la formulación clásica del problema de elasticidad lineal, donde en este caso las incógnitas son:

$$\begin{aligned} \theta : \overline{\mathcal{B}} &\rightarrow \mathbb{R} && \text{con } \theta \in C^0(\overline{\mathcal{B}}, \mathbb{R}), \text{ y } \theta \in C^2(\mathcal{B}, \mathbb{R}), \\ \mathbf{g} : \overline{\mathcal{B}} &\rightarrow \mathcal{V}^3 && \text{con } \mathbf{g} \in C^0(\overline{\mathcal{B}}, \mathcal{V}^3), \text{ y } \mathbf{g} \in C^1(\mathcal{B}, \mathcal{V}^3), \\ \mathbf{q} : \overline{\mathcal{B}} &\rightarrow \mathcal{V}^3 && \text{con } \mathbf{q} \in C^0(\overline{\mathcal{B}}, \mathcal{V}^3), \text{ y } \mathbf{q} \in C^1(\mathcal{B}, \mathcal{V}^3), \end{aligned}$$

mientras que las ecuaciones a satisfacer son también tres ecuaciones de campo y dos condiciones de contorno:

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\nabla \cdot \mathbf{q} + r = 0 & \text{en } \mathcal{B} \quad (\text{ecuación de equilibrio térmico}), \\ \mathbf{g} = \nabla \theta & \text{en } \mathcal{B} \quad (\text{relación temperatura-gradiente}), \\ \mathbf{q} = -\kappa \mathbf{g} & \text{en } \mathcal{B} \quad (\text{ecuación constitutiva}), \\ \theta = \hat{\theta} & \text{en } \partial\mathcal{B}_\theta \quad (\text{condición de contorno en la temperatura}), \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \hat{q} & \text{en } \partial\mathcal{B}_q \quad (\text{condición de contorno en el flujo normal}). \end{array} \right.$$

Los datos del problema son el dominio \mathcal{B} , sus superficies $\partial\mathcal{B}_\theta$ y $\partial\mathcal{B}_q$, la propiedad material $\kappa \in C^1(\overline{\mathcal{B}}, \mathbb{R})$, que puede ser variable si el cuerpo no es compuesto por un solo material homogéneo, la tasa de generación de calor $r \in C^0(\overline{\mathcal{B}}, \mathbb{R})$, y las funciones $\hat{\theta} \in C^0(\overline{\partial\mathcal{B}_\theta}, \mathbb{R})$ y $\hat{q} \in C^0(\overline{\partial\mathcal{B}_q}, \mathbb{R})$ de las condiciones de contorno.

8.4. Formulación variacional en la temperatura

Tal como hemos hecho en el Capítulo 3, en esta sección obtendremos una formulación variacional para el problema de conducción de calor. Para eso necesitamos el teorema de integración por partes enunciado a continuación.

Lema 8.2 (Integración por partes) Sea $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ un cuerpo de superficie $\partial\mathcal{B}$, sea el campo vectorial diferenciable $\mathbf{q} : \overline{\mathcal{B}} \rightarrow \mathcal{V}^3$ y un campo escalar diferenciable $\bar{\theta} : \overline{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces se cumple:

$$-\int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \nabla \bar{\theta} \, dv = \int_{\mathcal{B}} (\nabla \cdot \mathbf{q}) \bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \bar{\theta} \, da.$$

Demostración. Utilizando la fórmula $\nabla \cdot (f\mathbf{v}) = \nabla f \cdot \mathbf{v} + f(\nabla \cdot \mathbf{v})$ tenemos:

$$\nabla \cdot (\bar{\theta}\mathbf{q}) = \nabla \bar{\theta} \cdot \mathbf{q} + \bar{\theta}(\nabla \cdot \mathbf{q}) = \mathbf{q} \cdot \nabla \bar{\theta} + (\nabla \cdot \mathbf{q})\bar{\theta}.$$

Partiendo de la integral de superficie, si utilizamos el teorema de la divergencia, tenemos:

$$\int_{\partial\mathcal{B}} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \bar{\theta} \, da = \int_{\partial\mathcal{B}} (\bar{\theta}\mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} \, da = \int_{\mathcal{B}} \nabla \cdot (\bar{\theta}\mathbf{q}) \, dv,$$

y utilizando el resultado anterior se obtiene el enunciado del lema. \square

Corolario 8.3 (Teorema del trabajo virtual) Sea un problema estacionario de conducción de calor definido en $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}^3$ de superficie $\partial\mathcal{B} = \overline{\partial\mathcal{B}_\theta} \cup \overline{\partial\mathcal{B}_q}$ con $\partial\mathcal{B}_\theta \cap \partial\mathcal{B}_q = \emptyset$. Sean además $\bar{\theta}$ y su gradiente $\bar{\mathbf{g}}$ con $\bar{\theta}$ nulo en $\partial\mathcal{B}_\theta$, es decir:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{q} + r &= 0 & \text{en } \mathcal{B}, & & \bar{\mathbf{g}} &= \nabla \bar{\theta} & \text{en } \mathcal{B}, \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} &= \hat{q} & \text{en } \partial\mathcal{B}_q, & & \bar{\theta} &= 0 & \text{en } \partial\mathcal{B}_\theta. \end{aligned}$$

Entonces se cumple:

$$-\int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \bar{\mathbf{g}} \, dv = \int_{\mathcal{B}} r \bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_q} \hat{q} \bar{\theta} \, da. \quad (8.8)$$

A un campo escalar $\bar{\theta}$ que cumple la condición $\bar{\theta} = 0$ en $\partial\mathcal{B}_\theta$ donde se impone la condición en temperatura le denominaremos *temperatura virtual*. El teorema del trabajo virtual expresa que si el flujo de calor \mathbf{q} está en equilibrio térmico con tasa de generación de calor r y el flujo normal \hat{q} , entonces, lo que podríamos llamar el *trabajo virtual interno* será igual al *trabajo virtual externo* para cualquier campo de temperaturas virtual. Es importante aclarar que hemos utilizado la palabra *trabajo* no por el significado físico de las integrales del teorema anterior sino por el rol matemático análogo que cumplen estas integrales en comparación con las que teníamos en el problema de elasticidad del Capítulo 3.

Ejercicio 8.4 Hallar las unidades físicas en las que se expresan las integrales de la ecuación (8.8).

La formulación variacional del problema estacionario de conducción de calor se obtiene considerando el teorema del trabajo virtual en lugar de la ecuación puntual de equilibrio térmico y la condición de contorno en el flujo. En el caso de la formulación en temperaturas eliminaremos las incógnitas \mathbf{g} y \mathbf{q} utilizando la relación temperatura-gradiente y la ecuación constitutiva. Para el problema de la Figura 8.2 se definen los conjuntos:

$$\begin{aligned}\mathcal{U} &= \{\theta : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : \theta = \hat{\theta} \text{ en } \partial\mathcal{B}_\theta\}, \\ \bar{\mathcal{U}} &= \{\bar{\theta} : \bar{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : \bar{\theta} = 0 \text{ en } \partial\mathcal{B}_\theta\}.\end{aligned}$$

La formulación variacional en la temperatura del problema estacionario de conducción de calor consiste en hallar la temperatura $\theta \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$\int_{\mathcal{B}} \kappa \nabla \theta \cdot \nabla \bar{\theta} \, dv = \int_{\mathcal{B}} r \bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_q} \hat{q} \bar{\theta} \, da \quad \forall \bar{\theta} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

La condición de admisibilidad requerida en la definición del conjunto solución \mathcal{U} y el conjunto de temperaturas virtuales $\bar{\mathcal{U}}$ es escogida de forma tal que las integrales de la ecuación anterior tengan sentido y además se cumpla la existencia y unicidad de la solución de la formulación variacional. Como dijimos anteriormente, la definición precisa de los conjuntos \mathcal{U} y $\bar{\mathcal{U}}$ es un problema difícil que ha tenido respuesta gracias al desarrollo teórico del análisis funcional. Si bien la definición precisa es más general, por el momento consideraremos como admisibles a funciones θ y $\bar{\theta}$ continuas en $\bar{\mathcal{B}}$, es decir $\theta, \bar{\theta} \in C^0(\bar{\mathcal{B}}, \mathbb{R})$, tales que sus derivadas sean continuas por partes en \mathcal{B} , es decir, podemos dividir \mathcal{B} en un conjunto finito de cuerpos dentro de los cuales las derivadas $\nabla \theta$ y $\nabla \bar{\theta}$ sean continuas.

Note que la condición de contorno $\theta = \hat{\theta}$ la exigimos explícitamente al requerir que la solución θ esté en el conjunto \mathcal{U} . Esta condición es entonces la *condición de contorno esencial* de la formulación variacional. Por el contrario, la condición de contorno $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \hat{q}$ de la formulación clásica queda excluida, puesto que es reemplazada por la tesis del teorema del trabajo virtual junto con la ecuación puntual de equilibrio térmico. Esta condición es entonces la *condición de contorno natural* de la formulación variacional.

Teorema 8.5 (Equivalencia entre formulaciones clásica y variacional) Si los datos del problema y la solución $\theta \in \mathcal{U}$ de la formulación variacional del problema estacionario de conducción de calor cumplen con las condiciones de regularidad requeridas por la formulación clásica, entonces dicha función también es solución del problema de conducción de calor en la formulación clásica.

Demostración. En primer lugar notamos que la condición de contorno en temperatura de la formulación clásica es requerida explícitamente a la solución de la formulación variacional. Falta mostrar entonces que se satisfacen las tres ecuaciones de

campo y la condición de contorno en el flujo normal. Partiendo de la temperatura solución de la formulación variacional, definimos las siguientes magnitudes para completar una terna solución:

$$\mathbf{g} = \nabla\theta, \quad \mathbf{q} = -\kappa \mathbf{g}.$$

Note que si θ tiene la regularidad requerida por la formulación clásica entonces con esta definición \mathbf{g} y \mathbf{q} también la tendrán, y además tendremos satisfechas dos de las ecuaciones de campo. Partiendo ahora de la ecuación fundamental de la formulación variacional, el teorema del trabajo virtual, y utilizando el Lema de integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}} r\bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_q} \hat{q}\bar{\theta} \, da &= \int_{\mathcal{B}} \kappa \nabla\theta \cdot \nabla\bar{\theta} \, dv = - \int_{\mathcal{B}} \mathbf{q} \cdot \nabla\bar{\theta} \, dv \\ &= \int_{\mathcal{B}} (\nabla \cdot \mathbf{q}) \bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_q} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \bar{\theta} \, da \quad \forall \bar{\theta} \in \bar{\mathcal{U}}. \end{aligned}$$

Reordenando los términos, tenemos:

$$\int_{\mathcal{B}} (-\nabla \cdot \mathbf{q} + r) \bar{\theta} \, dv + \int_{\partial\mathcal{B}_q} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} - \hat{q}) \bar{\theta} \, da = 0 \quad \forall \bar{\theta} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

Así, aplicando el Lema 1.94 obtenemos las ecuaciones faltantes de la formulación clásica: $-\nabla \cdot \mathbf{q} + r = 0$ en \mathcal{B} y $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \hat{q}$ en $\partial\mathcal{B}_q$. \square

En forma análoga al problema de elasticidad, el planteo se simplifica considerablemente introduciendo los siguientes funcionales:

$$a(\theta, \bar{\theta}) = \int_{\mathcal{B}} \kappa \nabla\theta \cdot \nabla\bar{\theta} \, dv, \quad \ell(\bar{\theta}) = \int_{\mathcal{B}} r\bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_q} \hat{q}\bar{\theta} \, da.$$

Con estas notaciones, la solución de la formulación variacional del problema estacionario de conducción de calor es $\theta \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$a(\theta, \bar{\theta}) = \ell(\bar{\theta}) \quad \forall \bar{\theta} \in \bar{\mathcal{U}}.$$

8.5. Formulación de optimización

Para el problema de conducción de calor podemos introducir una *energía potencial total* para la temperatura $\theta \in \mathcal{U}$ utilizando la misma fórmula que vimos para el problema de elasticidad en términos de los funcionales a y ℓ . La misma es la cantidad $\pi(\theta)$ dada por:

$$\pi(u) = \frac{1}{2}a(\theta, \theta) - \ell(\theta).$$

En la notación integral tenemos, para el problema de la Figura 8.2:

$$\pi(\theta) = \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2} \kappa \|\nabla\theta\|^2 \, ds - \int_{\mathcal{B}} r\bar{\theta} \, dv + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \hat{q}\bar{\theta} \, da.$$

El el teorema siguiente expresa que la energía potencial total es mínima para la solución del problema estacionario de conducción de calor:

Teorema 8.6 (Mínima energía potencial total) Toda solución del problema estacionario de conducción de calor es un mínimo global en \mathcal{U} de la energía potencial total. Recíprocamente, todo mínimo local en \mathcal{U} de la energía potencial total es un mínimo global que es solución del problema de conducción de calor.

Note que la energía potencial total cumple un rol matemático análogo al problema de elasticidad. Sin embargo, la misma no tiene las dimensiones físicas de una energía, es decir, no se mide en julios.

Ejercicio 8.7 Demuestre el Teorema 8.6 utilizando argumentos análogos a los del Teorema 3.10.

8.6. Método de elementos finitos

En esta sección vamos a aplicar el método de elementos finitos a la solución del problema de conducción de calor. Para simplificar la exposición del método consideraremos el caso plano, es decir, el cuerpo es una chapa de espesor constante y los datos del problema son tales que la solución no depende de la coordenada perpendicular a ese espesor.

El primer problema que se nos presenta está relacionado a la siguiente pregunta: ¿Qué procedimiento puede ser utilizado para calcular integrales definidas en un cuerpo de geometría irregular? Más básico todavía: ¿Cómo describir la geometría de ese cuerpo? Teniendo en cuenta que el objetivo es establecer un método programable capaz de ser ejecutado en un computador, necesitamos de un procedimiento simple y sistemático que permita describir cualquier tipo de geometría a través de un conjunto de datos numéricos. En el caso plano podemos pensar en dividir la chapa en triángulos o cuadriláteros. De esta manera la geometría del cuerpo sólido puede ser establecida indicando las coordenadas de los vértices de los elementos. A este procedimiento le llamamos *discretización*.

En la mayoría de los casos la unión de elementos simples puede no ser exactamente igual al cuerpo original. Vea por ejemplo el caso mostrado en la Figura 8.3. Sin embargo, la tarea de realizar una integral definida sobre un cuerpo de geometría irregular es notablemente simplificada por la discretización, puesto que ahora solamente tendremos que sumar los valores de las integrales calculadas sobre cada elemento y cada una de esas integrales está definida sobre un dominio de geometría simple. Una representación más exacta de la geometría original se puede obtener reduciendo el tamaño de los elementos o, como veremos en las secciones siguientes, aumentando el grado de los polinomios que utilizaremos para definir las funciones de forma de los elementos.

Otro paso que simplifica todavía más la tarea de integración consiste en establecer un conjunto de elementos de referencia y, utilizando un cambio de variable conveniente, realizar las integrales sobre los elementos de referencia. Por ejemplo, en el caso mostrado en la Figura 8.4, donde todos los elementos son triangulares, todas las integrales podrían ser realizadas sobre el mismo triángulo de referencia.

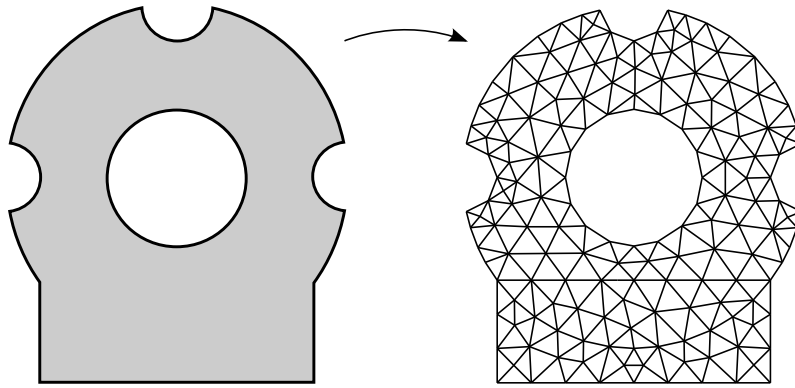


Figura 8.3: Discretización de un cuerpo continuo.

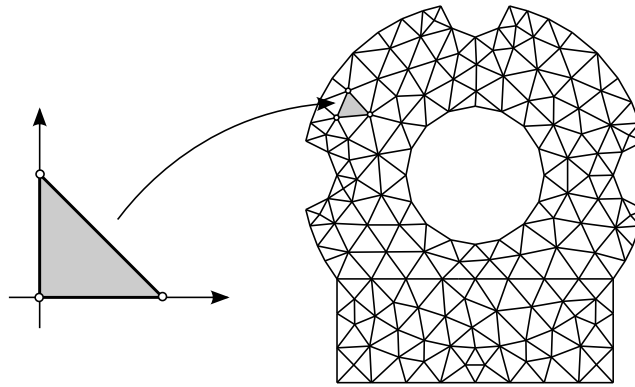


Figura 8.4: Utilización de elementos de referencia.

8.6.1. Elementos de referencia

Veamos el caso más simple de elemento que es el llamado *triángulo isoparamétrico lineal*. Como es usual en la bibliografía del método de elementos finitos, se utilizará la notación (x, y) para las coordenadas cartesianas de un punto en el plano, dejando los subíndices de números arábigos para indicar la numeración de los nodos de un elemento o de una malla de elementos. Como muestra la Figura 8.5, necesitaremos un cambio de variable que lleve el triángulo de referencia Ω^0 sobre el elemento Ω^e que compone la malla de elementos del cuerpo estudiado. En el caso del triángulo lineal, ese cambio de variable es dado por las funciones lineales $\hat{x} : \Omega^0 \rightarrow \mathbb{R}$ y $\hat{y} : \Omega^0 \rightarrow \mathbb{R}$ que dado un punto (η, ξ) en Ω^0 nos dan un punto (x, y) en el elemento Ω^e , es decir:

$$(\eta, \xi) \xrightarrow{\hat{x}, \hat{y}} (x, y).$$

También supondremos que el cambio de variable es invertible, lo cual permite hallar las funciones $\hat{\eta} : \Omega^e \rightarrow \mathbb{R}$ y $\hat{\xi} : \Omega^e \rightarrow \mathbb{R}$ que dado un punto (x, y) en Ω^e nos dan un punto (η, ξ) en el elemento de referencia Ω^0 , es decir:

$$(x, y) \xrightarrow{\hat{\eta}, \hat{\xi}} (\eta, \xi).$$

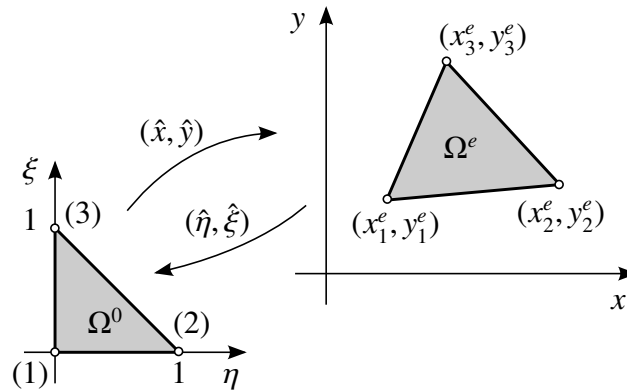


Figura 8.5: Triángulo lineal.

Supongamos que conocemos tres funciones lineales N_1 , N_2 y N_3 que cumplen:

$$\begin{aligned} N_1(0,0) &= 1, & N_1(1,0) &= 0, & N_1(0,1) &= 0, \\ N_2(0,0) &= 0, & N_2(1,0) &= 1, & N_2(0,1) &= 0, \\ N_3(0,0) &= 0, & N_3(1,0) &= 0, & N_3(0,1) &= 1. \end{aligned}$$

Es fácil ver que las funciones \hat{x} y \hat{y} para el elemento Ω^e son dadas por:

$$\begin{aligned} \hat{x}(\eta, \xi) &= N_1(\eta, \xi)x_1^e + N_2(\eta, \xi)x_2^e + N_3(\eta, \xi)x_3^e, \\ \hat{y}(\eta, \xi) &= N_1(\eta, \xi)y_1^e + N_2(\eta, \xi)y_2^e + N_3(\eta, \xi)y_3^e, \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{pmatrix} &= \mathbf{N} \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \end{pmatrix}, \quad \text{con } \mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La figura 8.5 justifica el nombre *funciones de forma* utilizado habitualmente para las funciones interpolación N_1 , N_2 y N_3 . Estas funciones determinan la forma que el elemento puede tener en la configuración espacial. En este caso con funciones de forma lineales los lados del elemento son rectos, pero en el caso de utilizar funciones de mayor grado, como las que serán presentadas más adelante, entonces los elementos podrían tener lados curvos.

Matriz Jacobiana

La matriz Jacobiana del cambio de variable y su inversa serán importantes a la hora de calcular integrales y derivadas sobre el elemento de referencia Ω^0 de funciones inicialmente definidas sobre Ω^e . Las mismas pueden hallarse en la forma:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \partial_\eta \hat{x} & \partial_\eta \hat{y} \\ \partial_\xi \hat{x} & \partial_\xi \hat{y} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_x \hat{\eta} & \partial_x \hat{\xi} \\ \partial_y \hat{\eta} & \partial_y \hat{\xi} \end{pmatrix}.$$

Note que estas matrices Jacobianas son en realidad las transpuestas de las que habitualmente se consideran en cursos de cálculo. Sin embargo, así son definidas en la bibliografía de elementos finitos. La matriz \mathbf{J} se calcula derivando las funciones de

forma. La matriz \mathbf{J}^{-1} se calcula usualmente invirtiendo numéricamente la matriz \mathbf{J} . Pasemos entonces al cálculo de \mathbf{J} . Las derivadas de las funciones \hat{x} y \hat{y} son:

$$\begin{aligned}\partial_\eta \hat{x} &= \partial_\eta N_1 x_1^e + \partial_\eta N_2 x_2^e + \partial_\eta N_3 x_3^e, \\ \partial_\xi \hat{x} &= \partial_\xi N_1 x_1^e + \partial_\xi N_2 x_2^e + \partial_\xi N_3 x_3^e, \\ \partial_\eta \hat{y} &= \partial_\eta N_1 y_1^e + \partial_\eta N_2 y_2^e + \partial_\eta N_3 y_3^e, \\ \partial_\xi \hat{y} &= \partial_\xi N_1 y_1^e + \partial_\xi N_2 y_2^e + \partial_\xi N_3 y_3^e, \\ \Rightarrow \mathbf{J} &= \begin{pmatrix} \partial_\eta \hat{x} & \partial_\eta \hat{y} \\ \partial_\xi \hat{x} & \partial_\xi \hat{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_\eta N_1 & \partial_\eta N_2 & \partial_\eta N_3 \\ \partial_\xi N_1 & \partial_\xi N_2 & \partial_\xi N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \mathbf{J} &= \partial_{\eta\xi} \mathbf{N} \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \end{pmatrix}, \quad \text{con } \partial_{\eta\xi} \mathbf{N} = \begin{pmatrix} \partial_\eta N_1 & \partial_\eta N_2 & \partial_\eta N_3 \\ \partial_\xi N_1 & \partial_\xi N_2 & \partial_\xi N_3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Veamos cómo estas expresiones pueden servirnos para calcular integrales. Por ejemplo, el área A^e del elemento Ω^e puede calcularse como:

$$A^e = \int_{\Omega^e} dx dy = \int_{\Omega^0} J_0 d\eta d\xi,$$

donde J_0 es el determinante Jacobiano del cambio de variable dado por $J_0 = |\det(\mathbf{J})|$.

El cambio de variable del elemento nos sirve también para establecer funciones definidas sobre Ω^e que “copien” los valores de funciones definidas sobre Ω^0 . Admitiendo la ambigüedad en la notación, esto lo podemos hacer en la forma:

$$f(x, y) = f(\hat{\eta}(x, y), \hat{\xi}(x, y)).$$

Esto lo podemos aplicar también para las funciones de forma correspondientes a la configuración Ω^e . Admitiendo la ambigüedad en la notación, las funciones de forma definidas en Ω^e son dadas por:

$$\begin{aligned}N_1(x, y) &= N_1(\hat{\eta}(x, y), \hat{\xi}(x, y)), \\ N_2(x, y) &= N_2(\hat{\eta}(x, y), \hat{\xi}(x, y)), \\ N_3(x, y) &= N_3(\hat{\eta}(x, y), \hat{\xi}(x, y)),\end{aligned}$$

cuyas derivadas pueden hallarse como:

$$\begin{aligned}\partial_x N_i &= \partial_\eta N_i \partial_x \hat{\eta} + \partial_\xi N_i \partial_x \hat{\xi}, \\ \partial_y N_i &= \partial_\eta N_i \partial_y \hat{\eta} + \partial_\xi N_i \partial_y \hat{\xi}, \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_x N_1 & \partial_x N_2 & \partial_x N_3 \\ \partial_y N_1 & \partial_y N_2 & \partial_y N_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_x \hat{\eta} & \partial_x \hat{\xi} \\ \partial_y \hat{\eta} & \partial_y \hat{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\eta N_1 & \partial_\eta N_2 & \partial_\eta N_3 \\ \partial_\xi N_1 & \partial_\xi N_2 & \partial_\xi N_3 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \partial_{xy} \mathbf{N} &= \mathbf{J}^{-1} \partial_{\eta\xi} \mathbf{N}.\end{aligned}$$

Elemento isoparamétrico

El *elemento isoparamétrico* es aquel en que las mismas funciones de forma utilizadas para representar la geometría son utilizadas también para representar la incógnita principal del problema, en este caso la temperatura, así como cualquier otro campo f definido en el cuerpo elástico, como las propiedades materiales o la tasa de generación de calor. Por ejemplo, en el elemento Ω^e , para el caso plano y utilizando el triángulo isoparamétrico lineal, valen las siguientes expresiones:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ \theta(x, y) \\ f(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^e & x_2^e & x_3^e \\ y_1^e & y_2^e & y_3^e \\ \theta_1^e & \theta_2^e & \theta_3^e \\ f_1^e & f_2^e & f_3^e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1(x, y) \\ N_2(x, y) \\ N_3(x, y) \end{pmatrix}. \quad (8.9)$$

Observación 8.8 La línea 1 de la ecuación (8.9) debe cumplirse **exactamente**, es decir, la suma de las funciones de forma debe ser exactamente 1, lo que permite que el elemento isoparamétrico pueda representar exactamente cualquier función constante. Esta condición no es trivial. Veremos que las líneas 2 y 3 sí se cumplen exactamente de forma automática para el elemento isoparamétrico. Por lo tanto, las tres primeras líneas muestran que el elemento isoparamétrico puede representar exactamente cualquier polinomio lineal en las variables x y y . Las líneas 4 a 5 no se verifican exactamente para la temperatura solución o para una función general f . Las funciones θ y f de la ecuación anterior deben ser entendidas como las aproximaciones de elementos finitos de las funciones que queremos representar.

Visto que las funciones de forma definidas en Ω^e “copian” los valores de las mismas definidas en Ω^0 , es fácil establecer condiciones sobre las funciones de forma definidas en Ω^0 , de forma tal que la línea 1 de la ecuación (8.9) se cumpla exactamente. De la misma forma se muestra que las líneas 2 y 3 se cumplen exactamente de forma automática, como plantea el siguiente ejercicio:

Ejercicio 8.9 Muestre que la línea 1 de la ecuación (8.9) se cumple si y solamente si se satisface la condición siguiente:

$$N_1(\eta, \xi) + N_2(\eta, \xi) + N_3(\eta, \xi) = 1 \quad \forall (\eta, \xi) \in \Omega^0.$$

Muestre también que las líneas 2 y 3 de la misma ecuación se satisfacen de forma automática para el elemento isoparamétrico, es decir, muestre que las funciones que a cada punto de coordenadas (x, y) le atribuye el valor x o el valor y pueden hallarse como la combinación lineal de las funciones de forma definidas en Ω^e , utilizando las expresiones que definen las funciones de forma en Ω^e y las funciones $\hat{x}(\eta, \xi)$ y $\hat{y}(\eta, \xi)$ con $(\eta, \xi) \in \Omega^0$.

8.6.2. Ecuación del elemento finito

En esta sección veremos cómo aplicar el método de elementos finitos al problema estacionario plano de conducción de calor. Veamos primero el caso del triángulo isoparamétrico lineal. El teorema del trabajo virtual aplicado al elemento resulta en:

$$\int_{\Omega^e} \kappa \nabla \theta \cdot \nabla \bar{\theta} \, dv = \int_{\Omega^e} r \bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\Omega^e} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \bar{\theta} \, da \quad \forall \bar{\theta} \in \bar{\mathcal{U}}_e,$$

donde los espacios \mathcal{U}_e y $\bar{\mathcal{U}}_e$ del elemento son:

$$\mathcal{U}_e = \left\{ \sum_{i=1}^3 \theta_i^e N_i : \theta_i^e \in \mathbb{R} \right\}, \quad \bar{\mathcal{U}}_e = \left\{ \sum_{i=1}^3 \bar{\theta}_i^e N_i : \bar{\theta}_i^e \in \mathbb{R} \right\},$$

donde N_1 y N_2 y N_3 son las funciones de interpolación del elemento. Así, para la temperatura θ podemos escribir:

$$\theta = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \\ \theta_3^e \end{pmatrix} = \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}^e. \quad (8.10)$$

Las componentes del gradiente de la temperatura pueden hallarse como:

$$\begin{pmatrix} \partial_x \theta \\ \partial_y \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix} \theta = \begin{pmatrix} \partial_x N_1 & \partial_x N_2 & \partial_x N_3 \\ \partial_y N_1 & \partial_y N_2 & \partial_y N_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1^e \\ \theta_2^e \\ \theta_3^e \end{pmatrix} = \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}^e, \quad \text{con } \mathbf{B} = \partial_{xy} \mathbf{N}. \quad (8.11)$$

Finalmente, las componentes del vector flujo de calor son dadas por:

$$\kappa \begin{pmatrix} \partial_x \theta \\ \partial_y \theta \end{pmatrix} = \kappa \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}^e. \quad (8.12)$$

Ya está todo preparado para aplicar el teorema del trabajo virtual. Además de la temperatura $\theta = \mathbf{N} \boldsymbol{\theta}^e$ consideraremos una temperatura virtual $\bar{\theta} = \mathbf{N} \bar{\boldsymbol{\theta}}^e$ representable con las mismas funciones de forma. Por lo tanto, tenemos:

$$\int_{\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{\theta}}^e)^\top \mathbf{B}^\top \kappa \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}^e \, dv = \int_{\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{\theta}}^e)^\top \mathbf{N}^\top r \, dv - \int_{\partial\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{\theta}}^e)^\top \mathbf{N}^\top (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, da \quad \forall \bar{\boldsymbol{\theta}}^e \in \mathbb{R}^3.$$

Para que la igualdad se cumpla para todo $\bar{\boldsymbol{\theta}}^e$ deberá cumplirse:

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}^\top \kappa \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}^e \, dv = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^\top r \, dv - \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^\top (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, da.$$

y definiendo:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^\top \kappa \mathbf{B} \, dv, \quad \mathbf{F}_r^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^\top r \, dv, \quad \mathbf{F}_q^e = - \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^\top (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, da,$$

tenemos la ecuación del elemento finito:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}_r^e + \mathbf{F}_q^e,$$

donde \mathbf{K}^e es la matriz de rigidez del elemento, \mathbf{F}_r^e el vector de cargas nodales correspondientes a la tasa de generación de calor y \mathbf{F}_q^e el vector de cargas nodales correspondientes al flujo normal por la superficie. Note que la integral en la superficie $\partial\Omega^e$ precisa ser realizada solamente en la superficie $\partial\Omega^e \cap \partial\mathcal{B}_q$ donde conocemos el flujo normal \hat{q} de la condición de contorno. En las superficies interiores a \mathcal{B} la integral se cancela con la integral del elemento adyacente, mientras que en la superficie $\partial\mathcal{B}_\theta$ aparecerán valores incógnitas pero que estarán sobre filas de la matriz de rigidez que no formarán parte del sistema reducido.

Veamos un resumen de todos estos cálculos para el caso del triángulo isoparamétrico lineal. El procedimiento para calcular las matrices de rigidez y los vectores de cargas nodales de los elementos es el siguiente:

Ejemplo 8.10 Los cálculos correspondientes al triángulo isoparamétrico lineal son los siguientes:

- Datos: posiciones de los nodos, funciones de forma, propiedades materiales y cargas externas r y \hat{q} :

$$x_1^e, x_2^e, x_3^e, \quad y_1^e, y_2^e, y_3^e, \quad N_1(\eta, \xi), N_2(\eta, \xi), N_3(\eta, \xi), \quad \kappa, r, \hat{q}.$$

- Matriz de las funciones de interpolación y sus derivadas respecto de η y ξ :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_1 & N_2 & N_3 \end{pmatrix}, \quad \partial_{\eta\xi}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \partial_\eta N_1 & \partial_\eta N_2 & \partial_\eta N_3 \\ \partial_\xi N_1 & \partial_\xi N_2 & \partial_\xi N_3 \end{pmatrix}.$$

- Matriz Jacobiana, su inversa y el determinante Jacobiano:

$$\mathbf{J} = \partial_{\eta\xi}\mathbf{N} \begin{pmatrix} x_1^e & y_1^e \\ x_2^e & y_2^e \\ x_3^e & y_3^e \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}^{-1} = \text{inv}(\mathbf{J}), \quad J_0 = |\det(\mathbf{J})|.$$

- Matriz de derivadas y matriz \mathbf{B} :

$$\partial_{xy}\mathbf{N} = \mathbf{J}^{-1} \partial_{\eta\xi}\mathbf{N}, \quad \mathbf{B} = \partial_{xy}\bar{\mathbf{N}}.$$

- Integrales en los elementos:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^0} J_0 \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dv, \quad \mathbf{F}_r^e = \int_{\Omega^0} J_0 \mathbf{N}^T r \, dv, \quad \mathbf{F}_q^e = - \int_{\partial\Omega^e \cap \partial\mathcal{B}_q} \mathbf{N}^T \hat{q} \, da.$$

8.6.3. Montaje de la ecuación global

Considere el ejemplo de la Figura 8.6. La Figura 8.6.a muestra el modelo matemático del problema a resolver, y la Figura 8.6.b muestra la representación usual del modelo numérico de elementos finitos utilizado para obtener la solución aproximada del problema. Note que en la Figura 8.6.b las cargas externas aplicadas han sido sustituidas por los valores nodales equivalentes y las condiciones de contorno continuas originales han sido sustituidas por condiciones en los valores nodales.

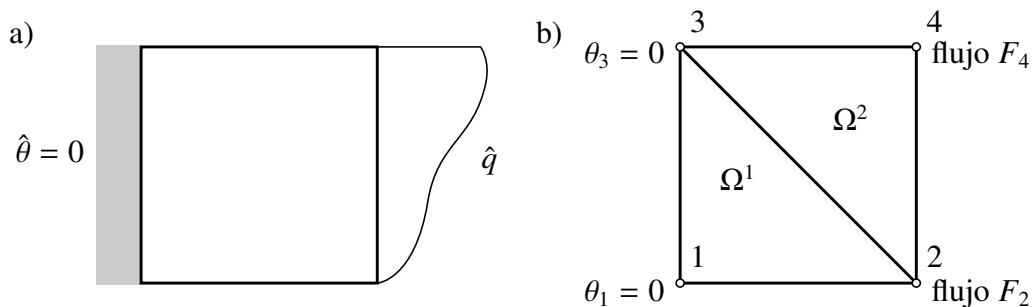


Figura 8.6: Problema estacionario plano de conducción de calor, a) geometría y condiciones de contorno, b) modelo de elementos finitos.

Para el elemento Ω^1 la numeración local de los nodos coincide con la numeración global, es decir, los nodos 1, 2 y 3 del elemento de referencia son los nodos 1, 2 y 3 de la numeración global. Por lo tanto, la ecuación del primer elemento es:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \end{pmatrix},$$

donde la numeración de líneas y columnas de la matriz de rigidez del elemento corresponde a la numeración adoptada de los grados de libertad mostrada en la Figura 8.6, la cual indica la posición en la matriz global en que será sumado cada componente de la matriz. El vector de cargas nodales de la ecuación anterior representa la suma de todas las cargas nodales equivalentes correspondientes al elemento, y por lo tanto están consideradas las cargas externas de superficie y las internas del contacto con el elemento Ω^2 . Para el segundo elemento los nodos 1, 2 y 3 del elemento de referencia son los nodos 2, 4 y 3 de la numeración global. Por lo tanto, la ecuación del segundo elemento es:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 2 & 4 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} K_{11}^2 & K_{12}^2 & K_{13}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 & K_{23}^2 \\ K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_4 \\ \theta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_2^2 \\ F_4^2 \\ F_3^2 \end{pmatrix},$$

donde en este caso el vector de cargas nodales considera las cargas externas de superficie y las internas del contacto con el elemento Ω^1 .

Ensamblando las ecuaciones de los dos elementos de la estructura obtenemos el sistema siguiente:

$$\begin{matrix} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{23}^1 + K_{13}^2 & K_{12}^2 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 + K_{31}^2 & K_{33}^1 + K_{33}^2 & K_{32}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{23}^2 & K_{22}^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} R_1 \\ F_2 \\ R_3 \\ F_4 \end{pmatrix}, \end{matrix}$$

donde las cargas nodales R_1 y R_3 son incógnitas, mientras que las cargas nodales F_2 y F_4 corresponden al flujo normal \hat{q} aplicado y por lo tanto son conocidas. Las filas 1 y 3 del sistema contienen cargas incógnitas, y por lo tanto no son tenidas en cuenta en una primera instancia. Estas filas servirán posteriormente para calcular las cargas nodales R_1 y R_3 . Teniendo en cuenta que los valores nodales θ_1 y θ_3 son cero, las filas y columnas 2 y 4 del sistema anterior determinan el sistema lineal que es el resuelto por el método de elementos finitos:

$$\begin{matrix} & 2 & 4 \\ \begin{matrix} 2 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \theta_2 \\ \theta_4 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} F_2 \\ F_4 \end{pmatrix}.$$

Una vez que se ha resuelto el sistema anterior, se han calculado todas las componentes inicialmente desconocidas del vector global de temperaturas nodales. El programa de elementos finitos puede ahora pasar a calcular en cada elemento los campos de temperaturas, así como su gradiente y el vector flujo de calor utilizando las expresiones (8.10)–(8.12).

8.6.4. Integración numérica

Al igual que en el caso unidimensional, en general no es posible o no es eficiente realizar una integración analítica para calcular las matrices de los elementos y los vectores de cargas nodales. El procedimiento usual empleado es el de obtener las integrales utilizando métodos numéricos. En el caso de los elementos cuadriláteros se puede utilizar la cuadratura de Gauss-Legendre empleada ya en el caso unidimensional. Considere una integral en el dominio $\Omega^0 = [-1, 1] \times [-1, 1]$ de una cierta función f . Por el teorema de Fubini tenemos:

$$I = \int_{\Omega^0} f(\eta, \xi) da = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\eta, \xi) d\eta d\xi.$$

Por lo tanto podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$I \approx \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^q w_i f(\eta_i, \xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^p w_i w_j f(\eta_i, \xi_j),$$

donde los valores η_i y ξ_j son exactamente los mismos puntos de Gauss-Legendre utilizados en el caso unidimensional, y los valores w_i y w_j son los mismos pesos de integración.

Para el caso de los elementos triangulares se podría utilizar la misma cuadratura de Gauss-Legendre, aunque en general se prefiere utilizar una regla de cuadratura específica para triángulos, que en el dominio $\Omega^0 = \{(\eta, \xi) : \eta \geq 0, \xi \geq 0, \eta + \xi \leq 1\}$ es descrita por la fórmula:

$$I = \int_{\Omega^0} f(\eta, \xi) d\eta d\xi \approx \sum_{i=1}^q w_i f(\eta_i, \xi_i),$$

donde los puntos y pesos de integración son dados en el Cuadro 8.1.

Cuadro 8.1: Puntos y pesos de integración para triángulos.

q	η_i	ξ_i	w_i	grado
1	0,3333 3333 3333 3333	0,3333 3333 3333 3333	0,5000 0000 0000 0000	1
3	0,5000 0000 0000 0000 0,0000 0000 0000 0000 0,5000 0000 0000 0000	0,5000 0000 0000 0000 0,5000 0000 0000 0000 0,0000 0000 0000 0000	0,1666 6666 6666 6667 0,1666 6666 6666 6667 0,1666 6666 6666 6667	2
4	0,3333 3333 3333 3333 0,6000 0000 0000 0000 0,2000 0000 0000 0000 0,2000 0000 0000 0000	0,3333 3333 3333 3333 0,2000 0000 0000 0000 0,6000 0000 0000 0000 0,2000 0000 0000 0000	-0,2812 5000 0000 0000 0,2604 1666 6666 6667 0,2604 1666 6666 6667 0,2604 1666 6666 6667	3
6	0,8168 4757 2980 4585 0,0915 7621 3509 7707 0,0915 7621 3509 7707 0,1081 0301 8168 0702 0,4459 4849 0915 9649 0,4459 4849 0915 9649	0,0915 7621 3509 7707 0,8168 4757 2980 4585 0,0915 7621 3509 7707 0,4459 4849 0915 9649 0,1081 0301 8168 0702 0,4459 4849 0915 9649	0,0549 7587 1827 6609 0,0549 7587 1827 6609 0,0549 7587 1827 6609 0,1116 9079 4839 0057 0,1116 9079 4839 0057 0,1116 9079 4839 0057	4

Ejercicio 8.11 Para el caso del elemento lineal calcule exactamente \mathbf{K}^e y \mathbf{F}_r^e para los casos en que r es constante o lineal. Para un elemento de geometría dada, compare esos resultados con los que se obtienen utilizando la cuadratura de Gauss con uno y tres puntos.

8.6.5. Condiciones de convergencia

En esta sección veremos las condiciones que permiten garantizar que la solución θ del método de elementos finitos converge a la solución exacta del problema θ^* cuando reducimos el tamaño de elemento o aumentamos el grado de las funciones de forma del elemento.

Llamaremos m al orden más alto de las derivadas que aparecen en la definición del funcional bilineal a . En el caso del problema de conducción de calor tenemos $m = 1$, pero en otros problemas m puede ser mayor de 1, como por ejemplo en el caso de la viga de Euler-Bernoulli donde se tiene $m = 2$.

Condiciones suficientes de convergencia

Las condiciones suficientes para garantizar convergencia a la solución exacta del problema son las siguientes:

- C1. **Regularidad en los elementos:** pediremos que la representación de la temperatura cumpla $\theta \in C^m(\overline{\Omega^e}, \mathbb{R})$ para todo elemento Ω^e . Esta condición se puede expresar en términos de las funciones de forma: $N_i \in C^m(\overline{\Omega^e}, \mathbb{R})$.
- C2. **Regularidad en todo el cuerpo:** pediremos que la representación de la temperatura cumpla $\mathbf{u} \in C^{m-1}(\overline{\mathcal{B}}, \mathbb{R})$. Esta condición se satisface si podemos garantizar regularidad suficiente en las superficies que unen los elementos, puesto que en los elementos mismos la condición C1 es más exigente.
- C3. **Completitud:** las funciones de forma del elemento Ω^e deben permitir representar polinomios completos de grado m en el elemento Ω^e . Vale la pena señalar que estamos hablando de Ω^e y no Ω^0 , es decir, las funciones de forma del caso plano deben permitir representar polinomios completos de grado m en las variables x y y .

La discretización que satisface las condiciones C1 y C2 se llama *conforme* o *compatible*. En el caso del problema de conducción de calor necesitaremos $\theta \in C^0(\overline{\mathcal{B}}, \mathbb{R})$ y a los elementos que nos permitan establecer una aproximación con este grado de regularidad les llamaremos elementos de tipo C^0 . Los casos típicos donde no se satisface la condición C1 es cuando tenemos elementos distorsionados como los mostrados en la Figura 8.7. Como regla general, no debemos permitir que en los elementos se formen ángulos entrantes, ni cometer el error de alterar el orden de los nodos. Una discretización que no satisface la condición C2 es por ejemplo la mostrada en la Figura 8.8, donde vemos que el problema es causado por la utilización de elementos de diferente tipo.

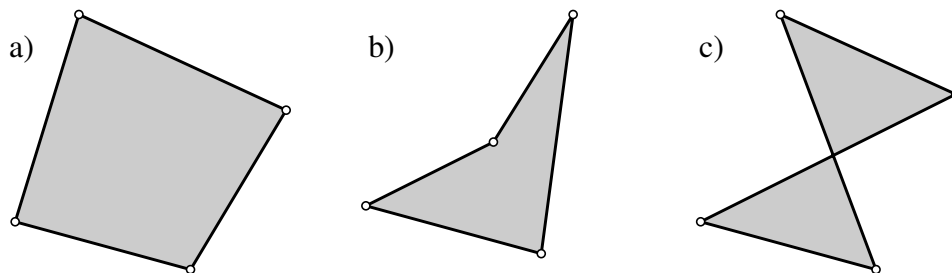


Figura 8.7: Elementos cuadriláteros, a) configuración deseable, b) elemento que no satisface la condición C1, c) elemento que no satisface las condiciones C1 y C2.

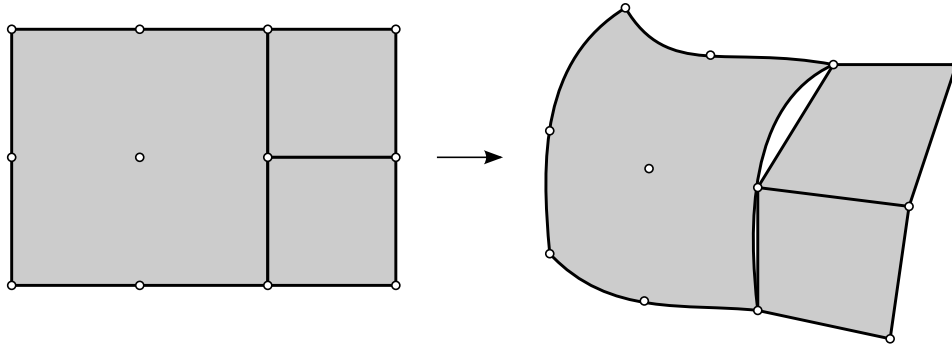


Figura 8.8: Discretización que no satisface la condición C2.

La condición C3 en el caso de la elasticidad lineal es automáticamente satisfecha por los elementos isoparamétricos, puesto que $m = 1$ y los elementos isoparamétricos pueden representar exactamente cualquier función lineal en las variables x y y . Otra forma equivalente de establecer esta condición es exigir que siempre que tomemos valores nodales correspondientes con una función lineal, la interpolación de elementos finitos proporcione esa misma función lineal en el interior del elemento.

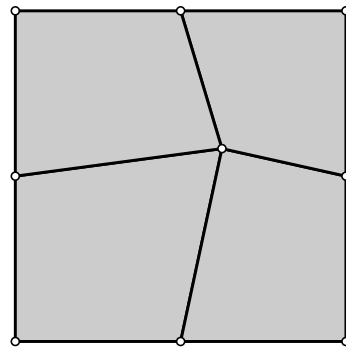
En el caso del problema de conducción de calor, la condición C3 exige que se puedan representar exactamente temperaturas que tengan un gradiente constante. Por esta razón, a la condición C3 en el caso de este problema se le suele llamar *condición de gradiente constante*.

Condiciones necesarias y suficientes: Patch test

De las condiciones suficientes que vimos en la sección anterior, la condición C1 por lo general se cumple a menos que tengamos elementos muy distorsionados como los mostrados en la Figura 8.7. Por lo tanto esta condición es satisfecha si contamos con un buen programa de generación de la malla que revisa la geometría de los elementos generados.

Las condiciones C2 y C3 son más difíciles de verificar. El *Patch test* surge como un método experimental para verificar la condición C3, pero posteriormente vino a ser aceptado como una condición menos rigurosa que las condiciones C2 y C3 y que es a la vez necesaria y suficiente para garantizar la convergencia.

La idea del Patch test es la siguiente: a un arreglo irregular de elementos (*patch* en inglés) como el mostrado en la Figura 8.9, se le impone las tres condiciones de contorno dadas en la misma figura. Si se cumple: 1) el resultado de la temperatura en los nodos interiores (solamente en los nodos interiores, y no en puntos interiores al elemento) se corresponde exactamente con la función constante o lineal impuesta en los nodos del contorno, y 2) el gradiente de la temperatura es exacto de acuerdo con la función constante o lineal impuesta en los nodos del contorno, decimos que el elemento aprueba el Patch test. La utilización de un arreglo irregular es necesaria puesto que algunos elementos que no aprueban el Patch test lo aprobarían si se utilizara un arreglo regular.



Caso	θ
1	1
2	x
3	y

Figura 8.9: Arreglo de elementos y casos considerados en el Patch test.

Error del método de elementos finitos

Es natural pensar que utilizando elementos de mayor grado podremos obtener soluciones más exactas que utilizando elementos de menor grado. Por ejemplo, los elementos cuadráticos pueden representar exactamente polinomios de grado 2, pero no de grado 3, mientras que los elementos cúbicos pueden representar exactamente los polinomios de grado 2 y 3. Aún si las componentes de la temperatura θ de la solución exacta del problema no fueran polinómicas, intuitivamente podemos pensar que utilizando elementos de mayor grado la solución del método de elementos finitos tendrá un error menor. Por otra parte, es natural pensar que si reducimos el tamaño de los elementos entonces la solución podrá aproximarse todavía más a la solución exacta del problema.

Llamaremos $H^r(\mathcal{B}, \mathbb{R})$ al espacio de las funciones definidas en el cuerpo \mathcal{B} y con valores en \mathbb{R} que son cuadrado integrables y con derivadas cuadrado integrables hasta el orden r . La norma usual definida en este espacio de funciones es denominada $\|\cdot\|_r$ y no nos interesará en este curso su definición precisa. El teorema siguiente que establecemos sin demostración es de extrema importancia para el análisis de convergencia del método de elementos finitos:

Teorema 8.12 (Estimación de Aubin-Nitsche del error del método de elementos finitos) Sea θ^* la solución exacta del problema de conducción de calor. Sea θ la solución de Rayleigh-Ritz hallada utilizando el método de elementos finitos, y sea su error $\bar{e} = \theta^* - \theta$. Sea h el tamaño máximo de todos los elementos de la malla utilizada, m el orden más alto de las derivadas que aparecen en el funcional bilineal a , y k el mayor grado del polinomio completo que pueden representar exactamente las funciones de forma de los elementos. Supongamos que la solución exacta $\theta^* \in H^{k+1}(\mathcal{B}, \mathbb{R})$. Entonces existe una constante real $c > 0$, independiente de θ^* y de h tal que:

$$\|\bar{e}\|_s \leq c h^\beta \|\theta^*\|_{k+1}.$$

donde s es cualquier número natural tal que $0 \leq s \leq k$, β es el número dado por $\beta = \min\{k + 1 - s, 2(k + 1 - m)\}$, y $\|\cdot\|_s$ es la norma del espacio H^s .

el triángulo de Pascal. Luego deberemos hallar las funciones de forma que determinaremos de forma única a partir de las condiciones que satisfacen en los nodos del elemento. Con esas condiciones, cada función de forma la determinaremos resolviendo un sistema lineal de tamaño igual al número de monomios del polinomio.

Ejercicio 8.13 Determine las funciones de forma para el triángulo isoparamétrico lineal y el triángulo isoparamétrico cuadrático. Muestre que la suma de las funciones de forma en estos casos es 1. Muestre que la suma de las funciones de forma para el triángulo isoparamétrico de grado k es 1.

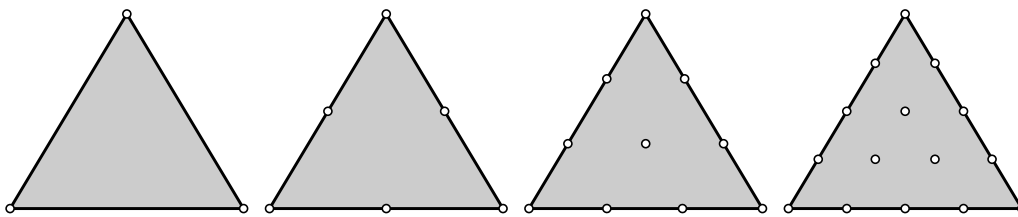


Figura 8.11: Elementos triangulares.

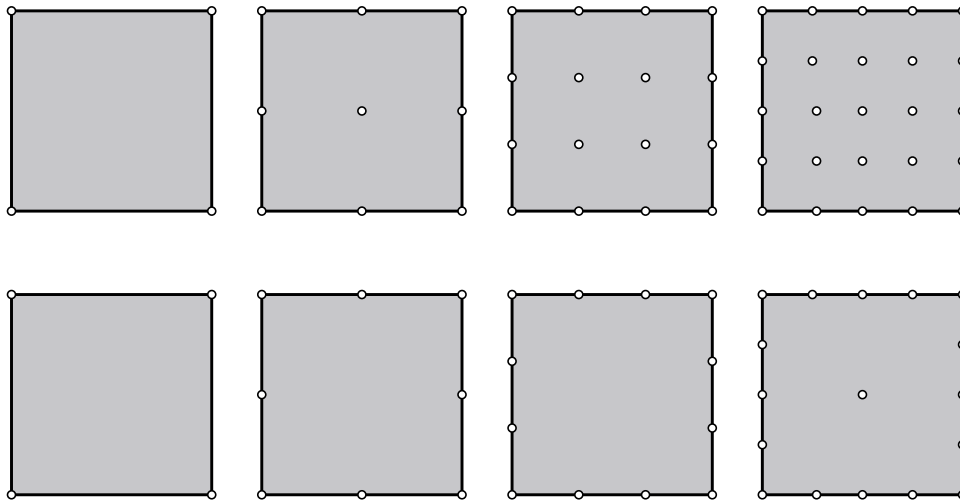


Figura 8.12: Elementos cuadriláteros de Lagrange y de Serendip.

Para el caso de los elementos cuadriláteros existen dos métodos clásicos para obtener las funciones de forma:

- **Elementos de Lagrange:** En el caso de los elementos cuadriláteros es relativamente simple obtener funciones de forma para diferente grado de los polinomios utilizados. Basta utilizar el producto de los polinomios de Lagrange definidos en función de η y ξ . Por ejemplo, las funciones de forma para la *cadrilátero isoparamétrico bilineal* son dadas por:

$$N_{k_{ij}}(\eta, \xi) = \ell_i^1(\eta)\ell_j^1(\xi), \quad k_{ij} = 2(i-1) + j,$$

mientras que las funciones de forma del *cuadrilátero isoparamétrico bicuadrático* son dadas por:

$$N_{k_{ij}}(\eta, \xi) = \ell_i^2(\eta)\ell_j^2(\xi), \quad k_{ij} = 3(i-1) + j.$$

La gran desventaja de los elementos de Lagrange es que el polinomio completo que representan es de un grado mucho menor al número de nodos del elemento.

- Elementos de Serendip:** Otra familia muy importante de elementos es la de los elementos de Serendip. Estos elementos se obtienen primero definiendo nodos sobre los lados, de forma tal que sobre el lado puedan representarse funciones del grado que se desea. Luego se adiciona la mínima cantidad posible de nodos en el interior del elemento para que pueda representarse un polinomio completo del grado deseado. Las funciones de forma deben sumar uno y ser tales que el polinomio que representen sea simétrico en las variables η y ξ . Los elementos de Serendip son en general reconocidos como más eficientes que los elementos de Lagrange debido a que pueden representar un polinomio completo del mismo grado usando menos nodos, vea las Figuras 8.13 y 8.14. Por esta razón los elementos de Serendip son muy populares en las implementaciones académicas y comerciales del método de elementos finitos. Sin embargo, la obtención de las funciones de forma de los elementos de Serendip es bastante más complicada que en el caso de los elementos de Lagrange. En realidad no hay un procedimiento estándar para hallar las funciones de forma de estos elementos, y su nombre *Serendip* (antiguo nombre de la isla de Sri Lanka) proviene del hecho de que es necesario tener suerte e ingenio para hallarlas en un número reducido de tentativas.

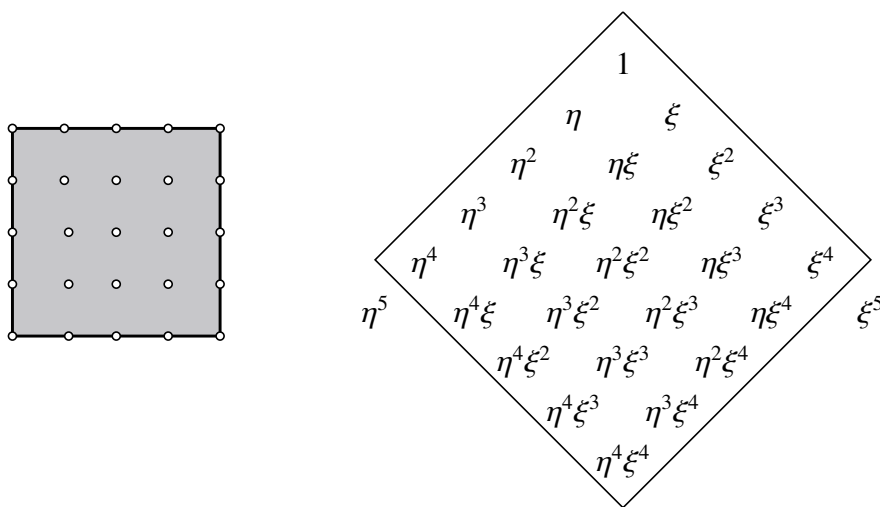


Figura 8.13: Monomios de los elementos cuárticos de Lagrange.

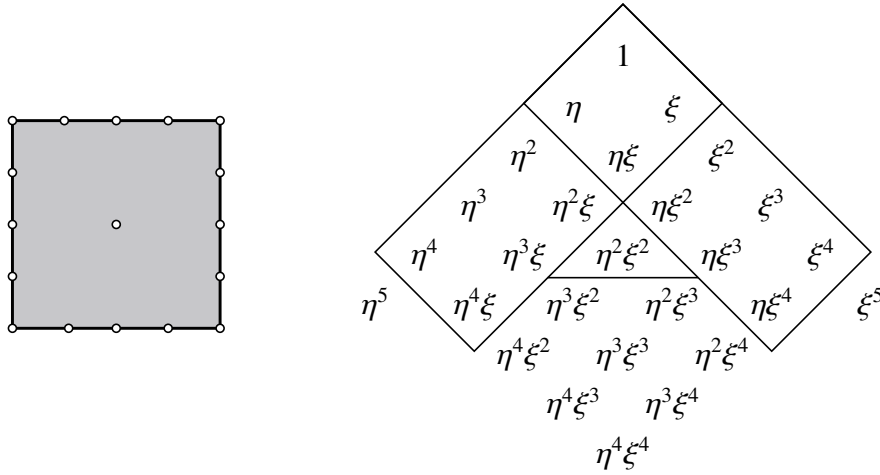


Figura 8.14: Monomios de los elementos cuánticos de Serendip.

Ejercicio 8.14 Muestre que la suma de las funciones de forma del cuadrilátero isoparamétrico de Lagrange de grado k es 1.

8.7. Problema dinámico de conducción de calor

En el caso dinámico deberemos considerar la ecuación puntual de balance de energía térmica en lugar de la ecuación puntual de equilibrio térmico. La ecuación constitutiva $\partial_t e = c \partial_t \theta$ la utilizaremos desde un principio para eliminar de la formulación la energía específica e . Con eso obtenemos el problema siguiente, donde las incógnitas son:

$$\begin{aligned} \theta : \overline{\mathcal{B}} \times [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} && \text{con } \theta \in C^0(\overline{\mathcal{B}} \times [0, \infty), \mathbb{R}), \text{ y } \theta \in C^2(\mathcal{B} \times (0, \infty), \mathbb{R}), \\ \mathbf{g} : \overline{\mathcal{B}} \times [0, \infty) &\rightarrow \mathcal{V}^3 && \text{con } \mathbf{g} \in C^0(\overline{\mathcal{B}} \times [0, \infty), \mathcal{V}^3), \text{ y } \mathbf{g} \in C^1(\mathcal{B} \times (0, \infty), \mathcal{V}^3), \\ \mathbf{q} : \overline{\mathcal{B}} \times [0, \infty) &\rightarrow \mathcal{V}^3 && \text{con } \mathbf{q} \in C^0(\overline{\mathcal{B}} \times [0, \infty), \mathcal{V}^3), \text{ y } \mathbf{q} \in C^1(\mathcal{B} \times (0, \infty), \mathcal{V}^3), \end{aligned}$$

mientras que las ecuaciones a satisfacer son también tres ecuaciones de campo, dos condiciones de contorno, y una condición inicial:

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\rho c \partial_t \theta - \nabla \cdot \mathbf{q} + r = 0 & \text{en } \mathcal{B} \times (0, \infty) & \text{(ec. de bal. de energía térmica),} \\ \mathbf{g} = \nabla \theta & \text{en } \mathcal{B} \times (0, \infty) & \text{(relación temperatura-gradiente),} \\ \mathbf{q} = -\kappa \mathbf{g} & \text{en } \mathcal{B} \times (0, \infty) & \text{(ecuación constitutiva),} \\ \theta = \hat{\theta} & \text{en } \partial \mathcal{B}_\theta \times (0, \infty) & \text{(cond. de cont. en la temperatura),} \\ \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \hat{q} & \text{en } \partial \mathcal{B}_q \times (0, \infty) & \text{(cond. de cont. en el flujo normal),} \\ \theta(x, 0) = \hat{\theta}_0 & x \in \mathcal{B} & \text{(condición inicial).} \end{array} \right.$$

Los datos del problema son el dominio \mathcal{B} , sus superficies $\partial \mathcal{B}_\theta$ y $\partial \mathcal{B}_q$, las propiedades materiales $\kappa \in C^1(\overline{\mathcal{B}}, \mathbb{R})$, $\rho \in C^1(\overline{\mathcal{B}}, \mathbb{R})$ y $c \in C^1(\overline{\mathcal{B}}, \mathbb{R})$ que pueden ser variables si el cuerpo no es compuesto por un solo material homogéneo, la tasa de generación de calor $r \in C^0(\overline{\mathcal{B}} \times [0, \infty), \mathbb{R})$, las funciones $\hat{\theta} \in C^0(\partial \mathcal{B}_\theta \times [0, \infty), \mathbb{R})$,

$\hat{q} \in C^0(\overline{\partial\mathcal{B}_q} \times [0, \infty), \mathbb{R})$ de las condiciones de contorno, y la temperatura inicial $\hat{\theta}_0 \in C^0(\overline{\partial\mathcal{B}} \times [0, \infty), \mathbb{R})$. Note que en este problema solamente se tiene una única condición inicial, en lugar de las dos que se tenían en el problema dinámico de elasticidad lineal.

8.8. Formulación variacional del problema dinámico

Al igual que el problema dinámico de elasticidad lineal, aquí podemos definir una “tasa de generación de calor” por la fórmula $r^* = r - \rho c \partial_t \theta$, con lo cual la ecuación puntual de balance de energía térmica queda similar a la ecuación puntual de equilibrio térmico, es decir $\nabla \cdot \mathbf{q} + r^* = 0$. Con eso, las mismas manipulaciones matemáticas realizadas en el caso del equilibrio nos proporcionan la siguiente ecuación, válida para cualquier temperatura virtual:

$$\int_{\mathcal{B}} \kappa \nabla \theta \cdot \nabla \bar{\theta} \, dv = \int_{\mathcal{B}} r^* \bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_q} \hat{q} \bar{\theta} \, da.$$

La formulación variacional del problema dinámico de conducción de calor se obtiene considerando sustituyendo r^* en la ecuación anterior. Para el problema de la Figura 8.2 se definen los conjuntos:

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= \{\theta : \overline{\mathcal{B}} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : \theta = \hat{\theta} \text{ en } \partial\mathcal{B}_\theta \times (0, \infty)\}, \\ \bar{\mathcal{U}} &= \{\bar{\theta} : \overline{\mathcal{B}} \rightarrow \mathbb{R} \text{ admisible} : \bar{\theta} = 0 \text{ en } \partial\mathcal{B}_\theta\}. \end{aligned}$$

Con eso, la formulación variacional temperaturas del problema estacionario de conducción de calor consiste en hallar la temperatura $\theta \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$\begin{cases} \int_{\mathcal{B}} \rho c \partial_t \theta \bar{\theta} \, dv + \int_{\mathcal{B}} \kappa \nabla \theta \cdot \nabla \bar{\theta} \, dv = \int_{\mathcal{B}} r \bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\mathcal{B}_q} \hat{q} \bar{\theta} \, da & \forall \bar{\theta} \in \bar{\mathcal{U}}, \forall t \in (0, \infty), \\ \theta(\mathbf{X}, 0) = \hat{\theta}_0(\mathbf{X}) \text{ para } \mathbf{X} \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Nuevamente, una versión integral de la condición inicial podría ser considerada en la formulación variacional en lugar de la versión clásica, como es descrito por ejemplo en el libro de Hughes [7]. El planteo del problema se simplifica introduciendo el siguiente funcional:

$$c(v, \bar{\theta}) = \int_{\mathcal{B}} \rho c v \bar{\theta} \, dv. \quad (8.13)$$

Con esa notación adicional, la solución de la formulación variacional del problema dinámico de conducción de calor es la temperatura $\theta \in \mathcal{U}$ que cumple:

$$\begin{cases} c(\partial_t \theta, \bar{\theta}) + a(\theta, \bar{\theta}) = \ell(\bar{\theta}) & \forall \bar{\theta} \in \bar{\mathcal{U}}, \forall t \in (0, \infty), \\ \theta(\mathbf{X}, 0) = \hat{\theta}_0(\mathbf{X}) \text{ para } \mathbf{X} \in \mathcal{B}. \end{cases} \quad (8.14)$$

Note que las diferencias con respecto al problema dinámico de elasticidad lineal: la temperatura aparece derivada una vez respecto del tiempo, mientras que el desplazamiento aparece derivado dos veces. Por esa razón en este caso aparece una sola condición inicial.

8.9. Elementos finitos: método de semidiscretización

Tal como en el problema dinámico visto en el Capítulo 6, aquí aplicaremos el método de semidiscretización, es decir, discretizaremos el dominio espacial, mientras que dejamos el tiempo continuo.

8.9.1. Ecuación del elemento finito

Como siempre, la ecuación del elemento finito se obtiene aplicando la formulación variacional al dominio del elemento. En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \rho c \partial_t \bar{\theta} \bar{\theta} \, dv + \int_{\Omega^e} \kappa \nabla \theta \cdot \nabla \bar{\theta} \, dv \\ = \int_{\Omega^e} r \bar{\theta} \, dv - \int_{\partial\Omega^e} (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \bar{\theta} \, da, \quad \forall \bar{\theta} \in \bar{\mathcal{U}}_e, \forall t \in (0, \infty), \end{aligned}$$

donde los espacios \mathcal{U}_e y $\bar{\mathcal{U}}_e$ del elemento son:

$$\mathcal{U}_e = \left\{ \sum_{i=1}^3 \theta_i^e N_i : \theta_i^e : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \right\}, \quad \bar{\mathcal{U}}_e = \left\{ \sum_{i=1}^3 \bar{\theta}_i^e N_i : \bar{\theta}_i^e \in \mathbb{R} \right\},$$

donde N_1 y N_2 y N_3 son las funciones de interpolación del elemento. Procediendo como en la Sección 8.6.2, la ecuación anterior queda en la forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{\theta}}^e)^\top \mathbf{N}^\top \rho c \mathbf{N} \partial_t \boldsymbol{\theta}^e \, dv + \int_{\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{\theta}}^e)^\top \mathbf{B}^\top \kappa \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}^e \, dv \\ = \int_{\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{\theta}}^e)^\top \mathbf{N}^\top r \, dv - \int_{\partial\Omega^e} (\bar{\boldsymbol{\theta}}^e)^\top \mathbf{N}^\top (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, da \quad \forall \bar{\boldsymbol{\theta}}^e \in \mathbb{R}^3, \forall t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

Para que la igualdad se cumpla para todo $\bar{\mathbf{U}}^e$, deberá cumplirse:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^\top \rho c \mathbf{N} \partial_t \boldsymbol{\theta}^e \, dv + \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^\top \kappa \mathbf{B} \boldsymbol{\theta}^e \, dv \\ = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^\top r \, dv - \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^\top (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, da \quad \forall t \in (0, \infty). \end{aligned}$$

y definiendo:

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^\top \rho c \mathbf{N} \, dv & \mathbf{K}^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^\top \kappa \mathbf{B} \, dv, \\ \mathbf{F}_r^e &= \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^\top r \, dv, & \mathbf{F}_q^e &= - \int_{\partial\Omega^e} \mathbf{N}^\top (\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}) \, da, \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación del elemento finito:

$$\mathbf{C}^e \partial_t \mathbf{U}^e + \mathbf{K}^e \mathbf{U}^e = \mathbf{F}_r^e + \mathbf{F}_q^e \quad \forall t \in (0, \infty),$$

donde \mathbf{C}^e es la *matriz de capacidad* del elemento. Note la similitud de la definición entre esta matriz y la matriz de masa en el problema dinámico de elasticidad lineal.

8.9.2. Montaje de la ecuación global

El procedimiento de montaje de la ecuación global no tiene mayores diferencias con el caso estacionario. Así como las matrices \mathbf{K}^e son ensambladas en la matriz de rigidez global, las matrices \mathbf{C}^e son ensambladas en la matriz de capacidad global del problema. El procedimiento de reducción del sistema que utiliza las condiciones de contorno en la temperatura no tiene tampoco mayores diferencias con el caso estacionario. Así, una vez concluidos estos procedimientos se tiene la siguiente ecuación diferencial ordinaria de primer orden con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} \mathbf{C}\partial_t\boldsymbol{\theta} + \mathbf{K}\boldsymbol{\theta} = \mathbf{F} & \forall t \in (0, \infty), \\ \boldsymbol{\theta}(0) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0. \end{cases}$$

En la condición inicial aparece el vector $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ que contiene los valores nodales de la temperatura inicial.

Ejercicio 8.15 Muestre que la matriz de capacidad \mathbf{C} del problema es simétrica definida positiva.

8.9.3. Resolución por el método trapezoidal generalizado

Veamos en esta sección cómo resolver la ecuación diferencial del problema obtenida aplicando el método de elementos finitos y la semidiscretización.

El método de Newmark es uno de los más populares para resolver este problema. Supongamos que dividimos el tiempo en intervalos de tamaño Δt . Sean entonces las siguientes notaciones: $t_n = n\Delta t$, $\mathbf{U}_n = \mathbf{U}(t_n)$, $\mathbf{V}_n = \partial_t \mathbf{U}(t_n)$, $\mathbf{A}_n = \partial_{tt}^2 \mathbf{U}(t_n)$. La aproximación obtenida por el método de Newmark para \mathbf{U}_n , \mathbf{V}_n y \mathbf{A}_n se basa en utilizar iterativamente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \mathbf{C}\mathbf{V}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1}, \\ \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t[(1 - \gamma)\mathbf{V}_n + \gamma\mathbf{V}_{n+1}]. \end{cases} \quad (8.15)$$

Note que la primera ecuación es exactamente la ecuación diferencial del problema en el tiempo t_n , mientras que la siguiente es una fórmula de diferencias finitas. El parámetro γ es importante pues determina la precisión y estabilidad del método de integración. Algunos métodos conocidos que contempla el método general son dados en el Cuadro 8.2.

Cuadro 8.2: Algunos métodos de la familia.

γ	Método
0	Forward Euler
1/2	Crank-Nicolson
1	Backward Euler

La idea del método trapezoidal generalizado es primero hallar \mathbf{V}_0 resolviendo la ecuación $\mathbf{C}\mathbf{V}_0 = \mathbf{F}_0 - \mathbf{K}\mathbf{U}_0$, lo cual implica resolver un sistema lineal con la matriz \mathbf{C} . Con eso y utilizando la condición inicial tenemos la dupla inicial $(\mathbf{U}_0, \mathbf{V}_0)$. La iteración del método consiste utilizar el sistema (8.15) para obtener la dupla correspondiente al tiempo t_{n+1} , es decir $(\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1})$, teniendo como datos las matrices y la dupla en el tiempo t_n , es decir $(\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n)$. Una de las formas de resolver el sistema consiste en hallar primero el *predictor*:

$$\tilde{\mathbf{U}}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t(1 - \gamma)\mathbf{V}_n.$$

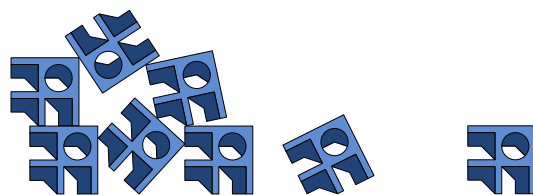
Luego se resuelve el sistema lineal siguiente para hallar \mathbf{V}_{n+1} :

$$(\mathbf{C} + \gamma\Delta t\mathbf{K})\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{U}}_{n+1}. \quad (8.16)$$

Finalmente hallamos \mathbf{U}_{n+1} utilizando las expresión siguiente:

$$\mathbf{U}_{n+1} = \tilde{\mathbf{U}}_{n+1} + \gamma\Delta t\mathbf{V}_{n+1}.$$

La decisión sobre qué valores γ y β utilizar es realmente difícil. La estabilidad incondicional del algoritmo se obtiene utilizando $\gamma \geq 1/2$. En teoría el valor $\gamma = 1/2$ proporciona la mayor precisión en la solución de la ecuación diferencial, y es un valor razonable a considerar si no se tuvieran problemas de estabilidad.



Bibliografía

- [1] M. Castellet, I. Llerena y C. Casacuberta. *Álgebra lineal y Geometría*. Editorial Reverté S.A., España, 2000. ISBN: 978-84-291-5009-4.
- [2] M. Cerminara y R. Markarian. *Geometría y Álgebra Lineal I (libro azul)*. Instituto de Matemáticas y Estadísticas “Prof. Rafael Laguardia”, Montevideo, 2000.
- [3] R. Markarian y Möller, N. *Geometría y Álgebra Lineal II (libro rojo)*. Instituto de Matemáticas y Estadísticas “Prof. Rafael Laguardia”, Montevideo, 2004.
- [4] M. Fiori. *Cálculo diferencial e integral en varias variables*. Instituto de Matemáticas y Estadísticas “Prof. Rafael Laguardia”, Montevideo, 2019.
- [5] A. González. *Cálculo vectorial*. Instituto de Matemáticas y Estadísticas “Prof. Rafael Laguardia”, Montevideo, 2018.
- [6] A. Fernández y D. Marta. *Apuntes de Mecánica Newtoniana*. Instituto de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de la República, Montevideo, 2010.
- [7] T. J. R. Hughes. *The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis*. Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1987, págs. xxviii+803. ISBN: 0-13-317025-X.
- [8] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Reprint of the 1987 edition. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2009, págs. ii+279. ISBN: 978-0-486-46900-3; 0-486-46900-X.
- [9] J. N. Reddy. *An introduction to the finite element method*. 2.^a ed. McGrawHill, Inc., NY, 1993, págs. xiv+684. ISBN: 0-07-051355-4.
- [10] K.-J. Bathe. *Finite element procedures*. Prentice-Hall, Upper Sadle River, NJ, 1996, págs. xiv+1037. ISBN: 0-13-301458-4.
- [11] E. Oñate. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 1. Basis and Solids*. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, 2009, págs. xxiv+472. ISBN: 978-1-4020-8732-5.
- [12] E. Oñate. *Structural Analysis with the Finite Element Method. Linear Statics. Volume 2. Beams, Plates and Shells*. International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), Barcelona, 2013, págs. xxx+864. ISBN: 978-1-4020-8742-4.