

Tipos de problemas de cálculo

Tipos de problemas de cálculo

Sistemas de N relaciones matemáticas independientes entre varias propiedades de las cuales M propiedades tienen valores desconocidos (incógnitas)

$N = M = 1$ relación simple

$N = M > 1$ sistema determinado

$N < M$ sistema indeterminado con $(N-M)$ grados de libertad

$N > M$ las relaciones no son independientes o el problema no tiene solución

En ocasiones, se conocen las relaciones para todos los rangos de valores y pueden ser expresadas por:

Ecuaciones algebraicas

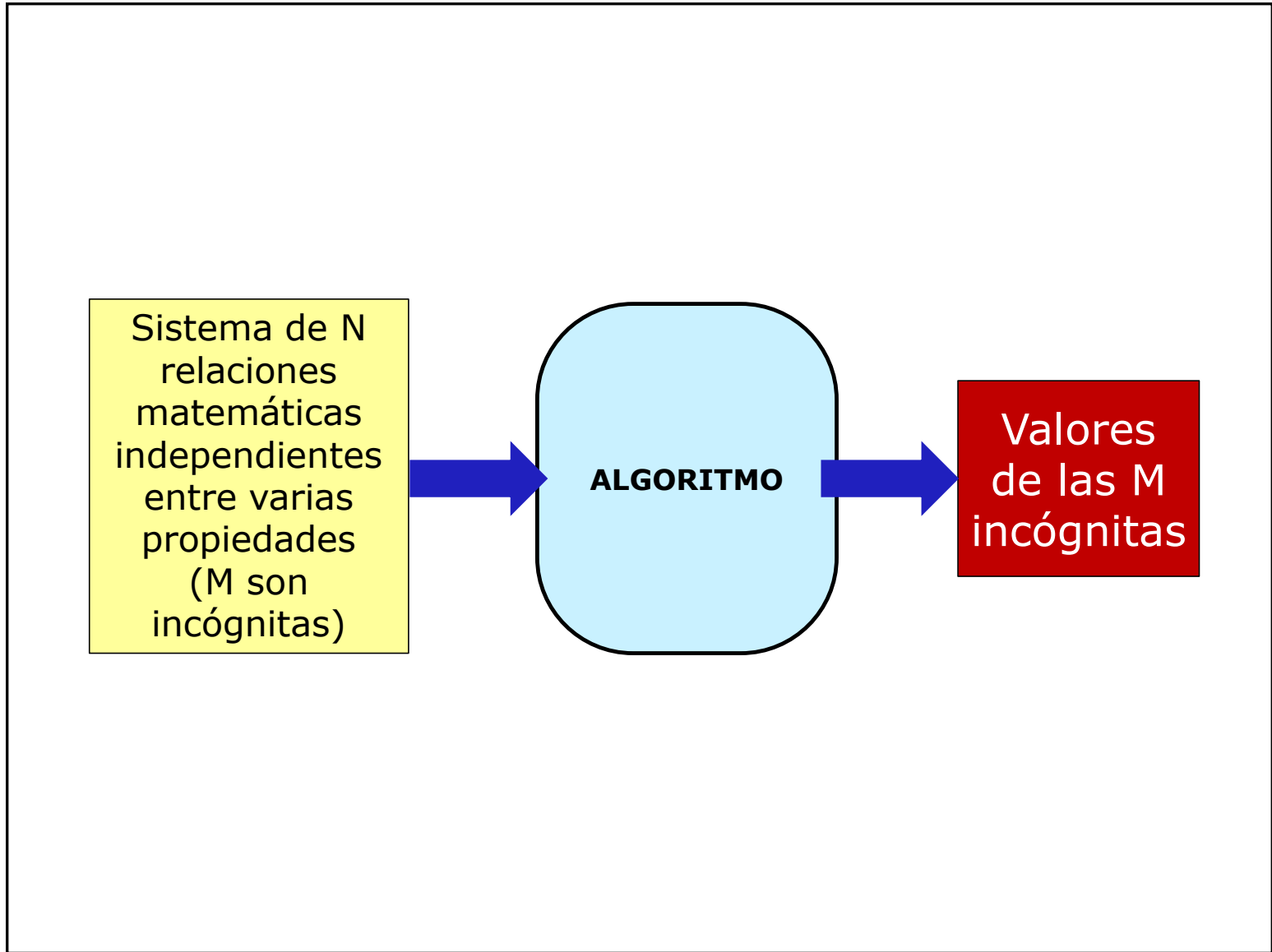
Inecuaciones algebraicas

Ecuaciones diferenciales

Ecuaciones integrales

Ninguno de los tipos anteriores

En otras ocasiones, sólo conocemos la relación para valores puntuales



Varios ejemplos

Una incógnita, una ecuación

- 1 A bajas presiones podemos asumir que el Amoníaco se comporta como gas ideal. ¿Cuál es el volumen que ocupan 10 moles de Amoníaco a 100 kPa y 300 K?

$$R = 8,314472 \text{ kPa l/(K mol)}$$

1 ecuación con 1 incógnita

Se puede "despejar" fácil

1 A bajas presiones podemos asumir que el Amoníaco se comporta como gas ideal. ¿Cuál es el volumen que ocupan 10 moles de Amoníaco a 100 kPa y 300 K?

$$R = 8,314472 \text{ kPa l}/(\text{K mol})$$

Asumimos ley de gas ideal, válida para todo el rango de valores de P, T, V

$$P V = n R T \quad \text{¿cómo debe interpretarse esta ecuación?}$$

¿Cómo podemos utilizar esta ecuación para obtener el valor del volumen buscado?

1) “Despejamos” V \longrightarrow $V = n R T / P$

2) Reemplazamos por los valores de n, R, T y P

$$V = (10 \text{ mol}) (8,314472 \text{ kPa l}/(\text{K mol})) (300 \text{ K}) / (100 \text{ kPa})$$

(No está demás verificar “consistencia dimensional”)

3) Hacemos cuentas $V = 249 \text{ l}$

¿”249” o “249,43416”? ¿250?

Varios ejemplos

Una incógnita, una ecuación

- 2 A elevadas presiones una mejor descripción de las propiedades del Amoníaco es la ecuación de Van der Waals. Calcule el volumen que ocuparían esos mismos 10 moles a 10 000 kPa y 300 K?

$$\left[P + a \left(\frac{n}{V} \right)^2 \right] \left(\frac{V}{n} - b \right) = RT$$

$$a = 422,5 \text{ kPa l}^2/\text{mol}^2$$

$$b = 0,0371 \text{ l/mol}$$

$$R = 8,314472 \text{ kPa l/(K mol)}$$

1 ecuación con 1 incógnita

No se puede "despejar" fácil

- 2 A elevadas presiones una mejor descripción de las propiedades del Amoníaco es la ecuación de Van der Waals. Calcule el volumen que ocuparían esos mismos 10 moles a 10 000 kPa y 300 K?

$$\left[P + a \left(\frac{n}{V} \right)^2 \right] \left(\frac{V}{n} - b \right) = RT$$

$$a = 422,5 \text{ kPa l}^2/\text{mol}^2$$

$$b = 0,03707 \text{ l/mol}$$

$$R = 8,314472 \text{ kPa l/(K mol)}$$

Asumimos ley de Van der Waals, válida para todo el rango de valores de P, T, V

¿Hacemos como en el ejemplo anterior? ¿Despejamos V?

$$\text{Reemplazando... } (10000 + 42250/V^2) (0,1V - 0,0371) = 2494,3416$$

(¡ verificar consistencia dimensional !)

$$\text{Operando.....} 1000 V - 371 + 4225/V - 1567,475/V^2 = 2494,3416$$

$$\text{Reordenando....} 1000 V + 42250/V - 1567,475/V^2 - 2865,3416 = 0$$

$$\text{Multiplicando todo por } V^2 \dots 1000 V^3 - 2865,3416 V^2 + 4225 V - 1567,475 = 0$$

$$\text{Dividiendo por } 1000 \dots \boxed{V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475 = 0}$$

Reemplazando datos y valores de parámetros, y operando, llegamos a:

$$V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475 = 0$$

¿y ahora?... Raíz de un polinomio de grado 3?

¿Podemos encontrar las raíces de este polinomio
“haciendo cuentas”?

J

Podrías darme las raíces del siguiente polinomio $x^3 - 2,8653416x^2 + 4,225x - 1,567475 = 0$ usando un método algebraico de resolución?



Por supuesto, puedo ayudarte a encontrar las raíces de ese polinomio utilizando el método algebraico. El polinomio que proporcionaste es:



$$x^3 - 2.8653416x^2 + 4.225x - 1.567475 = 0$$

Para resolver este polinomio, primero podemos intentar encontrar una raíz utilizando el método de las raíces racionales. Esto implica buscar raíces que sean divisores del término constante (en este caso, -1.567475) y probando si son raíces del polinomio.

Empezamos probando con divisores de -1.567475, por ejemplo, 1 y -1:

Para $x = 1$:

$$(1)^3 - 2.8653416(1)^2 + 4.225(1) - 1.567475 = 1 - 2.8653416 + 4.225 - 1.567475 \neq 0$$

Para $x = -1$:

$$(-1)^3 - 2.8653416(-1)^2 + 4.225(-1) - 1.567475 = -1 - 2.8653416 - 4.225 - 1.567475 \neq 0$$

Para resolver este polinomio, primero podemos intentar encontrar una raíz utilizando el método de las raíces racionales. Esto implica buscar raíces que sean divisores del término constante (en este caso, -1.567475) y probando si son raíces del polinomio.

Empezamos probando con divisores de -1.567475, por ejemplo, 1 y -1:

Para $x = 1$:

$$(1)^3 - 2.8653416(1)^2 + 4.225(1) - 1.567475 = 1 - 2.8653416 + 4.225 - 1.567475 \neq 0$$

Para $x = -1$:

$$(-1)^3 - 2.8653416(-1)^2 + 4.225(-1) - 1.567475 = -1 - 2.8653416 - 4.225 - 1.567475 \neq 0$$

Ninguno de estos valores es una raíz del polinomio. Esto significa que las raíces no son números enteros simples. Ahora, podemos intentar utilizar métodos numéricos más avanzados, como el

método de Newton-Raphson, para encontrar raíces aproximadas. Sin embargo, calcular las raíces precisas de este polinomio puede ser complicado y requeriría software especializado o calculadoras avanzadas.

Si tienes acceso a un software de matemáticas como Mathematica, MATLAB o una calculadora gráfica, puedes utilizar sus funciones para encontrar las raíces con precisión.

J

No conoces el método de Cardano?



Sí, estoy familiarizado con el método de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas. El método de Cardano se utiliza para encontrar soluciones a ecuaciones cúbicas de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, donde $a, b, c, y d$ son coeficientes reales.



En tu caso, el polinomio es $x^3 - 2.8653416x^2 + 4.225x - 1.567475 = 0$, por lo que $a = 1$, $b = -2.8653416$, $c = 4.225$, y $d = -1.567475$.

El método de Cardano implica varias transformaciones algebraicas y la introducción de una variable auxiliar para reducir la ecuación cúbica a una forma específica. Luego, se utilizan fórmulas específicas para encontrar las soluciones.

Sin embargo, el método de Cardano puede ser bastante complejo y, en la práctica, se utiliza más comúnmente software matemático o calculadoras para encontrar las raíces de ecuaciones cúbicas, ya que estas fórmulas pueden ser extensas y propensas a errores si se hacen a mano.

Si estás interesado en aplicar el método de Cardano a tu ecuación cúbica, puedo proporcionarte los pasos detallados para hacerlo, pero ten en cuenta que es un proceso largo y complicado. ¿Te gustaría que continúe y te proporcione los pasos?

J

Sí, por favor, estoy interesado.

J

No conoces el método de Cardano?



Sí, estoy familiarizado con el método de Cardano para resolver ecuaciones cúbicas. El método de Cardano se utiliza para encontrar soluciones a ecuaciones cúbicas de la forma $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, donde $a, b, c, y d$ son coeficientes reales.



En tu caso, el polinomio es $x^3 - 2.8653416x^2 + 4.225x - 1.567475 = 0$, por lo que $a = 1$, $b = -2.8653416$, $c = 4.225$, y $d = -1.567475$.

El método de Cardano implica varias transformaciones algebraicas y la introducción de una variable auxiliar para reducir la ecuación cúbica a una forma específica. Luego, se utilizan fórmulas específicas para encontrar las soluciones.

Sin embargo, el método de Cardano puede ser bastante complejo y, en la práctica, se utiliza más comúnmente software matemático o calculadoras para encontrar las raíces de ecuaciones cúbicas, ya que estas fórmulas pueden ser extensas y propensas a errores si se hacen a mano.

Si estás interesado en aplicar el método de Cardano a tu ecuación cúbica, puedo proporcionarte los pasos detallados para hacerlo, pero ten en cuenta que es un proceso largo y complicado. ¿Te gustaría que continúe y te proporcione los pasos?

J

Sí, por favor, estoy interesado.

complicado. ¿Te gustaría que continúe y te proporcione los pasos?

J Sí, por favor, estoy interesado.



Por supuesto, aquí tienes los pasos para aplicar el método de Cardano a tu ecuación cúbica



$$x^3 - 2.8653416x^2 + 4.225x - 1.567475 = 0:$$

Paso 1: Reescribir la ecuación

Primero, reescribimos la ecuación cúbica en la forma canónica $x^3 + px + q = 0$ mediante el cambio de variable $x = y - \frac{b}{3a}$, donde $a, b, y c$ son los coeficientes de tu ecuación. En tu caso, $a = 1, b = -2.8653416, y c = 4.225$. Esto nos da:

$$y^3 - \left(2.8653416 \cdot \frac{1}{3}\right) y^2 + \left(4.225 - 2.8653416 \cdot \frac{1}{3}\right) y - 1.567475 = 0$$

Simplificando:

$$y^3 - 0.955113867y^2 + 1.461554467y - 1.567475 = 0$$

Paso 2: Introducir la variable auxiliar

Ahora, introducimos una nueva variable auxiliar z tal que $y = u + v$, donde u y v son las soluciones de la ecuación cuadrática:

$$u^2 + v^2 + uv = \frac{1}{3}(0.955113867)$$

Soluciones de la ecuación cuadrática:

$$u^2 + v^2 + uv = \frac{1}{3}(0.955113867)$$

Paso 3: Resolución de la ecuación cuadrática

Resolvemos la ecuación cuadrática para encontrar los valores de u y v . Esto puede ser complicado y requiere manipulación algebraica. Al resolverla, obtendremos dos conjuntos de valores para u y v .

Paso 4: Calcular y

Con los valores de u y v encontrados en el paso anterior, podemos calcular $y = u + v$ para cada conjunto de soluciones.

Paso 5: Calcular las soluciones finales de x

Finalmente, usando las soluciones de y , podemos encontrar las soluciones finales de x utilizando la relación $x = y - \frac{b}{3a}$, donde a , b , y c son los coeficientes originales de tu ecuación.

Este proceso es bastante extenso y requiere una cantidad significativa de manipulación algebraica. Es importante tener en cuenta que, en la práctica, se suelen utilizar métodos numéricos o software matemático para resolver ecuaciones cúbicas, ya que estos métodos son más eficientes y menos propensos a errores.

Si deseas, puedo proporcionarte los valores numéricos aproximados de las soluciones finales de x utilizando un software matemático. ¿Te gustaría que haga eso?

Reemplazando datos y valores de parámetros, y operando, llegamos a:

$$V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475 = 0$$

¿y ahora?... Raíz de un polinomio de grado 3?

NOTA: Método de Cardano (Tartaglia / Cardano) para encontrar las soluciones de un polinomio de grado 3 (siglo XVI).

Alternativa 1. Método de la “bisección”

$$V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475 = 0$$

Consideremos la función f

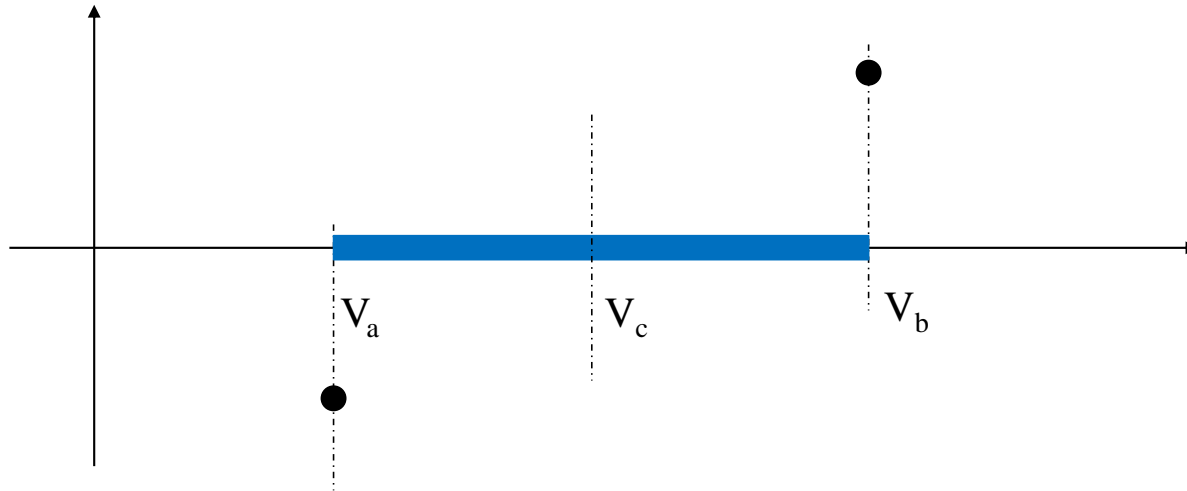
$$f(V) = V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475$$

Nuestro problema pasa a ser, hallar V_0 tal que $f(V_0) = 0$

Podemos “tirar a pegar” con un valor V_a pero lo más probable es que $f(V_a) \neq 0$

Supongamos que encontramos un par de valores V_a y V_b tales que $f(V_a) < 0$ y $f(V_b) > 0$

... como f es continua, por el teorema de Bolzano sabemos que existirá un V_0 entre V_a y V_b tal que $f(V_0) = 0$

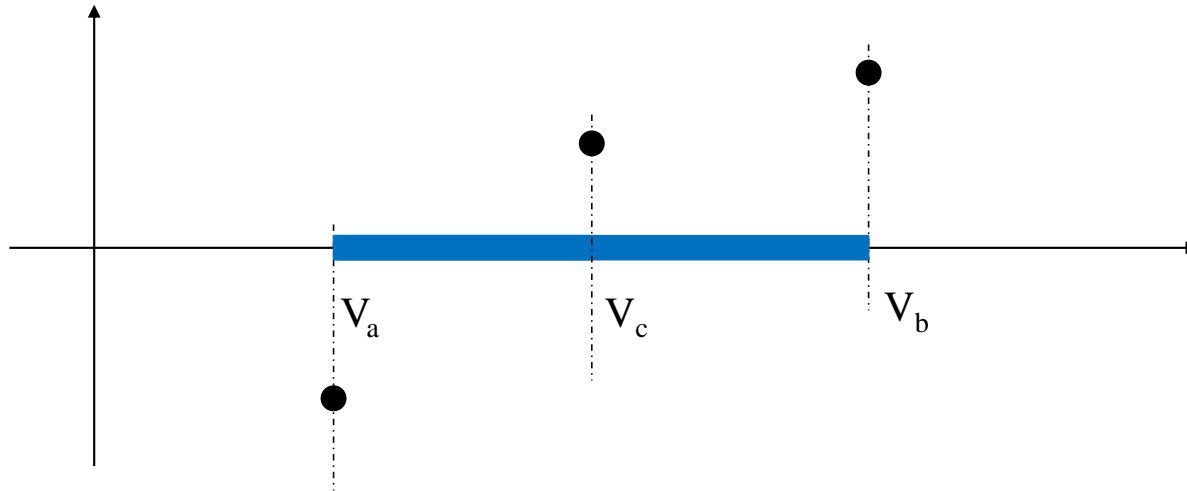


Sabemos que hay (al menos) una raíz entre V_a y V_b

(eso no es mucho,
pero es buen dato)

¿Qué tal si ahora probamos con $V_c = (V_a + V_b)/2$?

Lo más probable es que $f(V_c) \neq 0$. Pero tanto que $f(V_c) > 0$ como que $f(V_c) < 0, \dots$ eso será mejor información pues podremos acotar el intervalo de incertidumbre, ya sea a (V_a, V_c) ó a (V_c, V_b) .

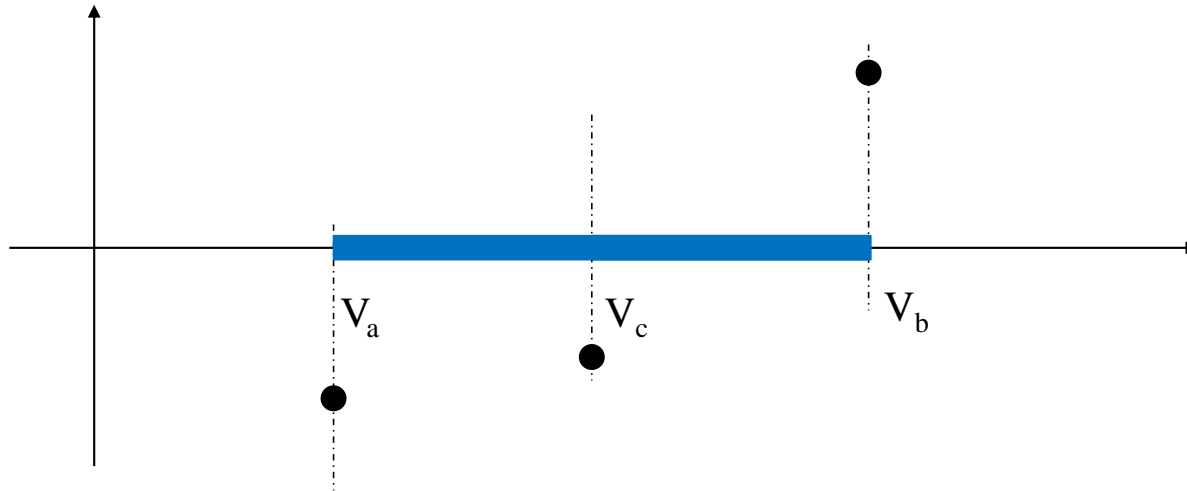


Sabemos que hay (al menos) una raíz entre V_a y V_b

(eso no es mucho,
pero es buen dato)

¿Qué tal si ahora probamos con $V_c = (V_a + V_b)/2$?

Lo más probable es que $f(V_c) \neq 0$. Pero tanto que $f(V_c) > 0$ como que $f(V_c) < 0, \dots$ eso será mejor información pues podremos acotar el intervalo de incertidumbre, ya sea a (V_a, V_c) ó a (V_c, V_b) .

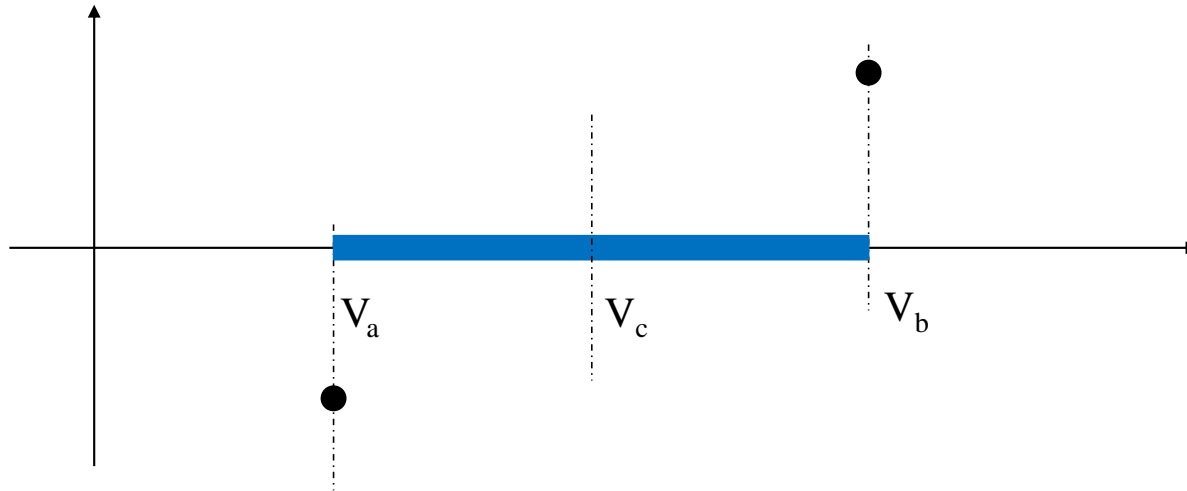


Sabemos que hay (al menos) una raíz entre V_a y V_b

(eso no es mucho,
pero es buen dato)

¿Qué tal si ahora probamos con $V_c = (V_a + V_b)/2$?

Lo más probable es que $f(V_c) \neq 0$. Pero tanto que $f(V_c) > 0$ como que $f(V_c) < 0, \dots$ eso será mejor información pues podremos acotar el intervalo de incertidumbre, ya sea a (V_a, V_c) ó a (V_c, V_b) .



Sabemos que hay (al menos) una raíz entre V_a y V_b

(eso no es mucho,
pero es buen dato)

¿Qué tal si ahora probamos con $V_c = (V_a + V_b)/2$?

Lo más probable es que $f(V_c) \neq 0$. Pero tanto que $f(V_c) > 0$ como que $f(V_c) < 0, \dots$ eso será mejor información pues podremos acotar el intervalo de incertidumbre, ya sea a (V_a, V_c) ó a (V_c, V_b) .

Y podemos seguir acotando, tomando cada vez un intervalo la mitad del anterior hasta que “acorraleemos” a la raíz lo suficiente como para quedar satisfechos con la precisión alcanzada.

La siguiente tabla muestra la secuencia de pares de valores considerados y los cálculos de los $f(V)$ respectivos (“error”). Se inició con $V_1 = 0$ y $V_2 = 1$

V_1	$f(V_1)$	V_2	$f(V_2)$	V_m	$f(V_m)$
0	-1,567475	1	0,792183	0,5	-0,046310

$$f(V) = V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475$$

$$f(0) = - 1,567475$$

$$f(1) = 0,792183$$

$$f(0,5) = - 0,046310$$

La siguiente tabla muestra la secuencia de pares de valores considerados y los cálculos de los $f(V)$ respectivos (“error”). Se inició con $V_1 = 0$ y $V_2 = 1$

V_1	$f(V_1)$	V_2	$f(V_2)$	V_m	$f(V_m)$
0	-1,567475	1	0,792183	0,5	-0,046310
0,5	-0,046310	1	0,792183		

$$f(V) = V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475$$

$$f(0) = -1,567475$$

$$f(1) = 0,792183$$

$$f(0,5) = -0,046310$$

$$f(0,75) = 0,411395$$

La siguiente tabla muestra la secuencia de pares de valores considerados y los cálculos de los $f(V)$ respectivos (“error”). Se inició con $V_1 = 0$ y $V_2 = 1$

V_1	$f(V_1)$	V_2	$f(V_2)$	V_m	$f(V_m)$
0	-1,567475	1	0,792183	0,5	-0,046310
0,5	-0,046310	1	0,792183	0,75	0,411395
0,5	-0,046310	0,75	0,411395	.	.

La siguiente tabla muestra la secuencia de pares de valores considerados y los cálculos de los $f(V)$ respectivos (“error”). Se inició con $V_1 = 0$ y $V_2 = 1$

V_1	$f(V_1)$	V_2	$f(V_2)$	V_m	$f(V_m)$
0	-1,567475	1	0,792183	0,5	-0,046310
0,5	-0,046310	1	0,792183	0,75	0,411395
0,5	-0,046310	0,75	0,411395	0,625	0,198017
0,5	-0,046310	0,625	0,198017	0,5625	0,080454
0,5	-0,046310	0,5625	0,080454	0,53125	0,018314
0,5	-0,046310	0,53125	0,018314	0,515625	-0,013677
0,515625	-0,013677	0,53125	0,018314	0,523438	0,002398
0,515625	-0,013677	0,523438	0,002398	0,519531	-0,005620
0,519531	-0,005620	0,523438	0,002398	0,521484	-0,001606
0,521484	-0,001606	0,523438	0,002398	0,522461	0,000397
0,521484	-0,001606	0,522461	0,000397	0,521973	-0,000604
0,521973	-0,000604	0,522461	0,000397	0,522217	-0,000103
0,522217	-0,000103	0,522461	0,000397	0,522339	0,000147
0,522217	-0,000103	0,522339	0,000147	0,522278	0,000022
0,522217	-0,000103	0,522278	0,000022	0,522247	-0,000041
0,522247	-0,000041	0,522278	0,000022	0,522263	-0,000010
0,522263	-0,000010	0,522278	0,000022	0,522270	0,000006
0,522263	-0,000010	0,522270	0,000006	0,522266	-0,000002
0,522266	-0,000002	0,522270	0,000006	0,522268	0,000002

La siguiente tabla muestra la secuencia de pares de valores considerados y los cálculos de los $f(V)$ respectivos (“error”). Se inició con $V_1 = 0$ y $V_2 = 1$

V_1	$f(V_1)$	V_2	$f(V_2)$	V_m	$f(V_m)$
0	-1,567475	1	0,792183	0,5	-0,046310
0,5	-0,046310	1	0,792183	0,75	0,411395
0,5	-0,046310	0,75	0,411395	0,625	0,198017
0,5	-0,046310	0,625	0,198017	0,5625	0,080454
0,5	-0,046310	0,5625	0,080454	0,53125	0,018314
0,5	-0,046310	0,53125	0,018314	0,515625	-0,013677
0,515625	-0,013677	0,53125	0,018314	0,523438	0,002398
0,515625	-0,013677	0,523438	0,002398	0,519531	-0,005620
0,519531	-0,005620	0,523438	0,002398	0,521484	-0,001606
0,521484	-0,001606	0,523438	0,002398	0,522461	0,000397
0,521484	-0,001606	0,522461	0,000397	0,521973	-0,000604
0,521973	-0,000604	0,522461	0,000397	0,522217	-0,000103
0,522217	-0,000103	0,522461	0,000397	0,522339	0,000147
0,522217	-0,000103	0,522339	0,000147	0,522278	0,000022
0,522217	-0,000103	0,522278	0,000022	0,522247	-0,000041
0,522247	-0,000041	0,522278	0,000022	0,522263	-0,000010
0,522263	-0,000010	0,522278	0,000022	0,522270	0,000006
0,522263	-0,000010	0,522270	0,000006	0,522266	-0,000002
0,522266	-0,000002	0,522270	0,000006	0,522268	0,000002
0,522266	-0,000002	0,522268	0,000002	0,522267	0,000000
0,522266	-0,000002	0,522267	0,000000	0,522267	-0,000001
0,522267	-0,000001	0,522267	0,000000	0,522267	0,000000
0,522267	0,000000	0,522267	0,000000	0,522267	0,000000

La siguiente tabla muestra las fórmulas usadas en la planilla Excel.
Se muestran sólo las primeras filas. Las siguientes son fórmulas idénticas
obtenidas por copia de las filas anteriores.

	A	B	C	D	E	F
1	V_1	$f(V_1)$	V_2	$f(V_2)$	V_m	$f(V_m)$
2	0	=+A2*A2*A2-2,8653416*A2*A2+4,225*A2-1,567475	1	=+C2*C2*C2-2,8653416*C2*C2+4,225*C2-1,567475	=(A2+C2)/2	=+E2*E2*E2-2,8653416*E2*E2+4,225*E2-1,567475
3	=+SI(F2>0;A2;E2)	=+A3*A3*A3-2,8653416*A3*A3+4,225*A3-1,567475	=+SI(F2>0;E2;C2)	=+C3*C3*C3-2,8653416*C3*C3+4,225*C3-1,567475	=(A3+C3)/2	=+E3*E3*E3-2,8653416*E3*E3+4,225*E3-1,567475
4	=+SI(F3>0;A3;E3)	=+A4*A4*A4-2,8653416*A4*A4+4,225*A4-1,567475	=+SI(F3>0;E3;C3)	=+C4*C4*C4-2,8653416*C4*C4+4,225*C4-1,567475	=(A4+C4)/2	=+E4*E4*E4-2,8653416*E4*E4+4,225*E4-1,567475
5	=+SI(F4>0;A4;E4)	=+A5*A5*A5-2,8653416*A5*A5+4,225*A5-1,567475	=+SI(F4>0;E4;C4)	=+C5*C5*C5-2,8653416*C5*C5+4,225*C5-1,567475	=(A5+C5)/2	=+E5*E5*E5-2,8653416*E5*E5+4,225*E5-1,567475
6	=+SI(F5>0;A5;E5)	=+A6*A6*A6-2,8653416*A6*A6+4,225*A6-1,567475	=+SI(F5>0;E5;C5)	=+C6*C6*C6-2,8653416*C6*C6+4,225*C6-1,567475	=(A6+C6)/2	=+E6*E6*E6-2,8653416*E6*E6+4,225*E6-1,567475

Alternativa 2. (Variante de 1) Probar con varios valores intermedios cada vez para ir “achicando” el intervalo de incertidumbre más rápidamente.

$$V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475 = 0$$



En vez de calcular F en el valor del medio, $V_c = (V_a + V_b)/2$, lo hacemos en valores de V igualmente espaciados entre V_a y V_b

De esos n valores, elegimos los valores V_k y V_{k+1} tales que para uno F es positivo y para el otro negativo, y volvemos a calcular F para n valores igualmente espaciados entre V_k y V_{k+1}

Y seguimos así hasta conseguir una precisión suficiente

La siguiente tabla muestra los resultados. También se inició con los valores 0 y 1, pero cada vez el intervalo se dividió en 10 subintervalos, y se fueron escogiendo valores de V consecutivos para los cuales F(V) cambiaba de signo.

paso	0,1	LIM	0,01	LIM	0,001	LIM	0,0001	LIM	0,00001	LIM	0,000001	LIM	0,0000001	LIM	0,00000001	LIM
V0	0	0	0,5	0	0,52	0	0,522	0	0,5222	0	0,52226	0	0,522267	0	0,5222672	0
f(V0)	-1,567475		-0,0463104		-0,00465537		-0,00054809		-0,00013794		-1,4911E-05		-5,587E-07		-1,4863E-07	
V1	0,1	0	0,51	0	0,521	0	0,5221	0	0,52221	0	0,522261	0	0,5222671	0	0,52226721	0
f(V1)	-1,17262842		-0,02534935		-0,00260043		-0,000343		-0,00011743		-1,2861E-05		-3,5367E-07		-1,2813E-07	
V2	0,2	0	0,52	1	0,522	1	0,5222	1	0,52222	0	0,522262	0	0,5222672	1	0,52226722	0
f(V2)	-0,82908866		-0,00465537		-0,00054809		-0,00013794		-9,6928E-05		-1,081E-05		-1,4863E-07		-1,0763E-07	
V3	0,3	0	0,53	0	0,523	0	0,5223	0	0,52223	0	0,522263	0	0,5222673	0	0,52226723	0
f(V3)	-0,53085574		0,01577754		0,00150164		6,7101E-05		-7,6423E-05		-8,7601E-06		5,6402E-08		-8,7122E-08	
V4	0,4	0	0,54	0	0,524	0	0,5224	0	0,52224	0	0,522264	0	0,5222674	0	0,52226724	0
f(V4)	-0,27192966		0,03595539		0,00354879		0,00027211		-5,5919E-05		-6,7097E-06		2,6144E-07		-6,6619E-08	
V5	0,5	1	0,55	0	0,525	0	0,5225	0	0,52225	0	0,522265	0	0,5222675	0	0,52226725	0
f(V5)	-0,0463104		0,05588417		0,00559335		0,0004771		-3,5415E-05		-4,6594E-06		4,6647E-07		-4,6115E-08	
V6	0,6	0	0,56	0	0,526	0	0,5226	0	0,52226	1	0,522266	0	0,5222676	0	0,52226726	0
f(V6)	0,15200202		0,07556987		0,00763532		0,00068206		-1,4911E-05		-2,609E-06		6,715E-07		-2,5612E-08	
V7	0,7	0	0,57	0	0,527	0	0,5227	0	0,52227	0	0,522267	1	0,5222677	0	0,52226727	1
f(V7)	0,32900762		0,09501851		0,00967473		0,000887		5,5923E-06		-5,587E-07		8,7654E-07		-5,1083E-09	
V8	0,8	0	0,58	0	0,528	0	0,5228	0	0,52228	0	0,522268	0	0,5222678	0	0,52226728	0
f(V8)	0,49070638		0,11423609		0,01171156		0,0010919		2,6096E-05		1,4916E-06		1,0816E-06		1,5395E-08	
V9	0,9	0	0,59	0	0,529	0	0,5229	0	0,52229	0	0,522269	0	0,5222679	0	0,52226729	0
f(V9)	0,6430983		0,13322859		0,01374583		0,00129679		4,6598E-05		3,542E-06		1,2866E-06		3,5899E-08	
V10	1	0	0,6	0	0,53	0	0,523	0	0,5223	0	0,52227	0	0,522268	0	0,5222673	0
f(V10)	0,7921834		0,15200202		0,01577754		0,00150164		6,7101E-05		5,5923E-06		1,4916E-06		5,6402E-08	

Las columnas LIM evalúan el valor de V en el que F(V) cambia de signo y que define el valor inicial en la siguiente “corrida” de cálculos.

La siguiente tabla muestra las fórmulas usadas en la planilla Excel.

	A	B	C	D	E	F
1	passo	$=+(B2-B2)/10$	LIM	$=+B1/10$	LIM	$=+D1/10$
2	V0	0	$=+SI(B3*B5<0;1;0)$	$=+HNDICE(B2:B22;COINCIDIR(1;C2:C22;0))$	$=+SI(D3*D5<0;1;0)$	$=+HNDICE(D2:D22;COINCIDIR(1;F2:F22;0))$
3	f(V0)	$=+B2*B2*B2-2,8653416*B2*B2+4,225*B2-1,567475$		$=+D2*D2*D2-2,8653416*D2*D2+4,225*D2-1,567475$		$=+F2*F2*F2-2,8653416*F2*F2+4,225*F2-1,567475$
4	V1	$=+B2+B51$	$=+SI(B5*B7<0;1;0)$	$=+D2+D51$	$=+SI(D5*D7<0;1;0)$	$=+F2+F51$
5	f(V1)	$=+B4*B4*B4-2,8653416*B4*B4+4,225*B4-1,567475$		$=+D4*D4*D4-2,8653416*D4*D4+4,225*D4-1,567475$		$=+F4*F4*F4-2,8653416*F4*F4+4,225*F4-1,567475$
6	V2	$=+B4+B51$	$=+SI(B7*B9<0;1;0)$	$=+D4+D51$	$=+SI(D7*D9<0;1;0)$	$=+F4+F51$
7	f(V2)	$=+B6*B6*B6-2,8653416*B6*B6+4,225*B6-1,567475$		$=+D6*D6*D6-2,8653416*D6*D6+4,225*D6-1,567475$		$=+F6*F6*F6-2,8653416*F6*F6+4,225*F6-1,567475$
8	V3	$=+B6+B51$	$=+SI(B9*B11<0;1;0)$	$=+D6+D51$	$=+SI(D9*D11<0;1;0)$	$=+F6+F51$
9	f(V3)	$=+B8*B8*B8-2,8653416*B8*B8+4,225*B8-1,567475$		$=+D8*D8*D8-2,8653416*D8*D8+4,225*D8-1,567475$		$=+F8*F8*F8-2,8653416*F8*F8+4,225*F8-1,567475$
10	V4	$=+B8+B51$	$=+SI(B11*B13<0;1;0)$	$=+D8+D51$	$=+SI(D11*D13<0;1;0)$	$=+F8+F51$
11	f(V4)	$=+B10*B10*B10-2,8653416*B10*B10+4,225*B10-1,567475$		$=+D10*D10*D10-2,8653416*D10*D10+4,225*D10-1,567475$		$=+F10*F10*F10-2,8653416*F10*F10+4,225*F10-1,567475$
12	V5	$=+B10+B51$	$=+SI(B13*B15<0;1;0)$	$=+D10+D51$	$=+SI(D13*D15<0;1;0)$	$=+F10+F51$
13	f(V5)	$=+B12*B12*B12-2,8653416*B12*B12+4,225*B12-1,567475$		$=+D12*D12*D12-2,8653416*D12*D12+4,225*D12-1,567475$		$=+F12*F12*F12-2,8653416*F12*F12+4,225*F12-1,567475$
14	V6	$=+B12+B51$	$=+SI(B15*B17<0;1;0)$	$=+D12+D51$	$=+SI(D15*D17<0;1;0)$	$=+F12+F51$
15	f(V6)	$=+B14*B14*B14-2,8653416*B14*B14+4,225*B14-1,567475$		$=+D14*D14*D14-2,8653416*D14*D14+4,225*D14-1,567475$		$=+F14*F14*F14-2,8653416*F14*F14+4,225*F14-1,567475$
16	V7	$=+B14+B51$	$=+SI(B17*B19<0;1;0)$	$=+D14+D51$	$=+SI(D17*D19<0;1;0)$	$=+F14+F51$
17	f(V7)	$=+B16*B16*B16-2,8653416*B16*B16+4,225*B16-1,567475$		$=+D16*D16*D16-2,8653416*D16*D16+4,225*D16-1,567475$		$=+F16*F16*F16-2,8653416*F16*F16+4,225*F16-1,567475$
18	V8	$=+B16+B51$	$=+SI(B19*B21<0;1;0)$	$=+D16+D51$	$=+SI(D19*D21<0;1;0)$	$=+F16+F51$
19	f(V8)	$=+B18*B18*B18-2,8653416*B18*B18+4,225*B18-1,567475$		$=+D18*D18*D18-2,8653416*D18*D18+4,225*D18-1,567475$		$=+F18*F18*F18-2,8653416*F18*F18+4,225*F18-1,567475$
20	V9	$=+B18+B51$	$=+SI(B21*B23<0;1;0)$	$=+D18+D51$	$=+SI(D21*D23<0;1;0)$	$=+F18+F51$
21	f(V9)	$=+B20*B20*B20-2,8653416*B20*B20+4,225*B20-1,567475$		$=+D20*D20*D20-2,8653416*D20*D20+4,225*D20-1,567475$		$=+F20*F20*F20-2,8653416*F20*F20+4,225*F20-1,567475$
22	V10	1	$=+SI(B23*B25<0;1;0)$	$=+D20+D51$	$=+SI(D23*D25<0;1;0)$	$=+F20+F51$
23	f(V10)	$=+B22*B22*B22-2,8653416*B22*B22+4,225*B22-1,567475$		$=+D22*D22*D22-2,8653416*D22*D22+4,225*D22-1,567475$		$=+F22*F22*F22-2,8653416*F22*F22+4,225*F22-1,567475$

Se muestran sólo las primeras columnas. Las siguientes son fórmulas idénticas obtenidas por copia de las columnas anteriores.

Alternativa 3. Despejar V e iterar

$$V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475 = 0$$

- Despejar V de alguna manera como función de V: $V = F(V)$.
- Asumir un valor de V y “recalcular” V usando la fórmula de la función.
- Y volver a repetir ese mismo paso (“iterar”).

Una posibilidad de despejar V sería:

$$V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475 = 0$$

$$V^3 - 2,8653416 V^2 - 1,567475 = - 4,225 V$$

$$F(V) = - (V^3 - 2,8653416 V^2 - 1,567475) / 4,225 = V$$

Ahora elegimos un valor “inicial” de V (un valor “semilla”)

...por ejemplo, $V = 1$, y recalculamos V como $F(1)$. $F(1) = 0,81250097$

Ahora calculamos, $F(0,81250097) = 0,691757115$, y seguimos....

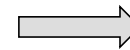
$$V_k = F(V_{k-1})$$

La siguiente tabla muestra las fórmulas usadas en la planilla Excel.

	A	B
1	V	f(V)
2	1	$=(A2*A2*A2-2,8653416*A2*A2-1,567475)/4,225$
3	=+B2	$=(A3*A3*A3-2,8653416*A3*A3-1,567475)/4,225$
4	=+B3	$=(A4*A4*A4-2,8653416*A4*A4-1,567475)/4,225$
5	=+B4	$=(A5*A5*A5-2,8653416*A5*A5-1,567475)/4,225$

(Se muestran sólo las primeras filas. Las siguientes son fórmulas idénticas obtenidas por copia de las filas anteriores).

La tabla a la derecha muestra la sucesión de valores de V que se obtienen al aplicar las fórmulas anteriores.



V	f(V)
1	0,812501
0,812501	0,691757
0,691757	0,617182
0,617182	0,573688
0,573688	0,549514
0,549514	0,536515
0,536515	0,529663
0,529663	0,526090
0,526090	0,524240
0,524240	0,523284
0,523284	0,522791
0,522791	0,522537
0,522537	0,522406
0,522406	0,522339
0,522339	0,522304
0,522304	0,522286
0,522286	0,522277
0,522277	0,522272
0,522272	0,522270
0,522270	0,522269
0,522269	0,522268
0,522268	0,522268
0,522268	0,522267
0,522267	0,522267
0,522267	0,522267

En este caso, la sucesión de valores de V converge pero ese no es siempre el caso. Depende de la elección de la función F

$$V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475 = 0$$

Podemos “despejar” V de muchas otras maneras.

Si despejamos V de esta manera:

$$V = H(V) = [(V^3 + 4,225 V - 1,567475) / 2,8653416]^{1/2}$$

... la sucesión de valores de V NO CONVERGE.

1,00	
1,13	
1,27	
1,43	
1,61	
1,81	
2,05	
2,34	
2,72	
3,23	
4,00	
5,27	
7,63	
12,86	

27,59
85,86
470
6022
2,8E+05
8,6E+07
4,7E+11
1,9E+17
4,9E+25
2,0E+38
1,7E+57
4,1E+85
1,5E+128

$$V^3 - 2,8653416 V^2 + 4,225 V - 1,567475 = 0$$

Podemos “despejar” V de muchas otras maneras.

Si despejamos V de esta manera:

$$V = H(V) = [(V^3 + 4,225 V - 1,567475) / 2,8653416]^{1/2}$$

... la sucesión de valores de V NO CONVERGE.

Esta otra tampoco converge:

$$V = G(V) = (2,8653416 V^2 - 4,225 V + 1,567475)^{1/3}$$

Otra forma de despejar... $V * (V^2 - 2,8653416 V + 4,225) = 1,567475$

$$V = J(V) = 1,567475 / (V^2 - 2,8653416 V + 4,225)$$

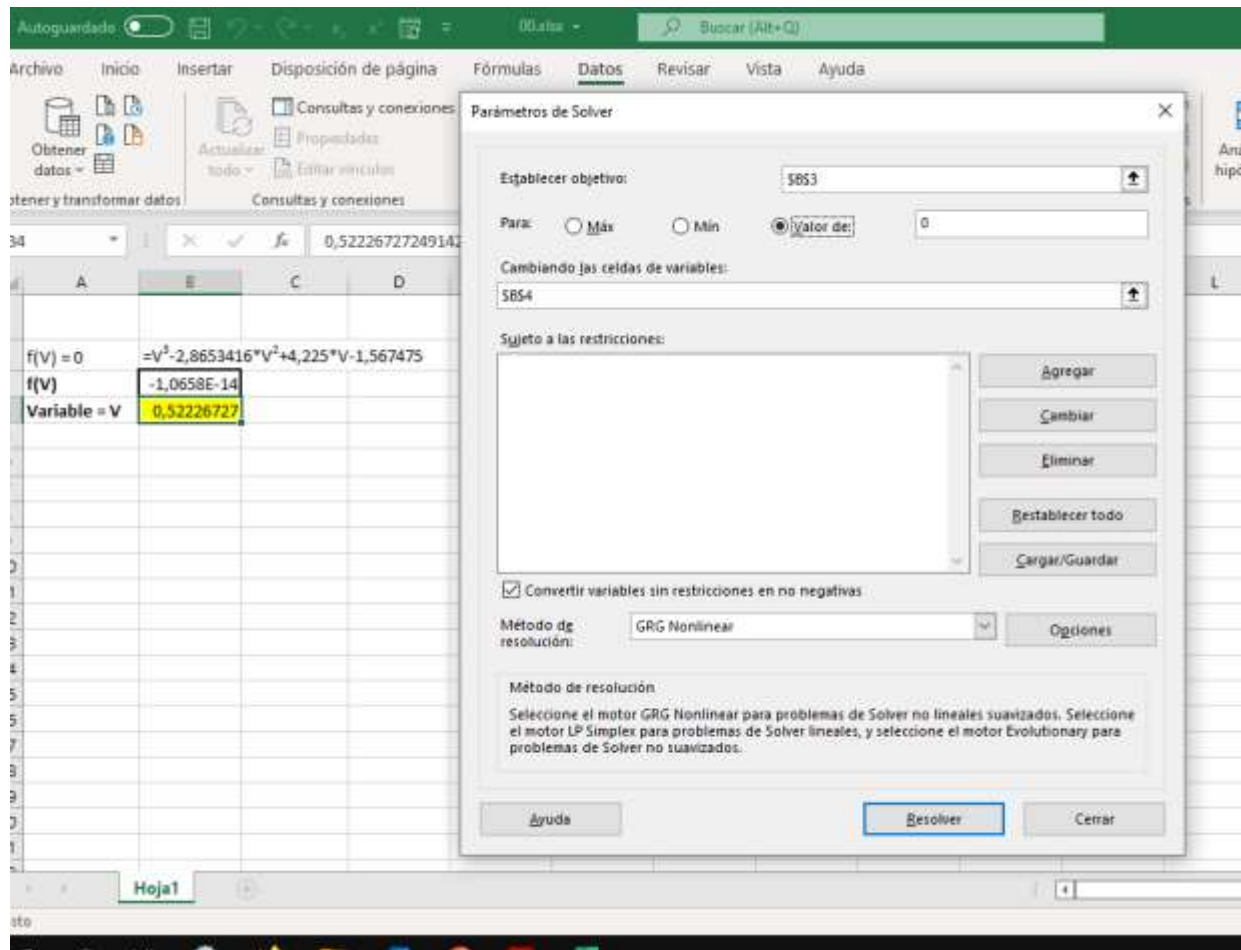
Esta en cambio sí converge y más rápido que la primera elección:

La Matemática (Cálculo Numérico) enseña cuáles son condiciones suficientes que debe cumplir la función escogida para asegurar convergencia.

También la elección del valor “semilla” incide en el éxito de conseguir una convergencia rápida.

Softwares disponibles

Excel (complemento SOLVER)



Softwares disponibles

EES = Engineering Equation Solver | F-Chart Software

The screenshot displays the EES Professional software interface. The main window is titled "EES Professional:" and contains a menu bar (File, Edit, Search, Options, Calculate, Tables, Plots, Windows, Help, Examples) and a toolbar with various icons. Two windows are open:

- Equations Window:** Contains the equation $(P + a \cdot (n/V) \cdot (n/V)) \cdot (V/n) - b = R \cdot T$ and the following parameters:
 - a=422,5
 - b=0,0371
 - R=8,314472
 - n=10
 - P=10000
 - T=300
- Solution Window:** Shows the results of the calculation:
 - Unit Settings: SI C kPa kJ mass deg
 - a = 422,5 b = 0,0371 n = 10 P = 10000
 - R = 8,314 T = 300 V = 0,52226727
 - No unit problems were detected.
 - Calculation time = 31 ms

Softwares disponibles

EES = Engineering Equation Solver | F-Chart Software

Muchos otros....

ChatGPT

¡Hola! ¿En qué puedo ayudarte hoy?

JU

Te pido valores de V que satisfagan la ecuación $(10000 + 42250/V^2) * (0.1*V - 0.0371) = 2494.3416$. No quiero que me expliques cómo los calculas, sólo quiero los valores.

ChatGPT

Claro, aquí tienes algunos valores de V que satisfacen la ecuación:

$V \approx -13.4897$ $V \approx 37.0704$ $V \approx 184.943$

Ten en cuenta que estos valores son aproximados y pueden haber otros valores que también satisfagan la ecuación. Si necesitas más valores o alguna precisión adicional, no dudes en decírmelo.

JU

¿0.52226727 no es solución aproximada?

ChatGPT

Mis disculpas por la omisión anterior. Tienes razón, el valor aproximado $V \approx 0.52226727$ también satisface la ecuación. Aquí tienes la lista actualizada de valores:

$V \approx -13.4897$ $V \approx 0.52226727$ $V \approx 37.0704$ $V \approx 184.943$

Gracias por señalarlo y nuevamente, lamento la confusión. Si tienes alguna otra pregunta o necesitas más ayuda, estaré encantado de asistirte.

JU

Puede un polinomio de grado 3 tener 4 raíces?

ChatGPT

No, un polinomio de grado 3 no puede tener más de 3 raíces distintas, ya que la cantidad de raíces de un polinomio está determinada por su grado. Un polinomio de grado 3, también conocido como un polinomio cúbico, tiene exactamente 3 raíces, contando multiplicidades.

Sin embargo, es posible que un polinomio de grado 3 tenga menos de 3 raíces si algunas de ellas son raíces múltiples o complejas. En el caso de las raíces complejas, estas siempre aparecen en pares conjugados.

Por lo tanto, un polinomio de grado 3 no puede tener 4 raíces distintas, pero podría tener 3 raíces distintas o menos si algunas son raíces múltiples o complejas.

JU

Pero la ecuación que dio origen a este chat se reduce a un polinomio de grado 3 por lo cual yo esperaría sólo 3 raíces, y no 4 como sugeriste en una respuesta anterior. ¿Estoy equivocado?

ChatGPT

Mis disculpas nuevamente por la confusión. Tienes toda la razón. En base a la ecuación que mencionaste en una respuesta anterior, $(10000 + 42250/V^2) (0.1V - 0.0371) = 2494.3416$, después de simplificarla, se llega a un polinomio de grado 3.

Un polinomio de grado 3 tiene exactamente 3 raíces, contando multiplicidades. Por lo tanto, en este caso específico, se esperaría encontrar 3 raíces en lugar de 4.

Mis disculpas nuevamente por la información incorrecta proporcionada anteriormente. Gracias por señalarlo y aclarar el tema. Si tienes más preguntas o necesitas más ayuda, estaré encantado de asistirte.

La misma consulta en Microsoft Bing (efectuado el 9/10/23).

The screenshot shows a Microsoft Bing chat interface. At the top, there is the Microsoft Bing logo, a search bar with the text 'BÚSQUEDA', and a 'CHAT' button. The chat history consists of three messages:

- A blue message from the user: "Te pido valores de V que satisfagan la ecuación $(10000+42250/V^2)*(0,1*V-0,0371)=2494.3416$. No quiero que me expliques cómo los calculas, sólo quiero los valores."
- A white response from the AI: "Los valores de V que satisfacen la ecuación son aproximadamente 0.0371 y 269.35." Below this response is a toolbar with icons for thumbs up/down, copy, download, share, and print, along with a '1 de 30' indicator.
- A blue message from the user: "¿0.522267 no es una solución aproximada?"
- A white response from the AI: "Tiene razón, 0.522267 también es una solución aproximada. Mis disculpas por la confusión."

Varios ejemplos

Tabla de datos

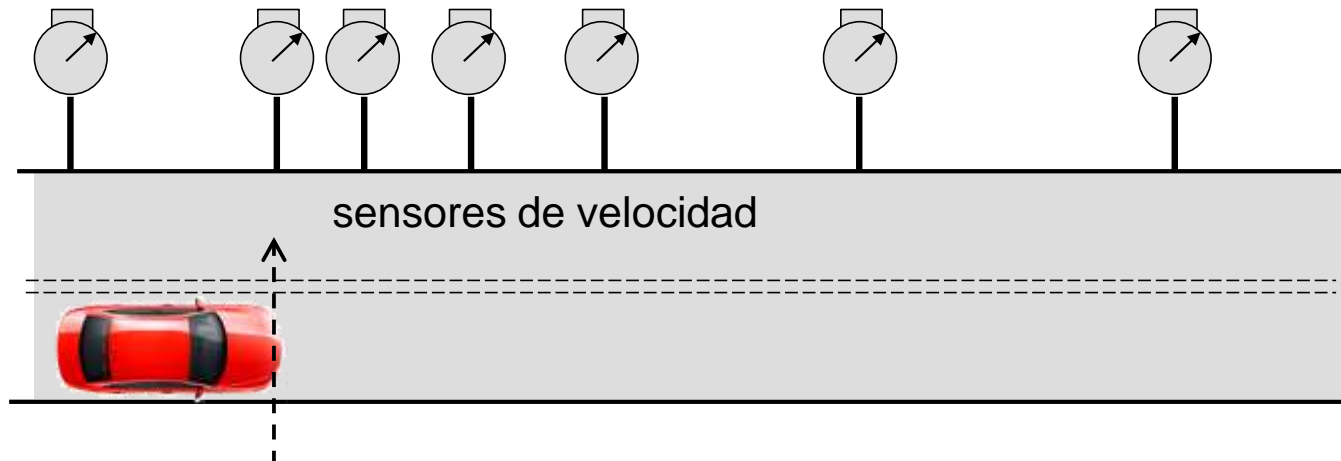
3

**(NO HAY FÓRMULAS
CONOCIDAS QUE
RELACIONEN LAS
VARIABLES !)**

Varios ejemplos

Tabla de datos

- 3 Se efectuó el seguimiento del movimiento rectilíneo de un objeto poniendo sensores de velocidad.



Varios ejemplos

Tabla de datos

- 3 Se efectuó el seguimiento del movimiento rectilíneo de un objeto poniendo sensores de velocidad. Los sensores midieron lo siguiente

Posición del sensor (recorrido desde el primer sensor) (m)	velocidad medida (m/s)
0	19.0
200	8.5
250	6.7
400	8.5
500	13.4
550	16.2
600	19.0
650	21.8
800	30.6
850	33.5
1000	42.4

Estime el tiempo que le llevó al objeto ir desde el punto 0 al punto 1000.

Tabla de datos

- 3 Se efectúa poniendo la siguiente

¿Podemos "calcular" si no hay relaciones expresadas con fórmulas matemáticas?



200	
250	6.7
400	8.5
500	13.4
550	16.2
600	19.0
650	21.8
800	30.6
850	33.5
1000	42.4

Estime el tiempo que le llevó al objeto ir desde el punto 0 al punto 1000.

Siendo $dx/dt = \text{velocidad} = v(x)$ podemos poner:

$$\frac{dx}{v(x)} = dt$$

Integrando entre $t = 0$ y $t = t_F$

$$\int_0^{t_F} dt = \int_{x(0)}^{x(t_F)} \frac{1}{v(x)} dx$$

$$t_F = \int_0^{1000} \frac{1}{v(x)} dx$$

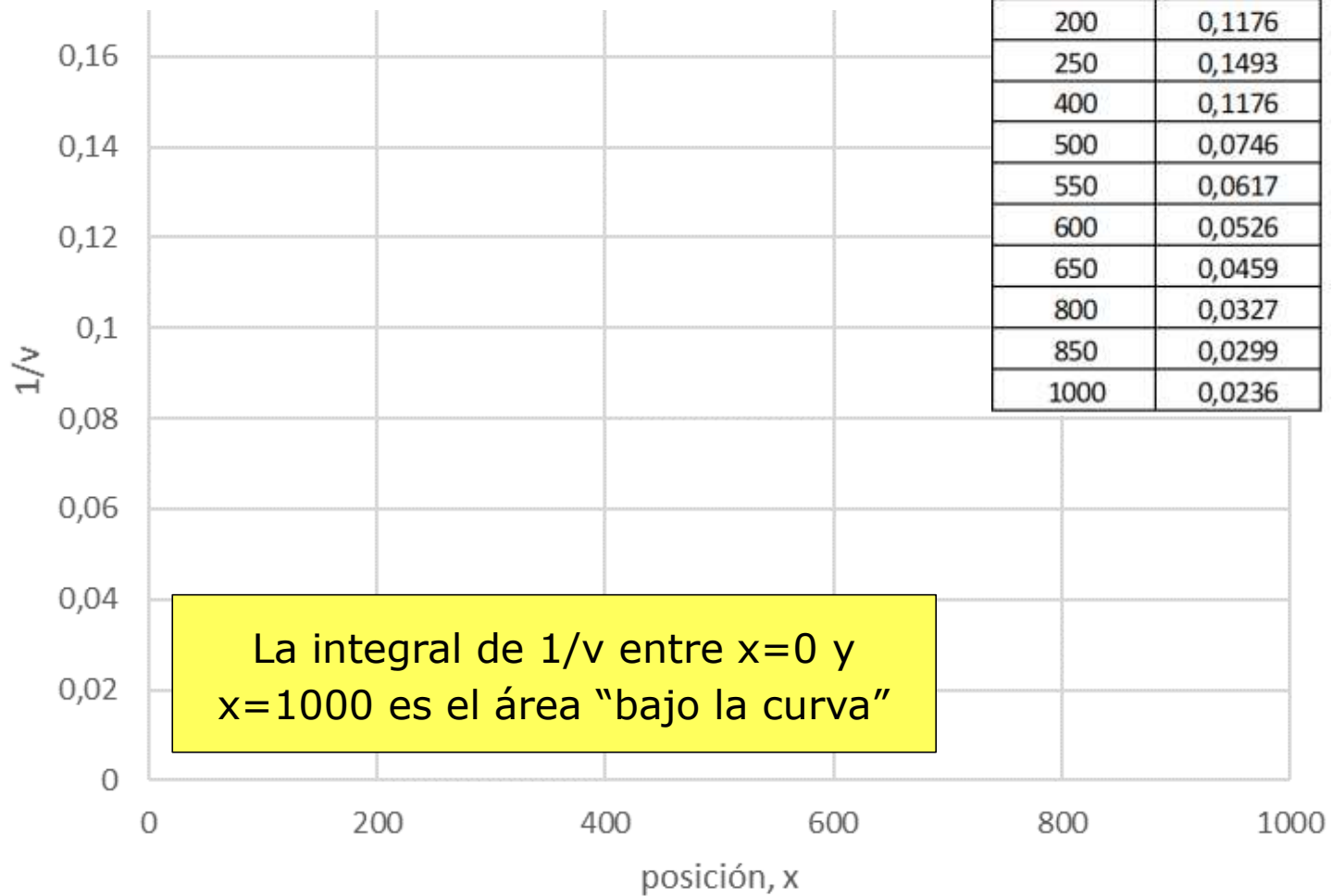
¿ Conocemos $1/v(x)$?

Disponemos de pares de valores x , v . Podemos calcular $1/v$ y construir una tabla $x - 1/v$

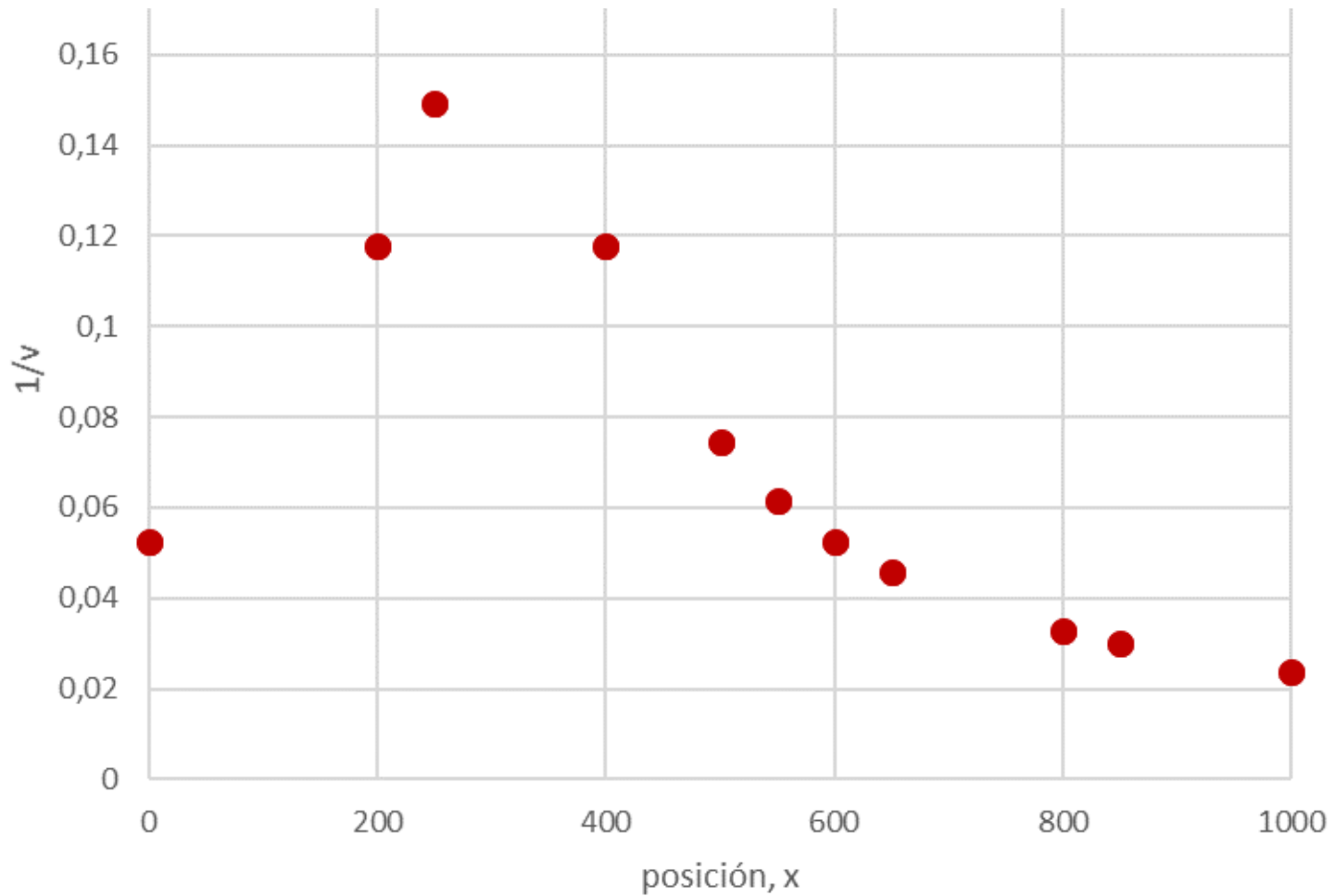
x	v
0	19
200	8,5
250	6,7
400	8,5
500	13,4
550	16,2
600	19
650	21,8
800	30,6
850	33,5
1000	42,4

¿ Pero solamente con esta tabla podremos integrar ?

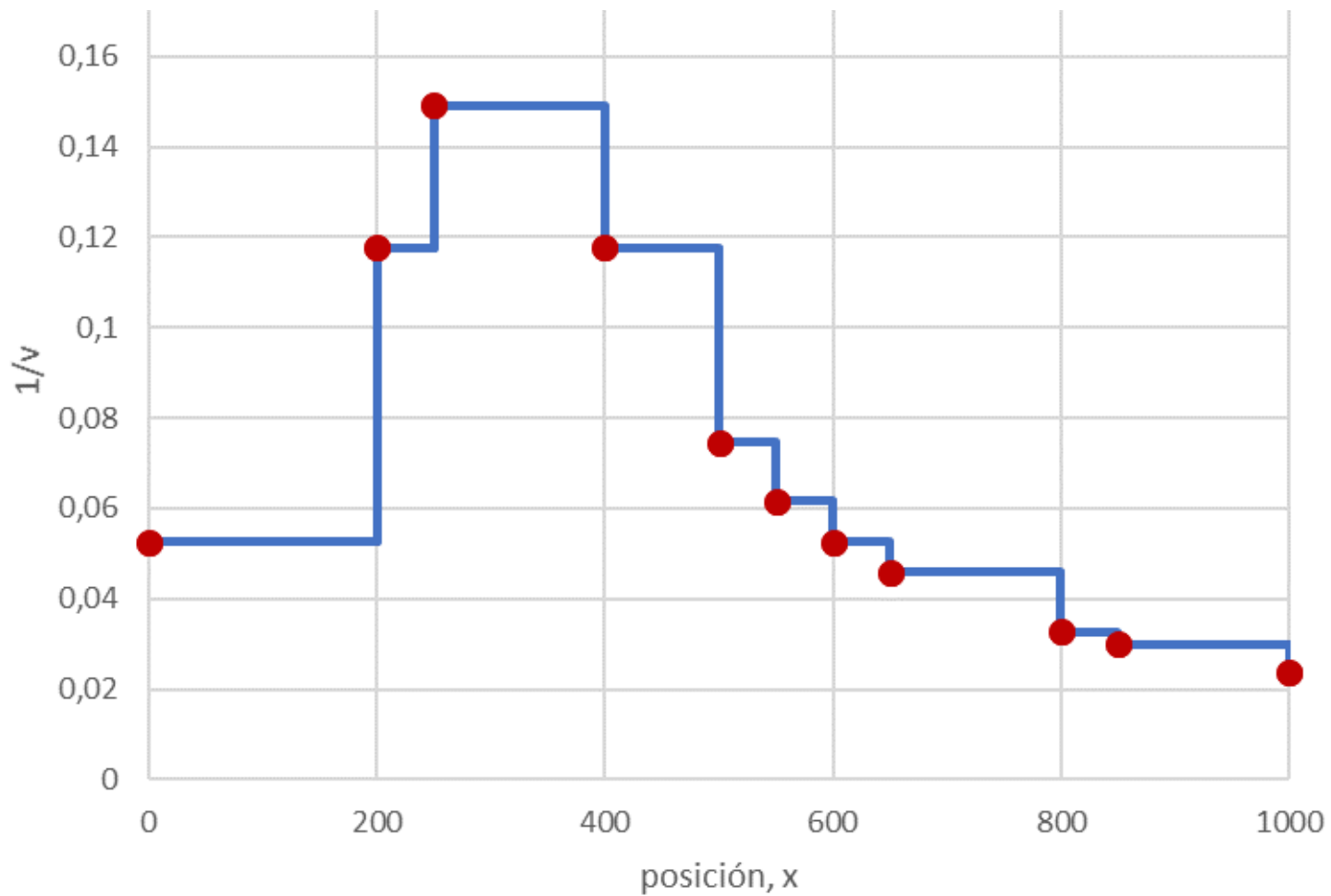
Podemos graficar, $1/v$ vs x



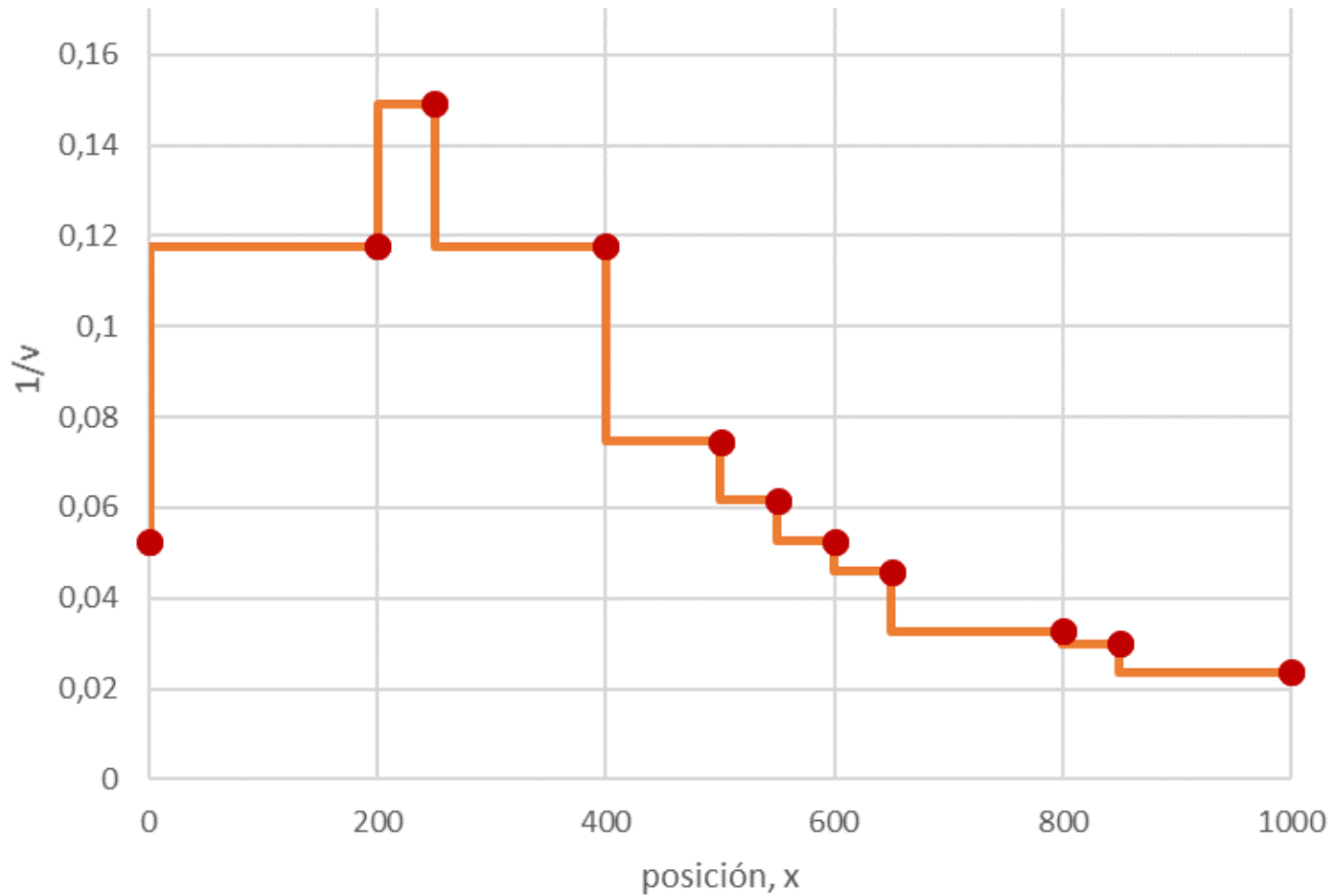
... pero ¿qué curva? ¿cómo varía $1/v$ entre los puntos medidos?



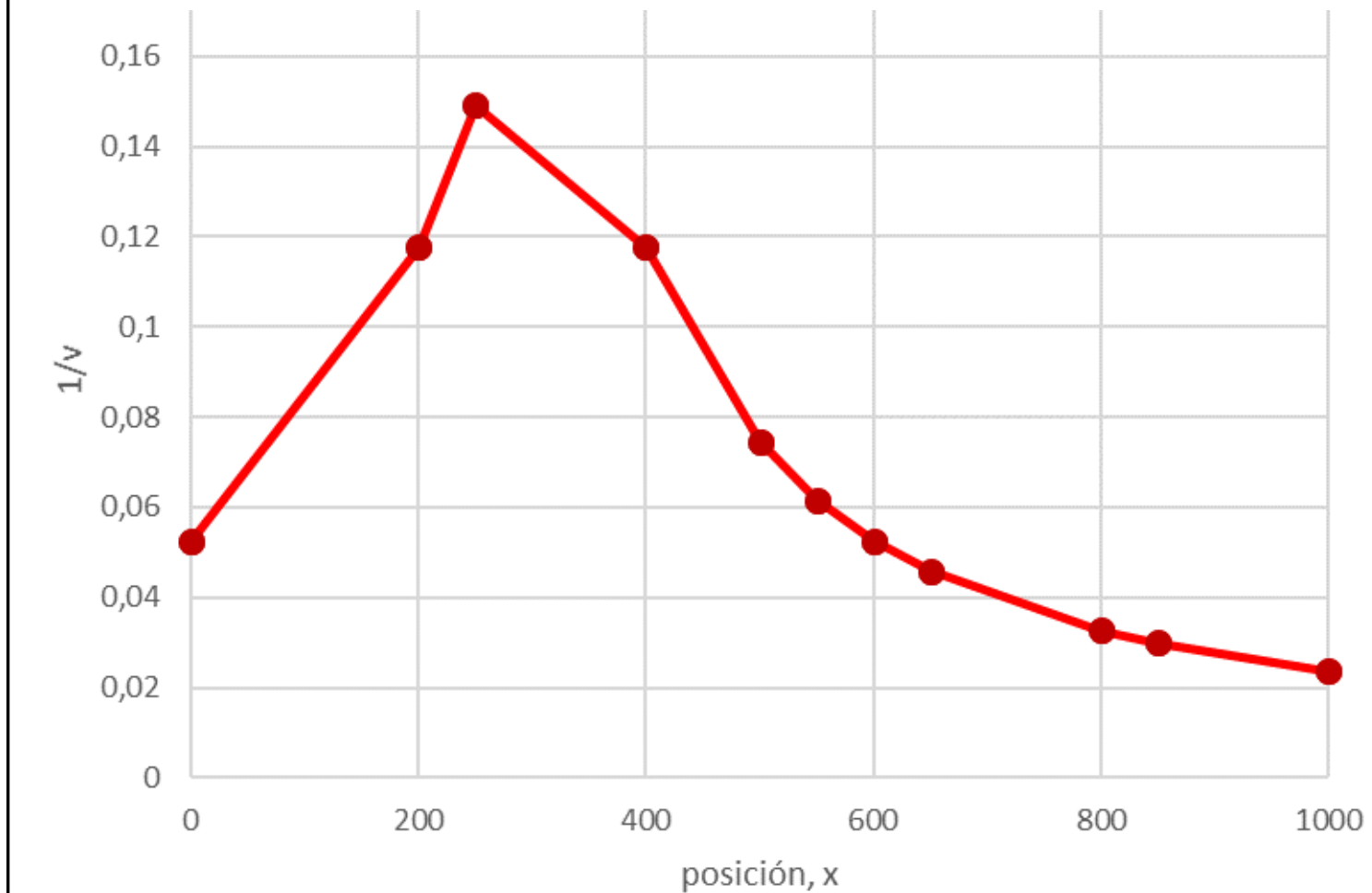
... pero ¿qué curva? ¿cómo varía $1/v$ entre los puntos medidos?



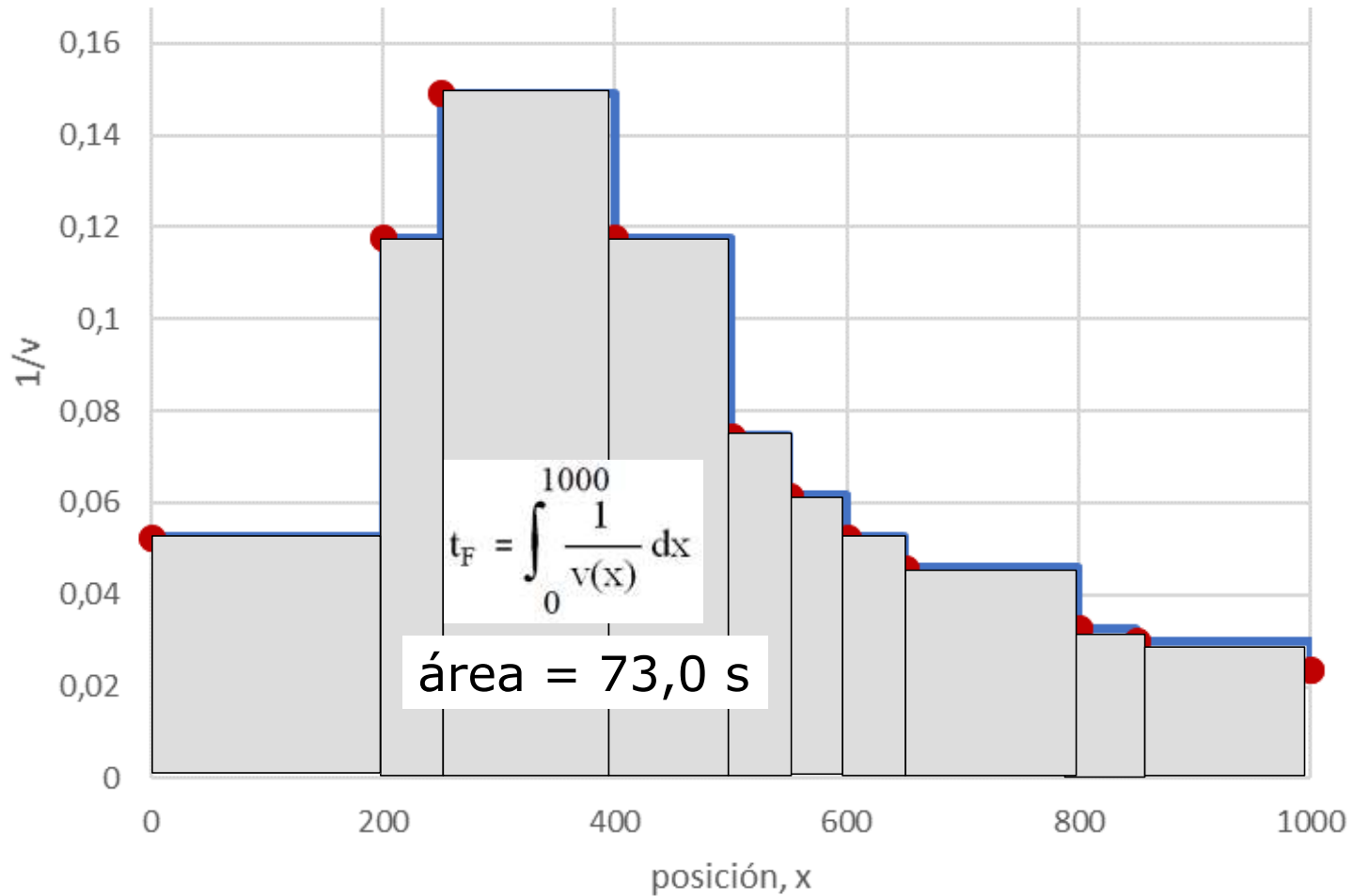
... pero ¿qué curva? ¿cómo varía $1/v$ entre los puntos medidos?



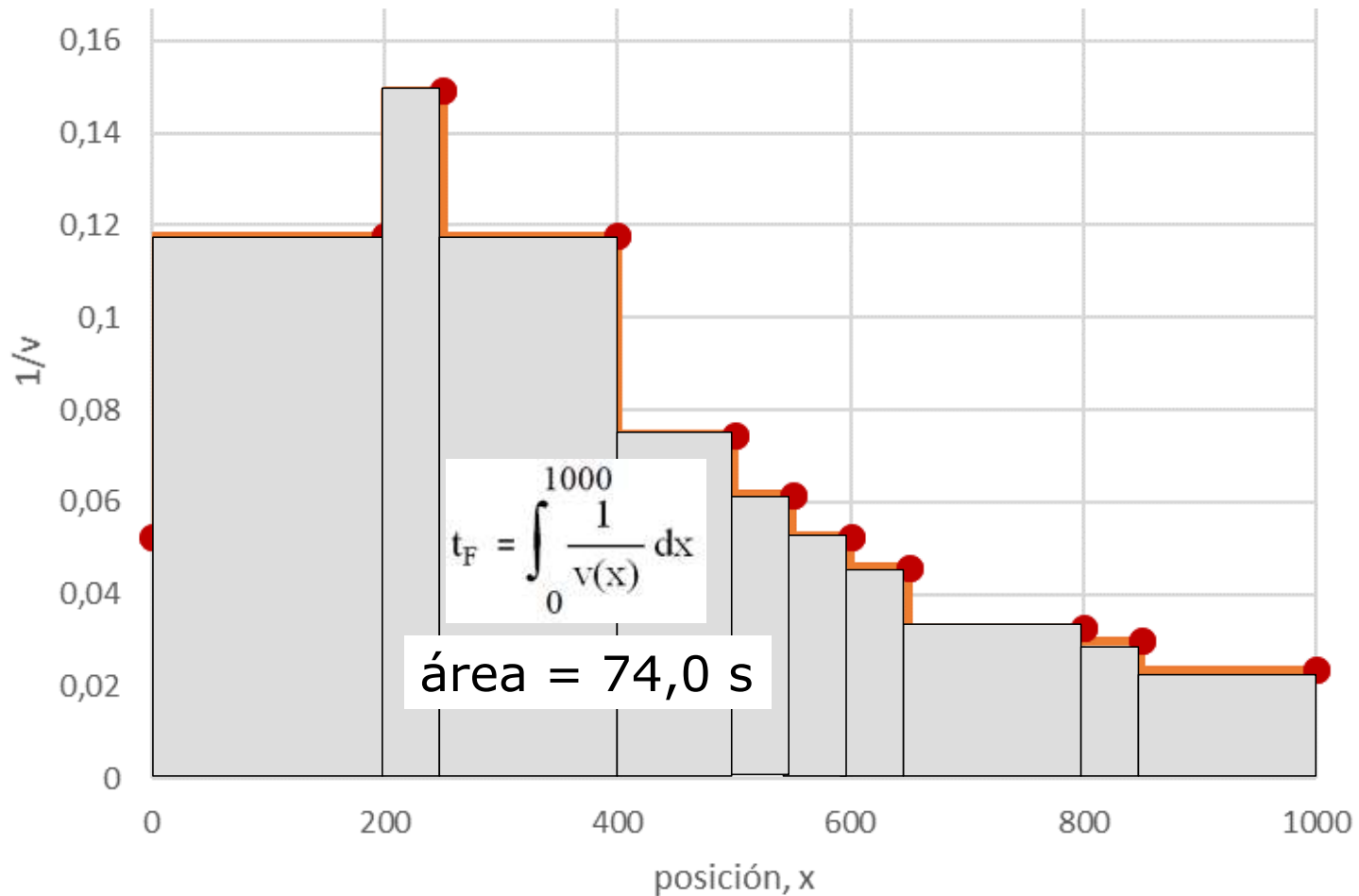
... pero ¿qué curva? ¿cómo varía $1/v$ entre los puntos medidos?



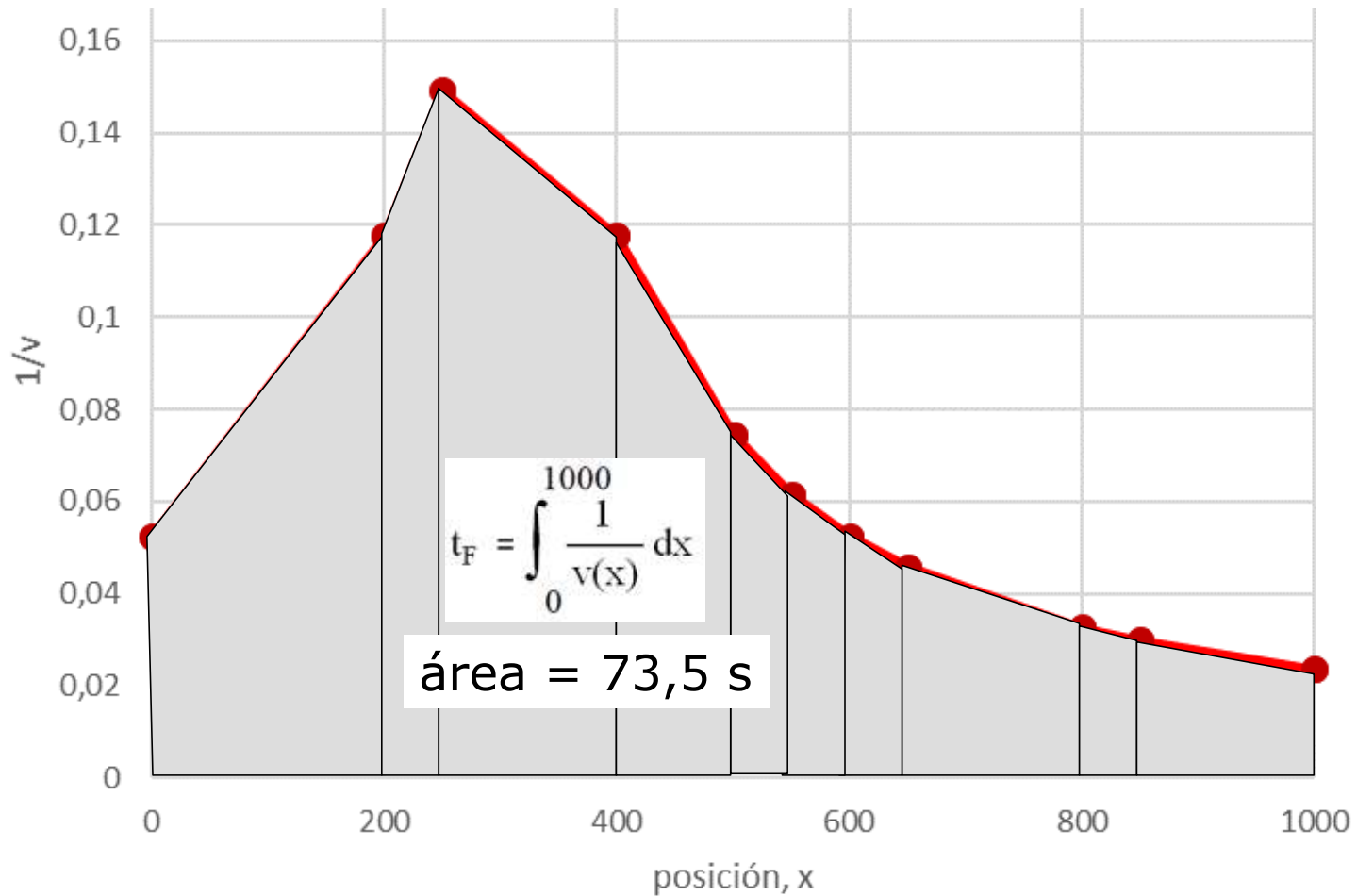
Asumiendo que la velocidad en todo el intervalo es igual a la velocidad medida al inicio del intervalo...



Asumiendo que la velocidad en todo el intervalo es igual a la velocidad medida al final del intervalo...

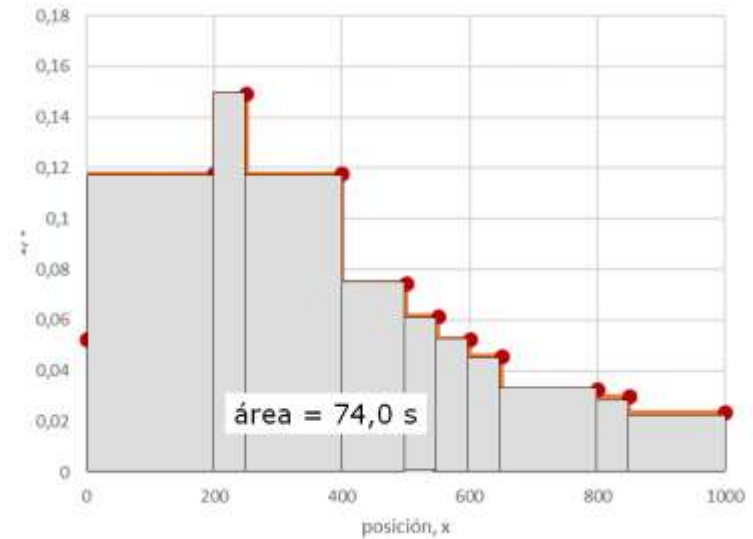
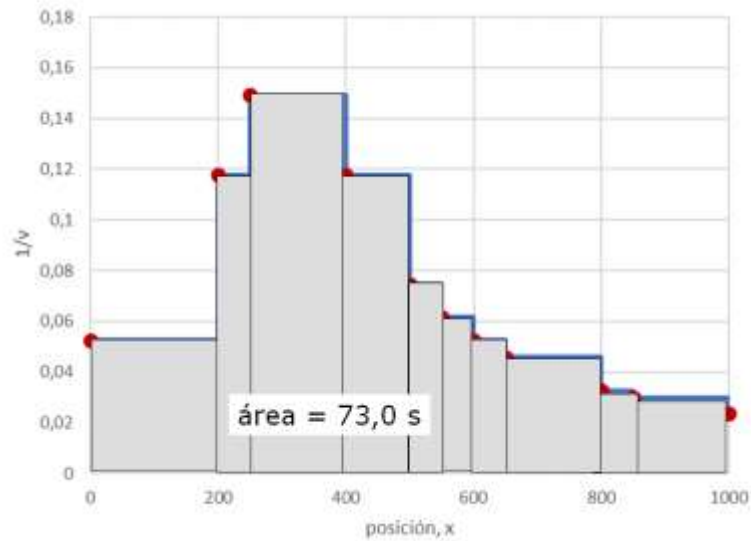


Asumiendo que $1/v$ varía linealmente entre los valores al inicio y al final de cada intervalo

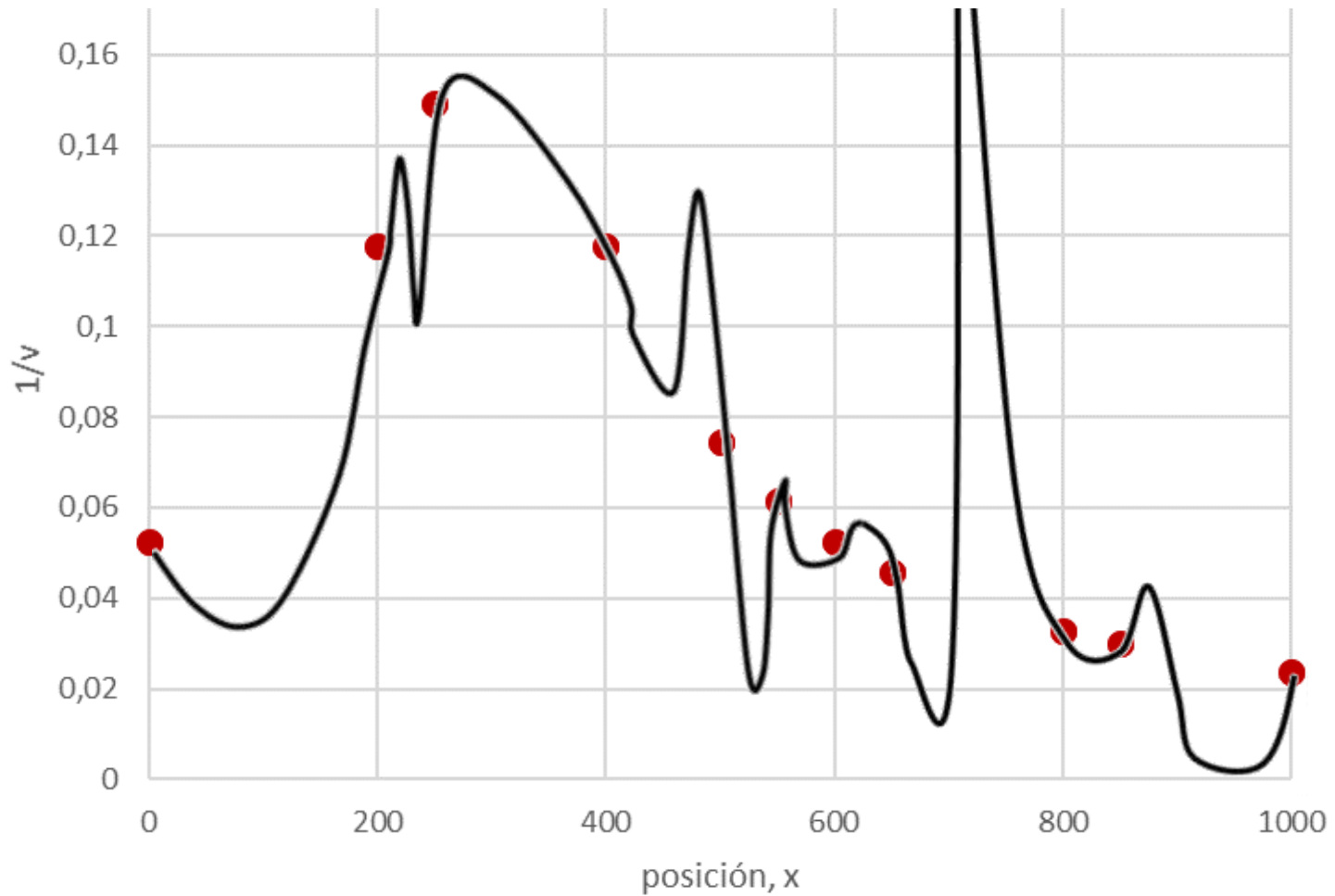


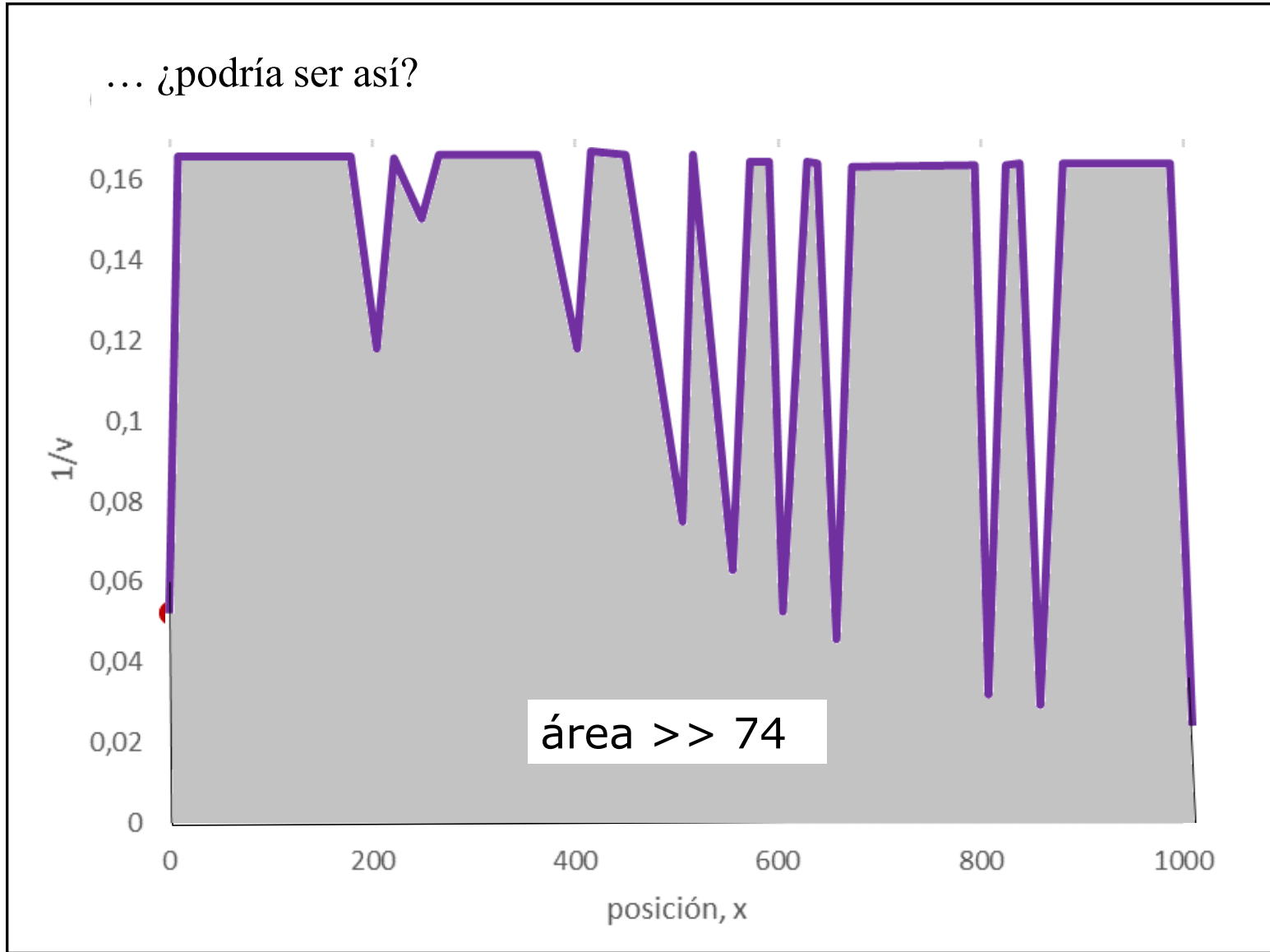
Aún cuando tomemos alguna de las anteriores como “valor aproximado” ¿podremos estimar cuál es el rango de error?

¿Son estos los casos extremos?
¿podré decir que está entre 73,0 y 74,0 s?



... pero ¿quién puede asegurar que ésta no sea la curva?



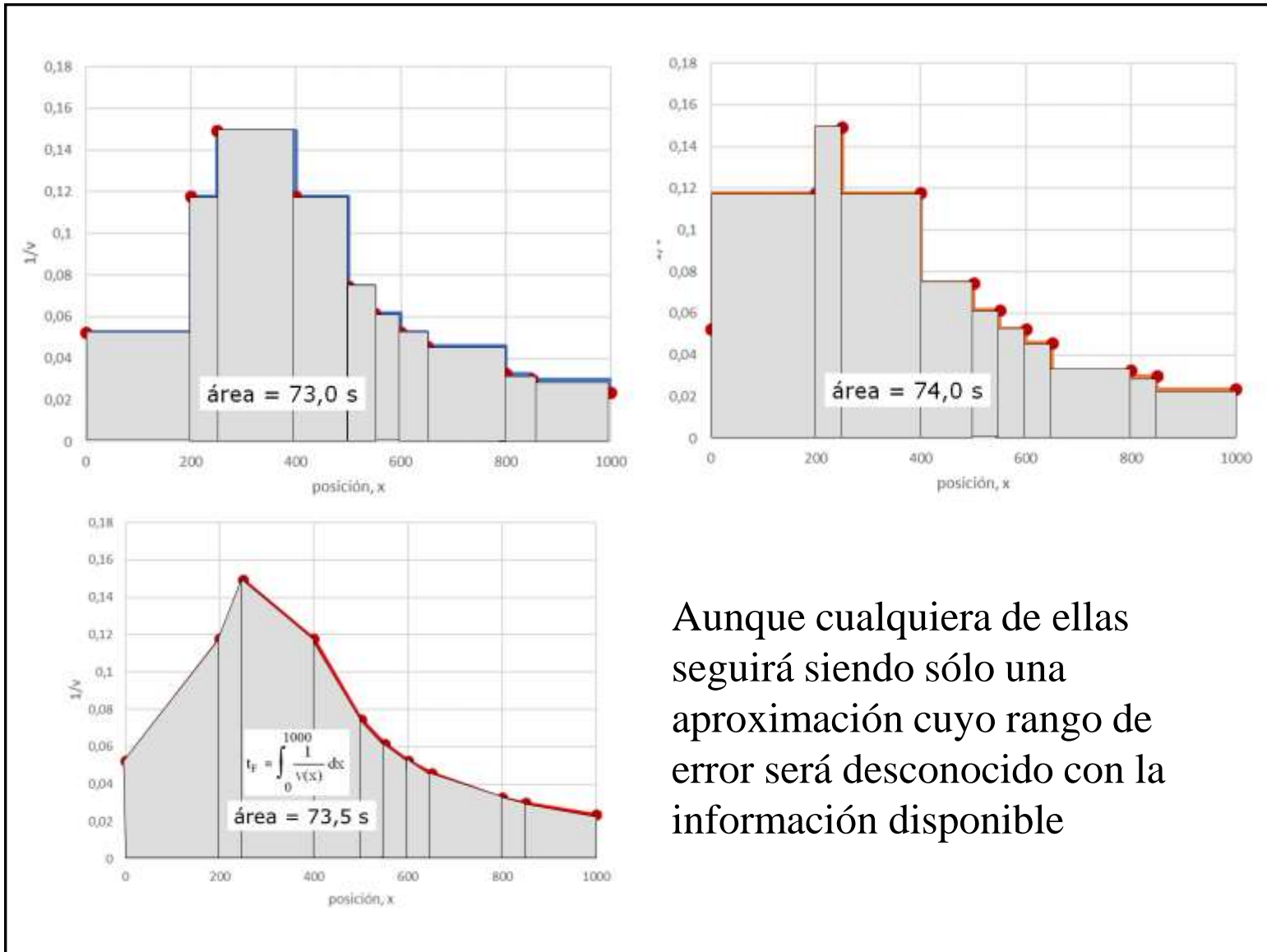


Aún cuando tomemos alguna de las anteriores como “valor aproximado” ¿podremos estimar cuál es el rango de error?

No podemos resolver el problema, a menos que tengamos algo más de información...

Supongamos, por ejemplo, que sabemos que la velocidad entre cada punto donde se midió fue variando “suavemente”

En ese caso, es más dable esperar que la curva se pueda aproximar por las primeras...



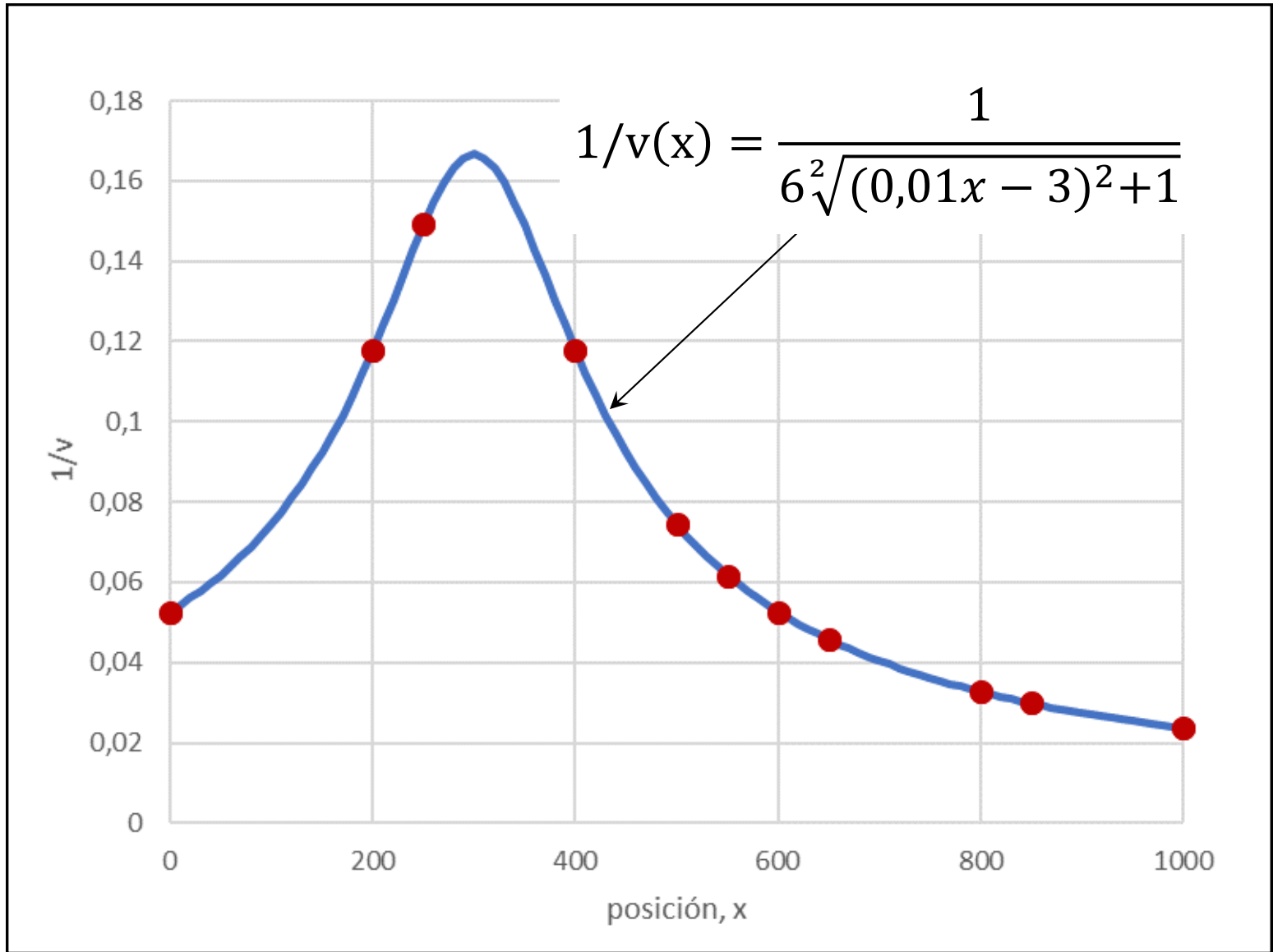
Aunque cualquiera de ellas seguirá siendo sólo una aproximación cuyo rango de error será desconocido con la información disponible

NOTA: Luego de trabajar con la tabla nos informan que en realidad el móvil estaba comandado con un controlador que generaba una velocidad que dependía de la posición según la siguiente fórmula:

$$v(x) = 6\sqrt[2]{(0,01x - 3)^2 + 1}$$

Entonces

$$1/v(x) = \frac{1}{6\sqrt[2]{(0,01x - 3)^2 + 1}}$$



NOTA: Luego de trabajar con la tabla nos informan que en realidad el móvil estaba comandado con un controlador que generaba una velocidad que dependía de la posición según la siguiente fórmula:

$$v(x) = 6\sqrt{(0,01x - 3)^2 + 1}$$

Entonces
$$1/v(x) = \frac{1}{6\sqrt{(0,01x - 3)^2 + 1}}$$

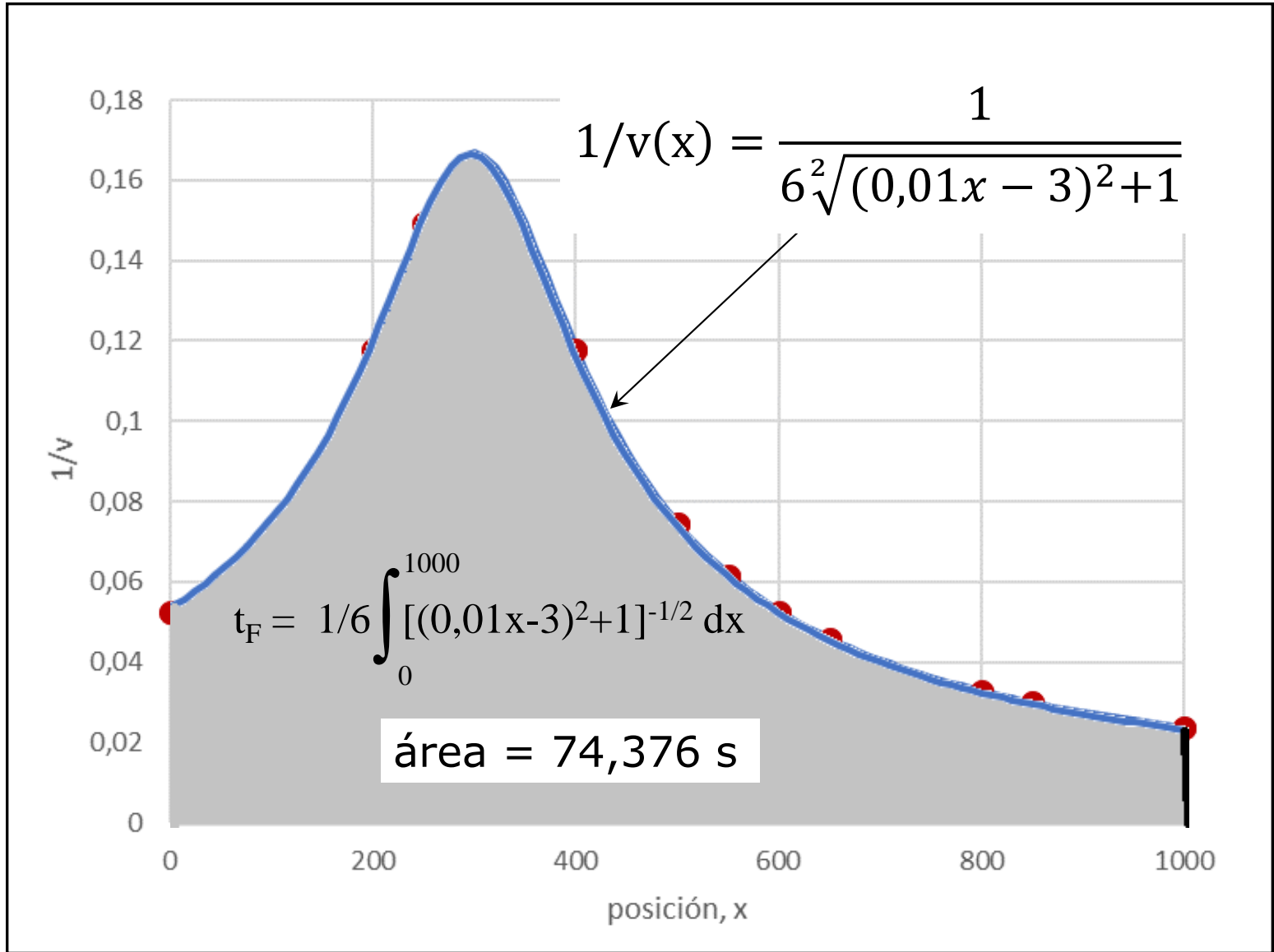
$$f(x) = \operatorname{arc\,sinh} x$$

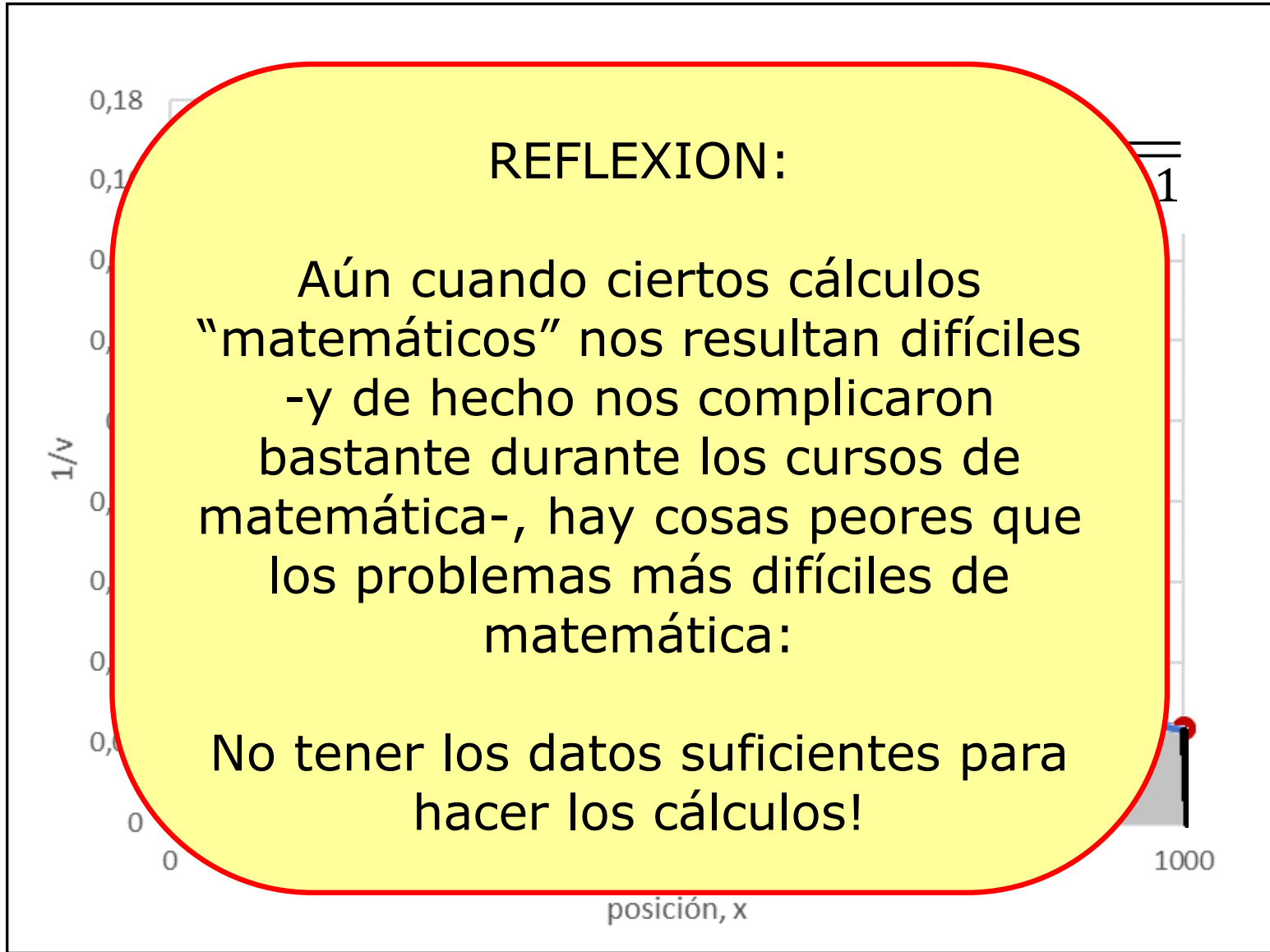
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f(x) = (100/6) \operatorname{arc\,sinh} (0,01x - 3)$$

$$f'(x) = \frac{(100/6) 0,01}{\sqrt{(0,01x - 3)^2 + 1}}$$

$$\begin{aligned} t_F &= \frac{1}{6} \int_0^{1000} [(0,01x-3)^2 + 1]^{-1/2} dx \\ &= (100/6) [\operatorname{arc\,sinh} (10 - 3) - \operatorname{arc\,sinh} (-3)] = 74,376 \end{aligned}$$





Varios ejemplos

Sistema de inecuaciones

- 4 En una planta industrial se utilizan las materias primas A y B con las que se producen los productos X e Y.

Para fabricar X se emplea 10% en peso de A y 20% en peso de B; y para fabricar Y se emplea 15% en peso de A y 5% en peso de B.

Las ganancias que dejan X e Y son 3.000 y 2000 usd/ton respectivamente.

Por un tiempo sólo se dispondrá de 750 kg de A y 600 kg de B

¿Qué cantidades de X e Y habría que fabricar para maximizar las ganancias?

- 4 En una planta industrial se utilizan las materias primas A y B con las que se producen los productos X e Y.
Para fabricar X se emplea 10% en peso de A y 20% en peso de B; y para fabricar Y se emplea 15% en peso de A y 5% en peso de B.
Las ganancias que dejan X e Y son 3.000 y 2000 usd/ton respectivamente.
Por un tiempo sólo se dispondrá de 750 kg de A y 600 kg de B
¿Qué cantidades de X e Y habría que fabricar para maximizar las ganancias?

Si $[X] \equiv$ ton fabricadas de X e $[Y] \equiv$ ton fabricadas de Y, entonces

$$G = \text{ganancia} = 3000 [X] + 2000 [Y]$$

$$\text{Cantidad consumida de A} \equiv [A] = 0,1 [X] + 0,15 [Y] \leq 0,75$$

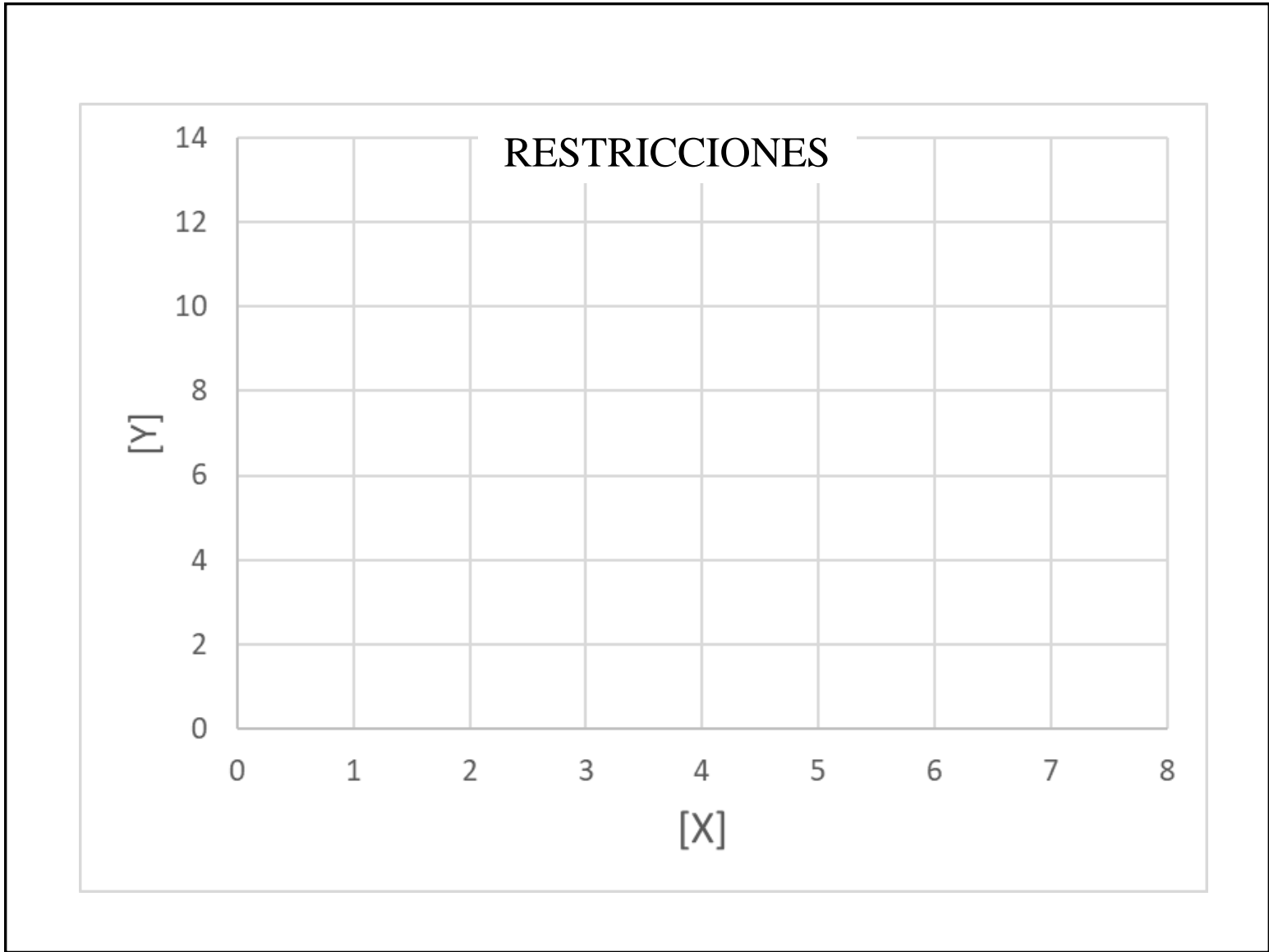
$$\text{Cantidad consumida de B} \equiv [B] = 0,2 [X] + 0,05 [Y] \leq 0,6$$

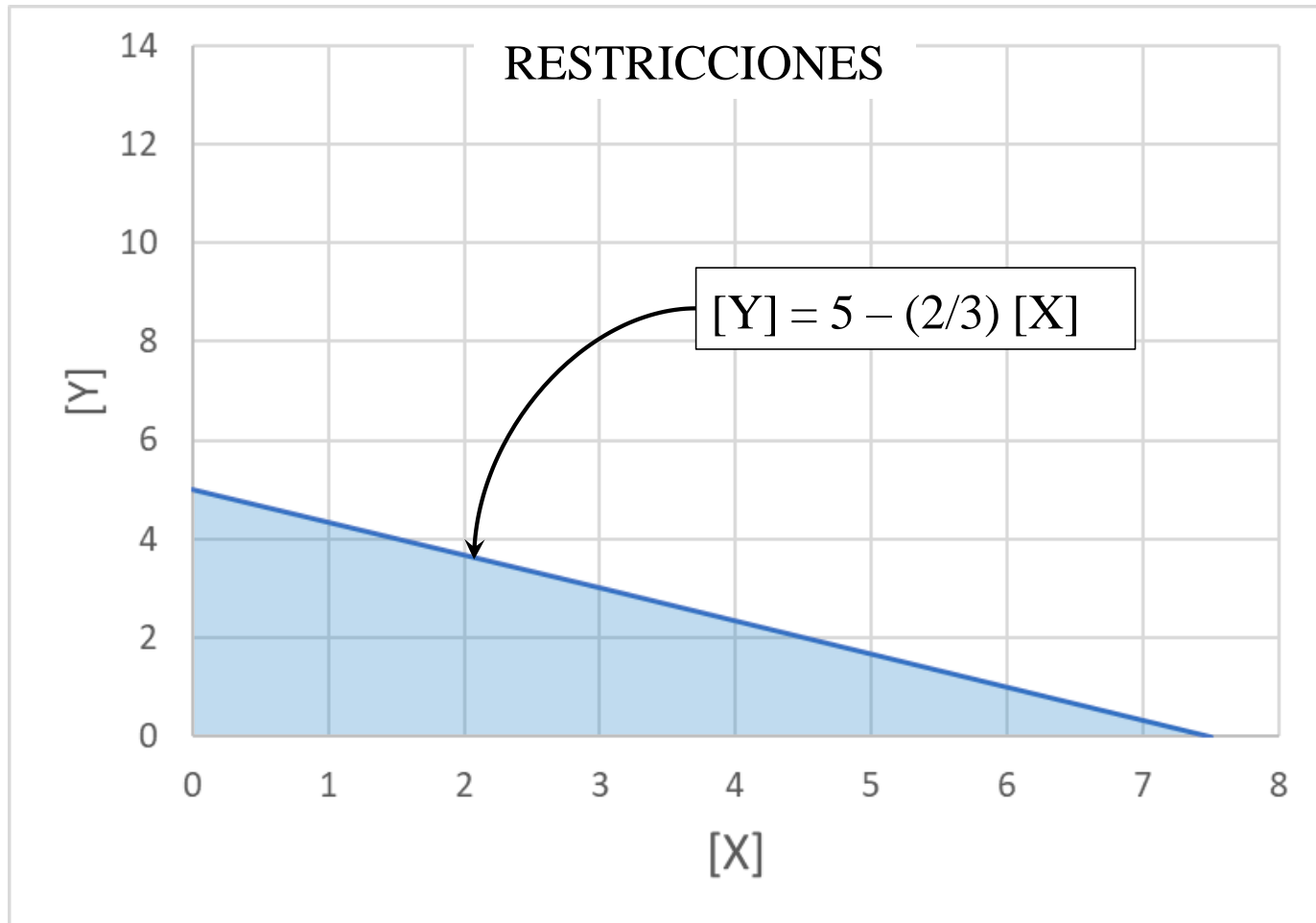
Debemos maximizar $G = 3000 [X] + 2000 [Y]$

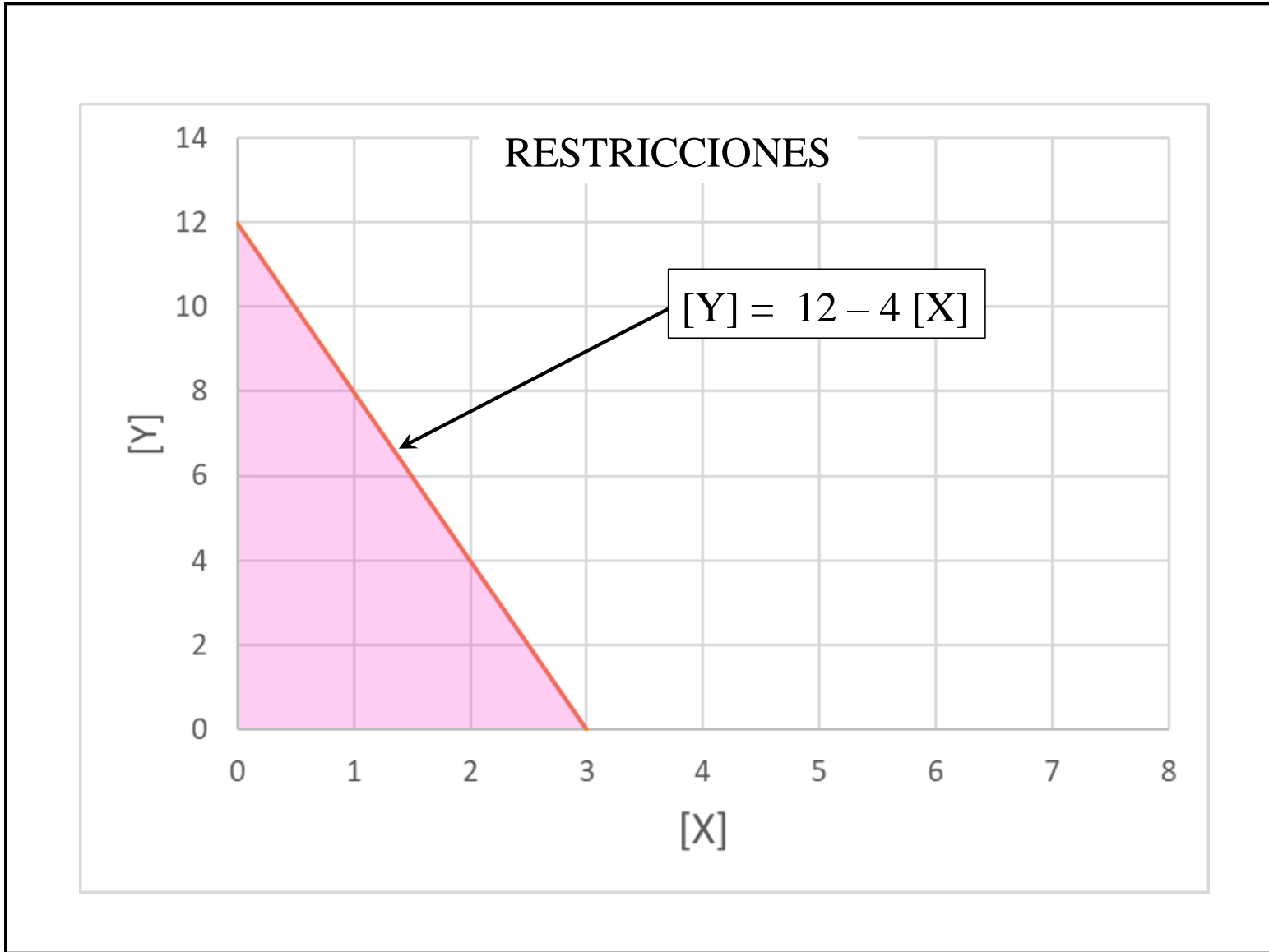
con las restricciones:

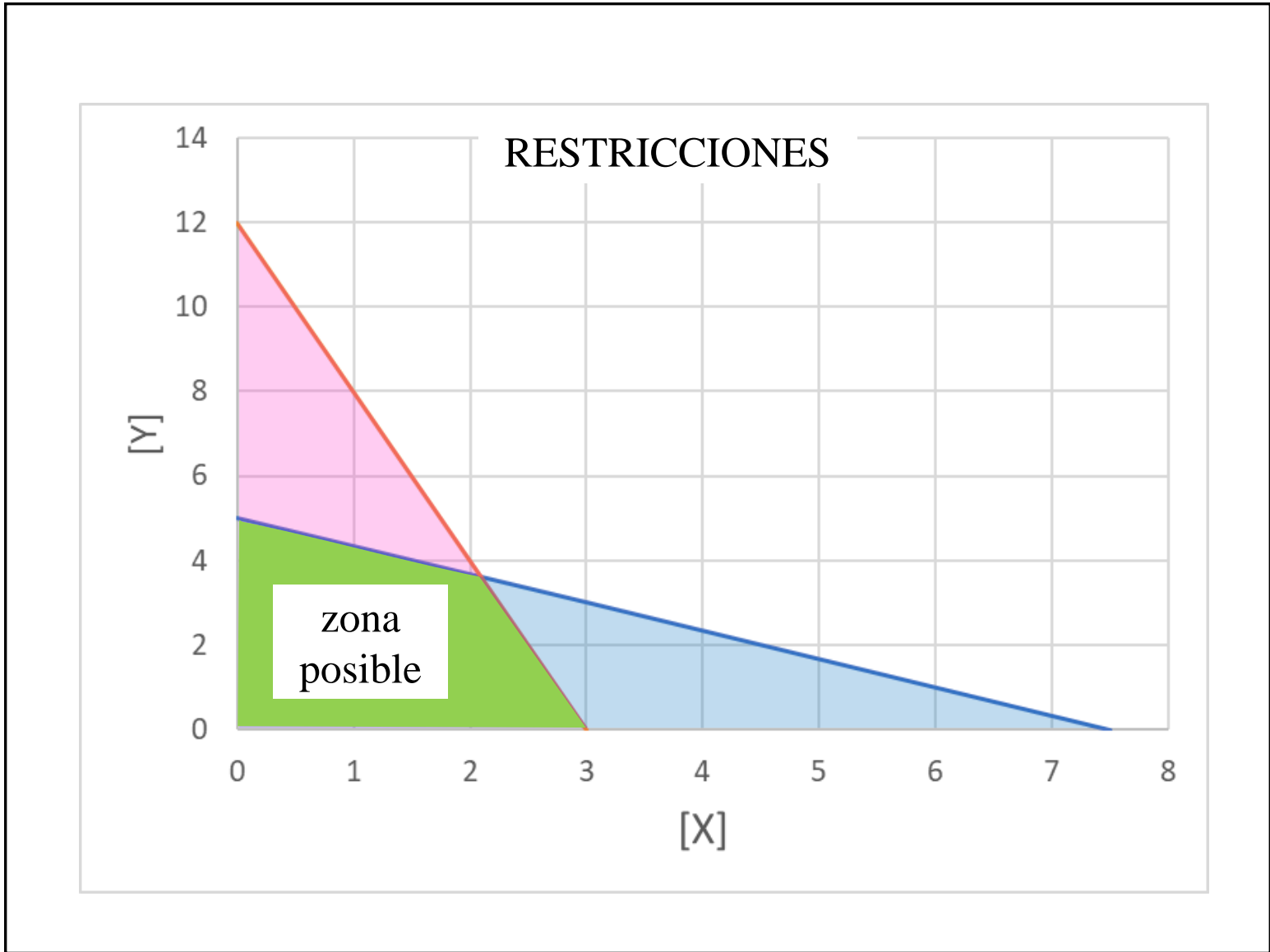
$$[Y] \leq (0,75/0,15) - (0,1/0,15) [X] = 5 - (2/3) [X]$$

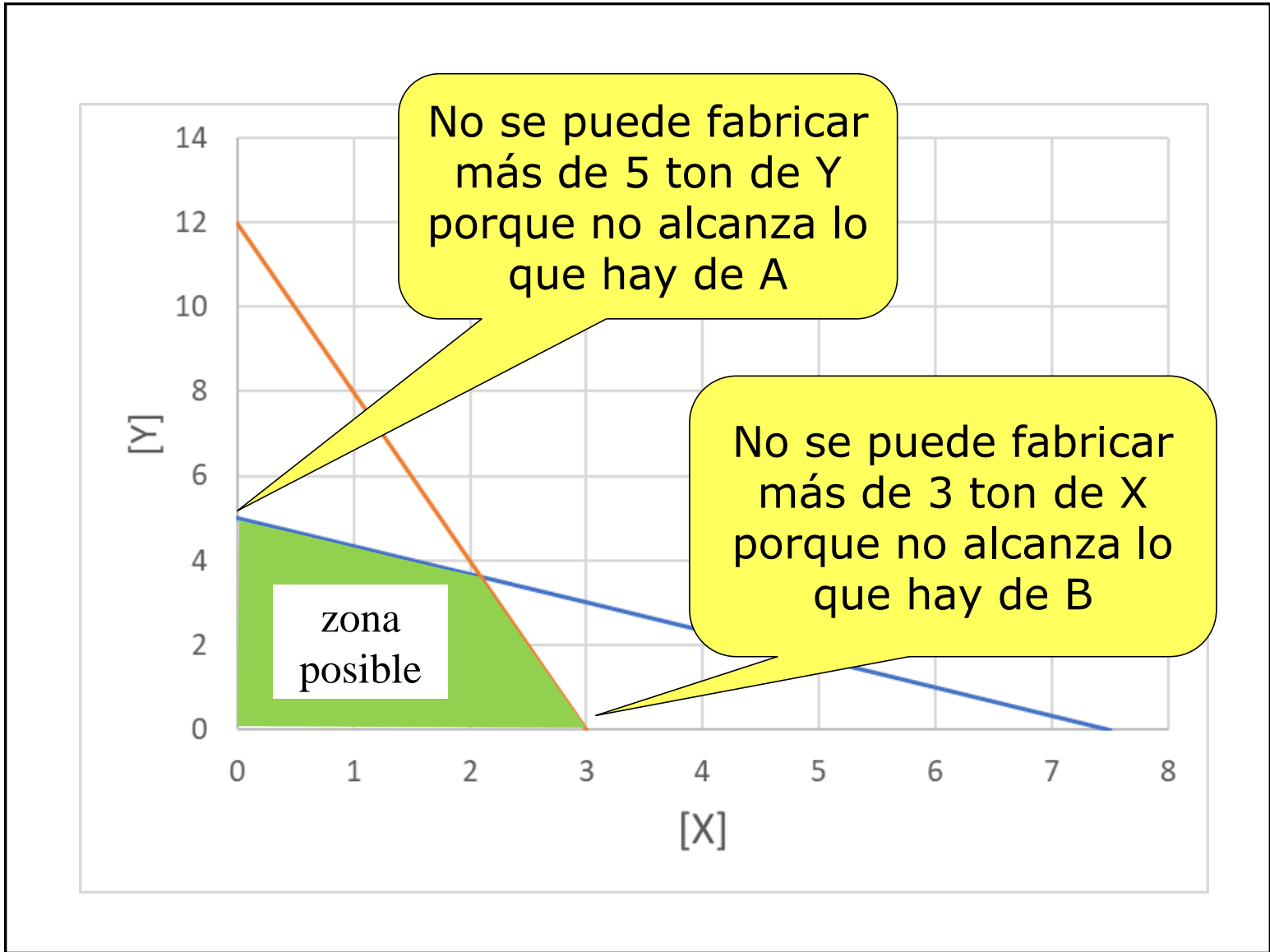
$$[Y] \leq (0,6/0,05) - (0,2/0,05) [X] = 12 - 4 [X]$$

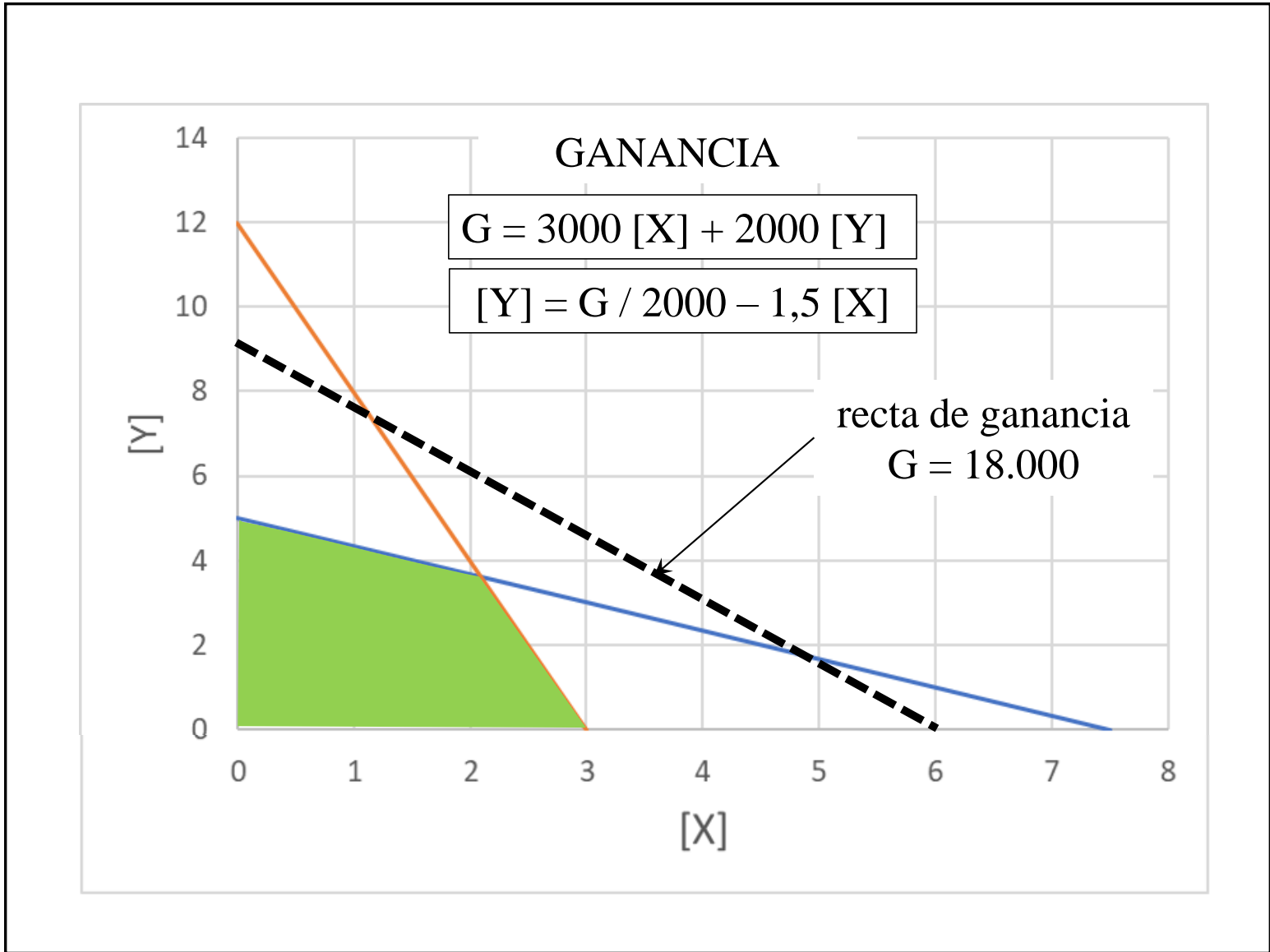


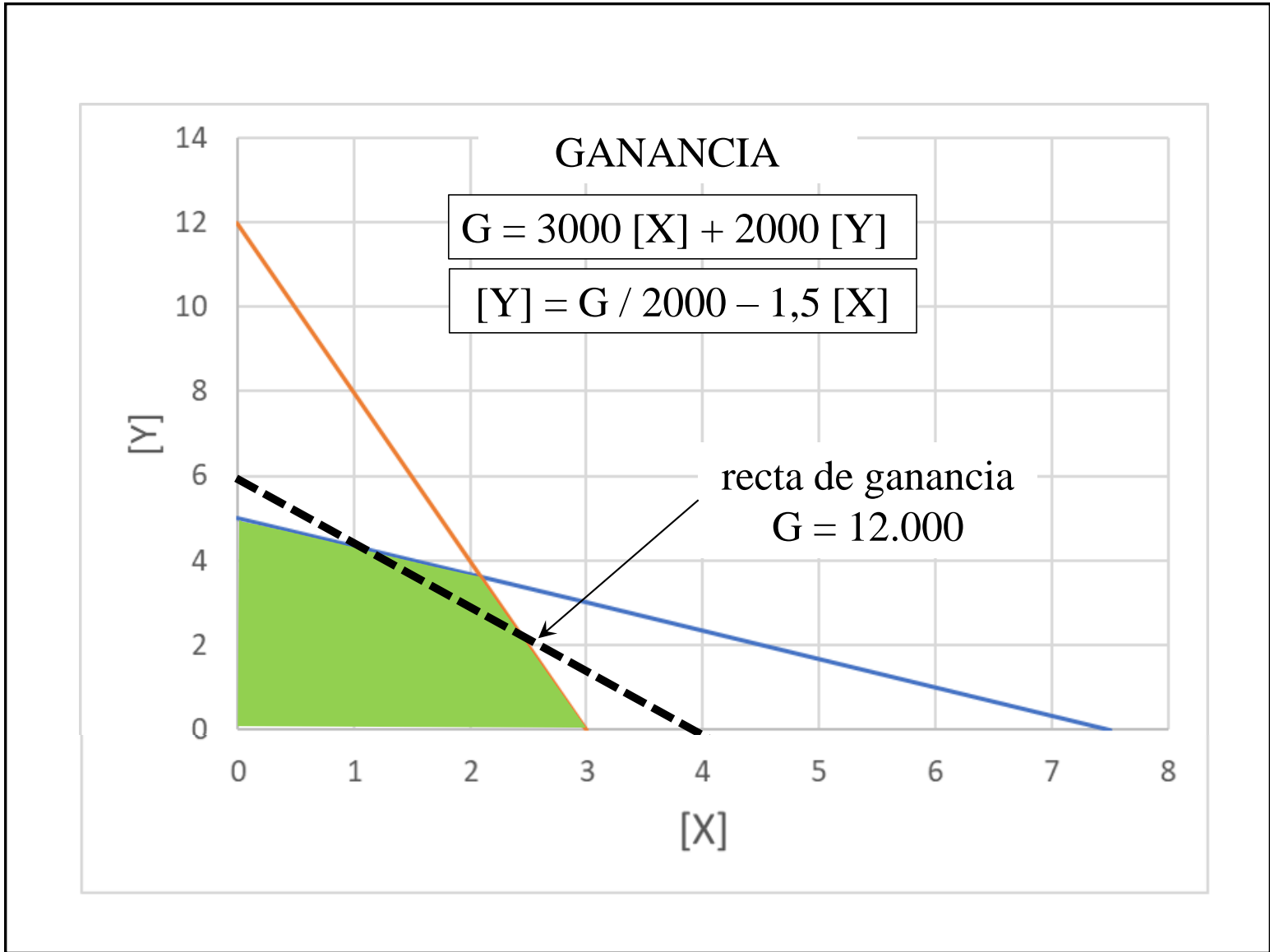


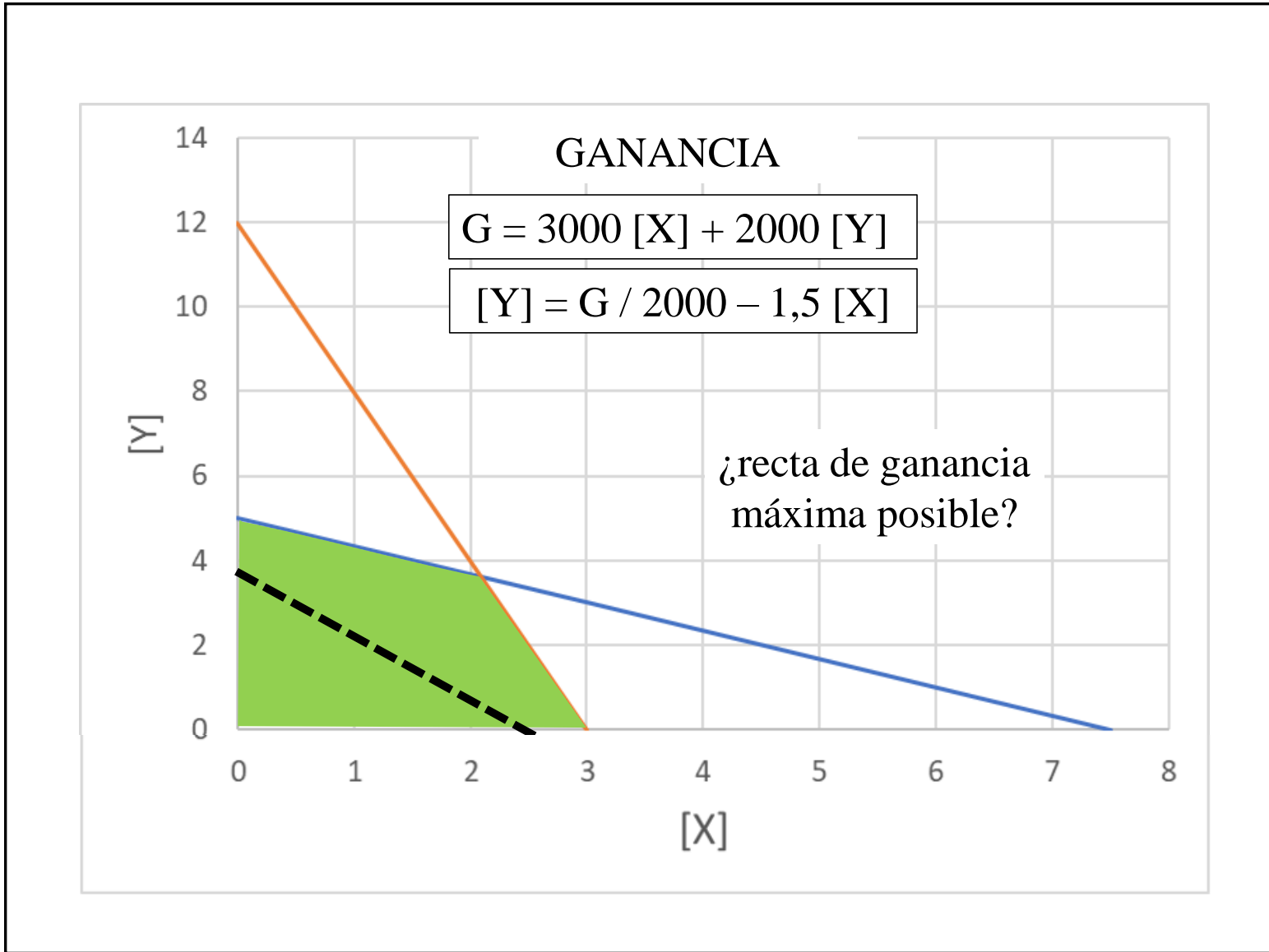


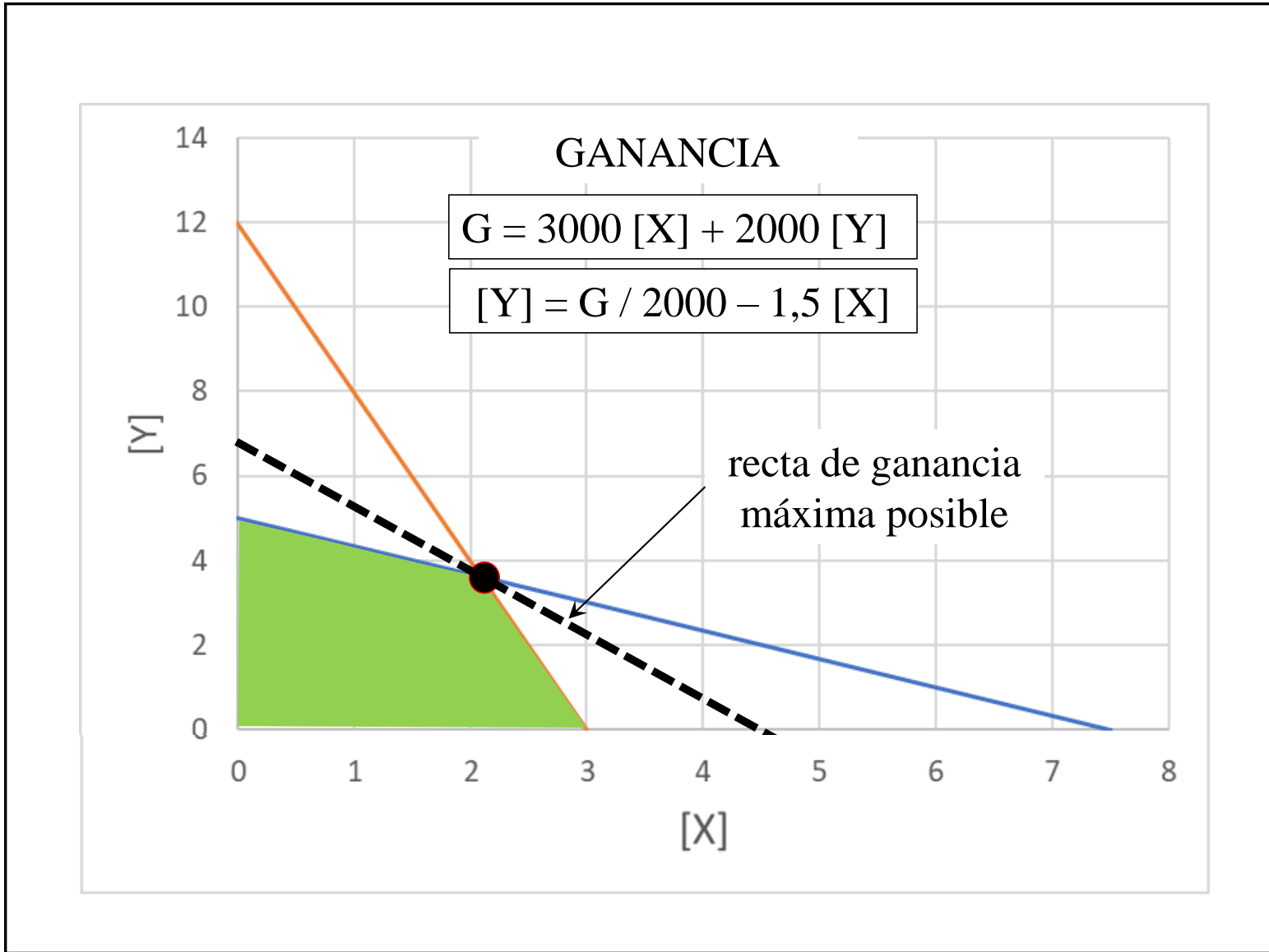


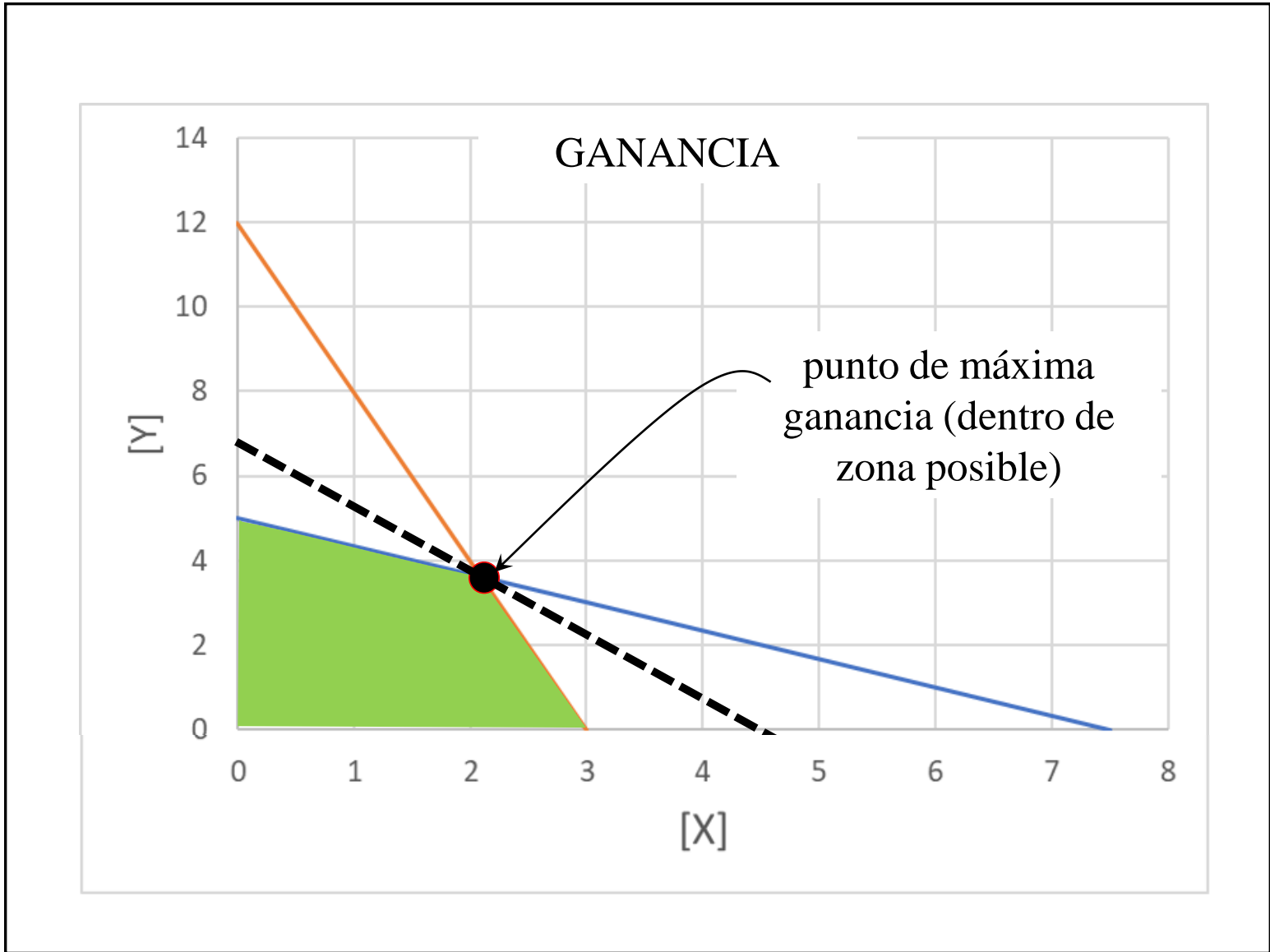








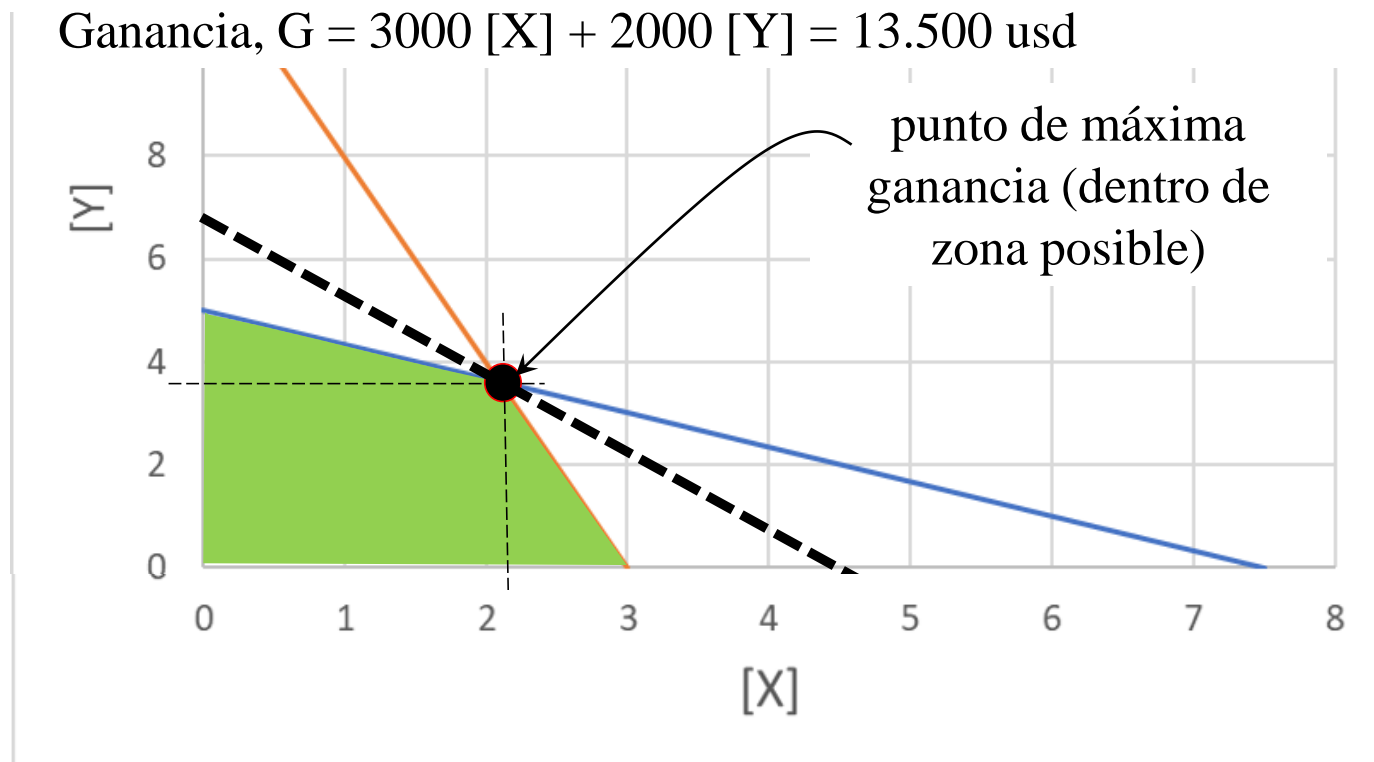




Punto de máxima ganancia es la intersección de las dos rectas:

$$\left. \begin{array}{l} [Y] = 5 - (2/3) [X] \\ [Y] = 12 - 4 [X] \end{array} \right\} \begin{array}{l} [X] = 2,1 \text{ ton} \\ [Y] = 3,6 \text{ ton} \end{array}$$

Ganancia, $G = 3000 [X] + 2000 [Y] = 13.500 \text{ usd}$



Resolución usando el complemento “Solver” de Excel

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following data:

	A	B	C
1			
2			
3			
4	Variables (a determinar)		
5	Cantidad de X a producir	[X]	2,1
6	Cantidad de Y a producir	[Y]	3,6
7			
8	Restricciones		
9	uso de A	0,1 [X] + 0,15 [Y] <= 0,75	0,75
10	uso de B	0,2 [X] + 0,05 [Y] <= 0,6	0,6
11			
12	Objetivo (a maximizar)		
13			
14	Ganancia	3000 [X] + 2000 [Y]	13.500
15			
16			

The Solver Parameters dialog box is configured as follows:

- Establecer objetivo: \$C\$14
- Para: Máx Mín Valor de: 0
- Cambiando las celdas de variables: \$C\$5:\$C\$6
- Sujeto a las restricciones:
 - \$C\$9 <= 0,75
 - \$C\$10 <= 0,6
- Convertir variables sin restricciones en no negativas
- Método de resolución: Simplex LP

Varios ejemplos

Una incógnita, una ecuación, pero datos empíricos

- 5 Determine la temperatura en °C de CO₂ a una presión de 55,4 bar sabiendo que el volumen molar es de 0,52 l/mol.

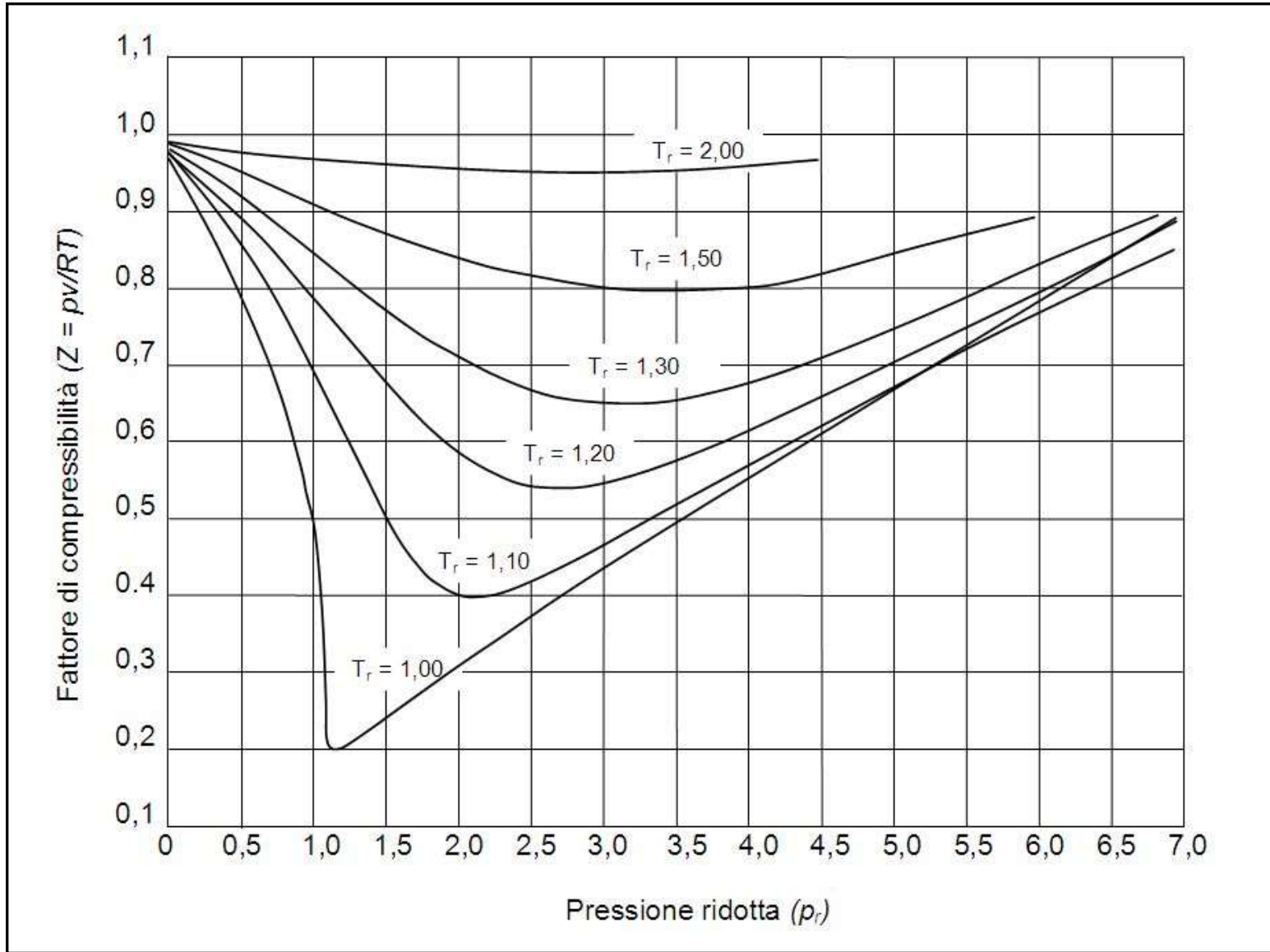
En esas condiciones el CO₂ **no se comporta como gas ideal** y es más apropiado usar factor de compresibilidad que se puede obtener del gráfico anexo.

Datos:

$P_c = 73,9$ bar

$T_c = 304,25$ K

$R = 0,08314472$ bar l/(K mol)



Algoritmo de cálculo

Usamos como “ecuación de estado”: $P V = Z n R T$
(donde Z es el factor de compresibilidad)

De la anterior “despejamos” T según: $T = P V / (n R Z)$

Con los datos del problema disponemos de $P V / (n R) = 346,48 \text{ K}$

$$T = 346,48 / Z$$

Determine la temperatura en °C de CO₂ a una presión de 55,4 bar sabiendo que el volumen molar es de 0,52 l/mol.

En esas condiciones el CO₂ **no se comporta como gas ideal** y es más apropiado usar factor de compresibilidad que se puede obtener del gráfico anexo.

Datos:

P_c=73,9 bar

T_c=304,25 K

R = 0,08314472 bar l/(K mol)

Algoritmo de cálculo

Usamos como “ecuación de estado”: $P V = Z n R T$
(donde Z es el factor de compresibilidad)

De la anterior “despejamos” T según: $T = P V / (n R Z)$

Con los datos del problema disponemos de $P V / (n R) = 346,48 \text{ K}$

$$T = 346,48 / Z$$

y para hallar Z usamos el gráfico (o la tabla) con datos de P_r y T_r .

Determine la temperatura en °C de CO_2 a una presión de 55,4 bar sabiendo que el volumen molar es de 0,52 l/mol.

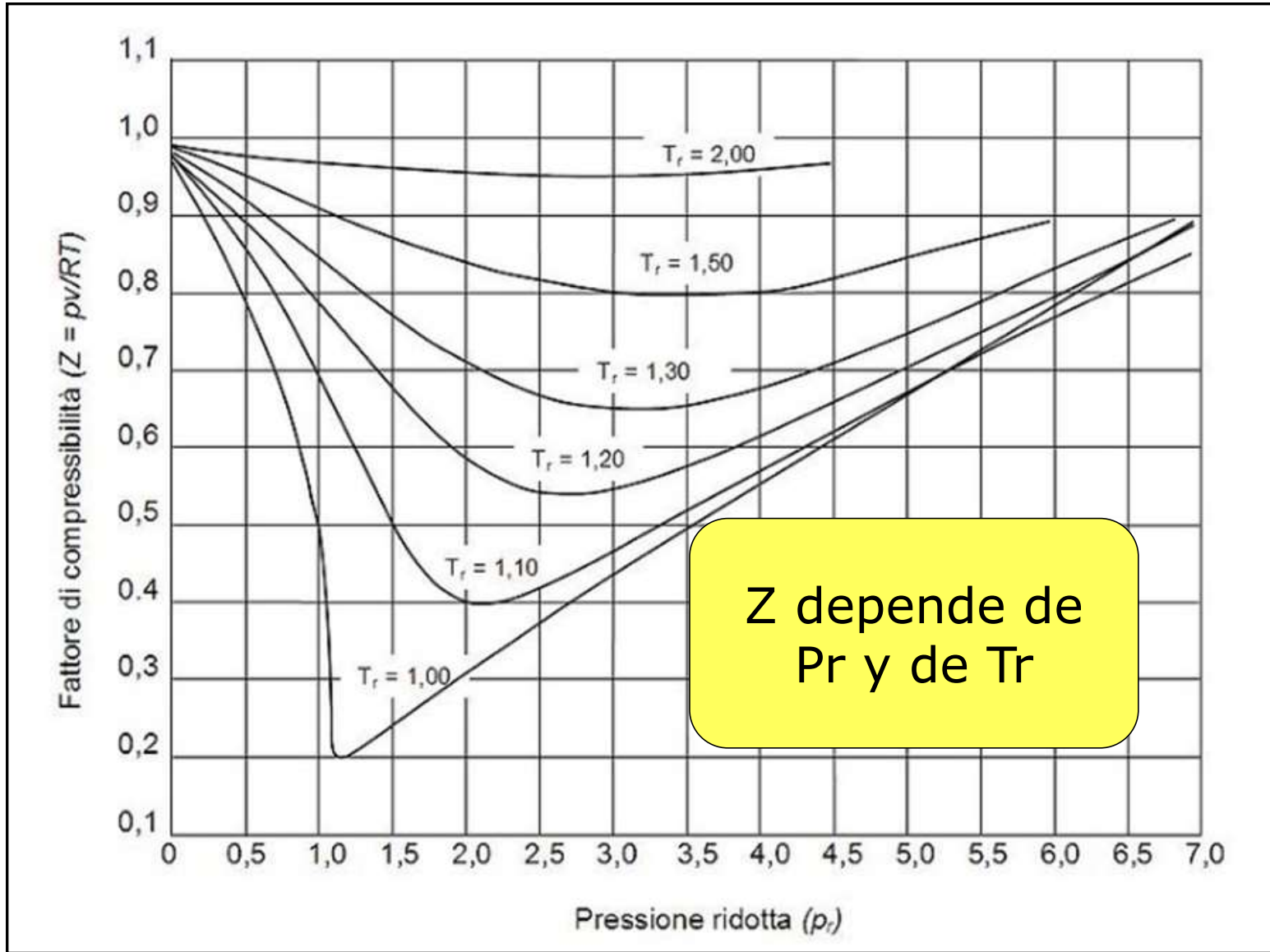
En esas condiciones el CO_2 **no se comporta como gas ideal** y es más apropiado usar factor de compresibilidad que se puede obtener del gráfico anexo.

Datos:

$P_c = 73,9 \text{ bar}$

$T_c = 304,25 \text{ K}$

$R = 0,08314472 \text{ bar l/(K mol)}$



Z dipende de
Pr y de Tr

Algoritmo de cálculo

Usamos como “ecuación de estado”: $P V = Z n R T$
(donde Z es el factor de compresibilidad)

De la anterior “despejamos” T según: $T = P V / (n R Z)$

Con los datos del problema disponemos de $P V / (n R) = 346,48 \text{ K}$

$$T = 346,48 / Z$$

y para hallar Z usamos el gráfico (o la tabla) con datos de P_r y T_r .

$$P_r = P / P_c = 55,4 / 73,9 \approx 0,75$$

Determine la temperatura en °C de CO_2 a una presión de 55,4 bar sabiendo que el volumen molar es de 0,52 l/mol.

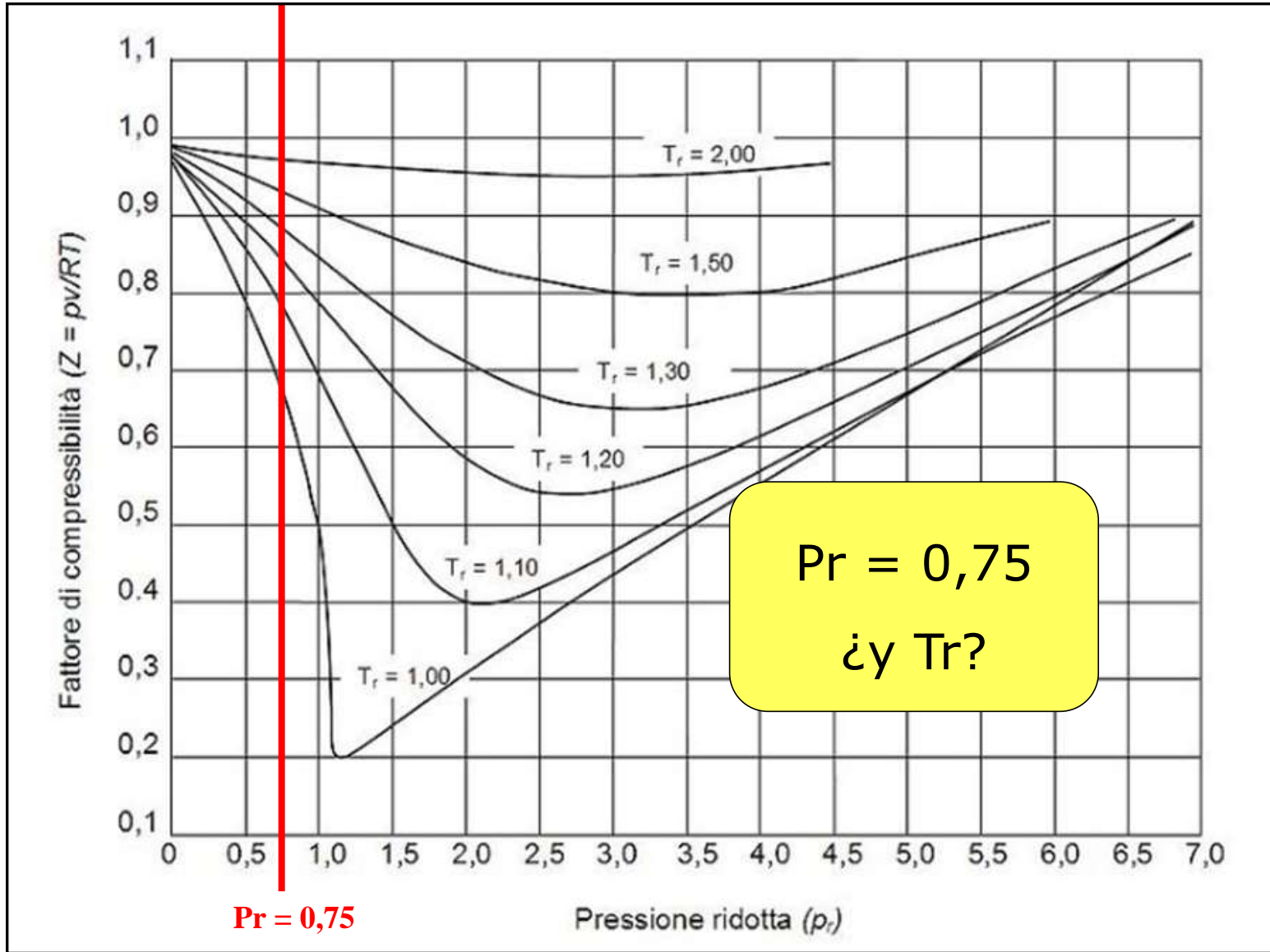
En esas condiciones el CO_2 **no se comporta como gas ideal** y es más apropiado usar factor de compresibilidad que se puede obtener del gráfico anexo.

Datos:

$$P_c = 73,9 \text{ bar}$$

$$T_c = 304,25 \text{ K}$$

$$R = 0,08314472 \text{ bar l/(K mol)}$$



Algoritmo de cálculo

Usamos como “ecuación de estado”: $P V = Z n R T$
(donde Z es el factor de compresibilidad)

De la anterior “despejamos” T según: $T = P V / (n R Z)$

Con los datos del problema disponemos de $P V / (n R) = 346,48 \text{ K}$

$$T = 346,48 / Z$$

y para hallar Z usamos el gráfico (o la tabla) con datos de P_r y T_r .

$$P_r = P / P_c = 55,4 / 73,9 \approx 0,75$$

$$T_r = T / T_c = T / 304,25$$

Determine la temperatura en °C de CO_2 a una presión de 55,4 bar sabiendo que el volumen molar es de 0,52 l/mol.

En esas condiciones el CO_2 **no se comporta como gas ideal** y es más apropiado usar factor de compresibilidad que se puede obtener del gráfico anexo.

Datos:

$P_c = 73,9 \text{ bar}$

$T_c = 304,25 \text{ K}$

$R = 0,08314472 \text{ bar l/(K mol)}$

Algoritmo de cálculo

Usamos como “ecuación de estado”: $P V = Z n R T$
(donde Z es el factor de compresibilidad)

De la anterior “despejamos” T según: $T = P V / (n R Z)$

Con los datos del problema disponemos de $P V / (n R) = 346,48 \text{ K}$

$$T = 346,48 / Z$$

y para hallar Z usamos el gráfico (o la tabla) con datos de P_r y T_r .

$$P_r = P / P_c = 55,4 / 73,9 \approx 0,75$$

$$T_r = T / T_c = T / 304,25$$

Para calcular T necesitamos Z , para
calcular Z necesitamos T_r , pero para
calcular T_r necesitamos T



Algoritmo de cálculo

Usamos como “ecuación de estado”: $P V = Z n R T$
(donde Z es el factor de compresibilidad)

De la anterior “despejamos” T según: $T = P V / (n R Z)$

Con los datos del problema disponemos de $P V / (n R) = 346,48 \text{ K}$

$$T = 346,48 / Z$$

y para hallar Z usamos el gráfico (o la tabla) con datos de P_r y T_r .

$$P_r = P / P_c = 55,4 / 73,9 \approx 0,75$$

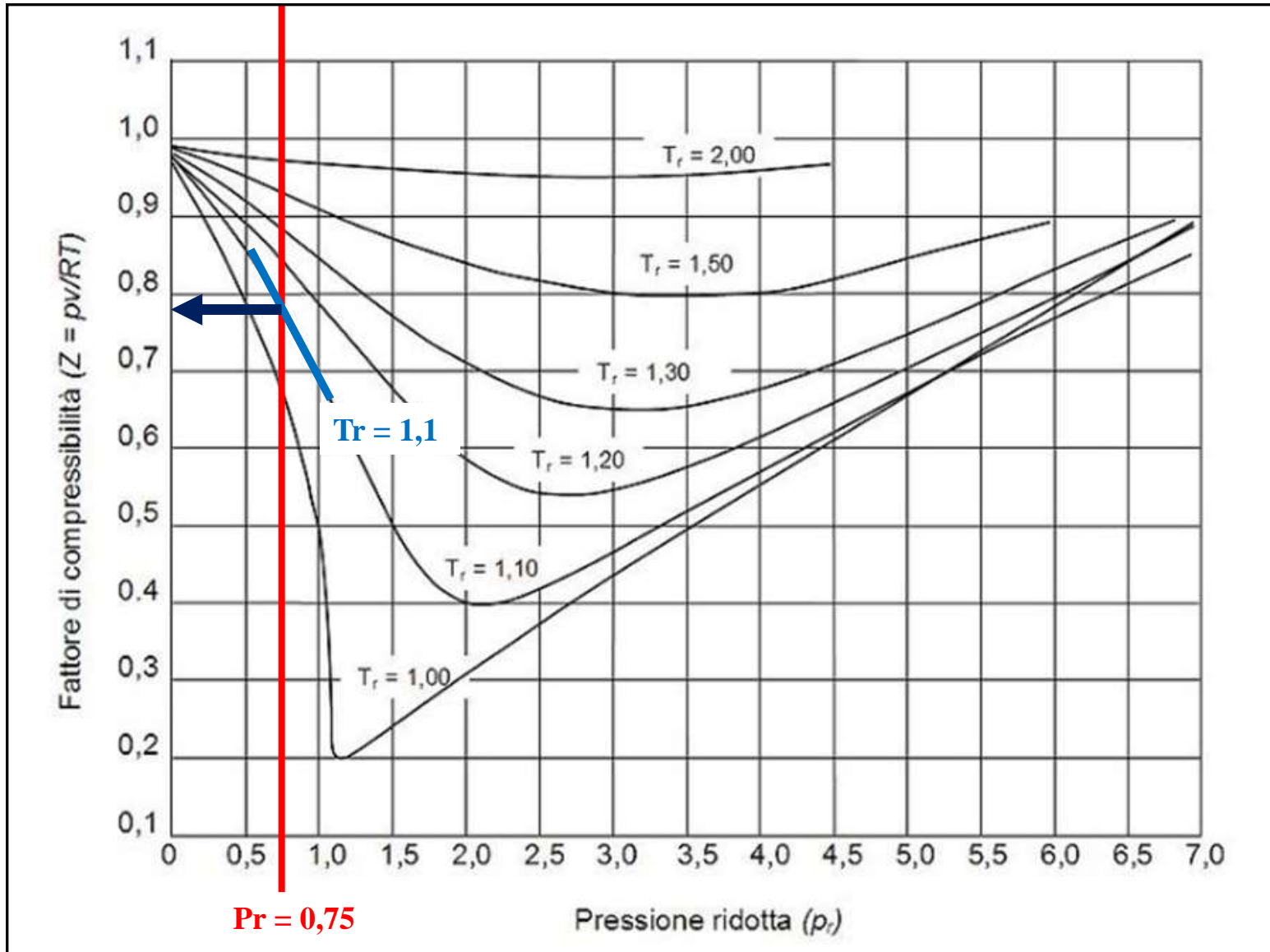
$$T_r = T / T_c = T / 304,25$$

Iteramos: $T \rightarrow T_r \rightarrow Z \rightarrow T$... y esperemos que “converja”.

Valor inicial (“semilla”) = ¿ ?

En este caso, podría usar como valor “semilla” el valor que tendría si fuera comportamiento ideal ($Z = 1$)

$$T = 346 \text{ K} \rightarrow T_r = 346 / 304,25 \approx 1,1 \rightarrow Z$$



Algoritmo de cálculo

Usamos como “ecuación de estado”: $P V = Z n R T$
(donde Z es el factor de compresibilidad)

De la anterior “despejamos” T según: $T = P V / (n R Z)$

Con los datos del problema disponemos de $P V / (n R) = 346,48 \text{ K}$

$$T = 346,48 / Z$$

y para hallar Z usamos el gráfico (o la tabla) con datos de P_r y T_r .

$$P_r = P / P_c = 55,4 / 73,9 \approx 0,75$$

$$T_r = T / T_c = T / 304,25$$

Iteramos: $T \rightarrow T_r \rightarrow Z \rightarrow T$... y esperemos que “converja”.

Valor inicial (“semilla”) =

En este caso, podría usar como valor “semilla” el valor que tendría si fuera comportamiento ideal ($Z = 1$)

$$T = 346 \text{ K} \rightarrow T_r = 346 / 304,25 \approx 1,1 \rightarrow Z \approx 0,78 \rightarrow T \approx 444 \text{ K}$$

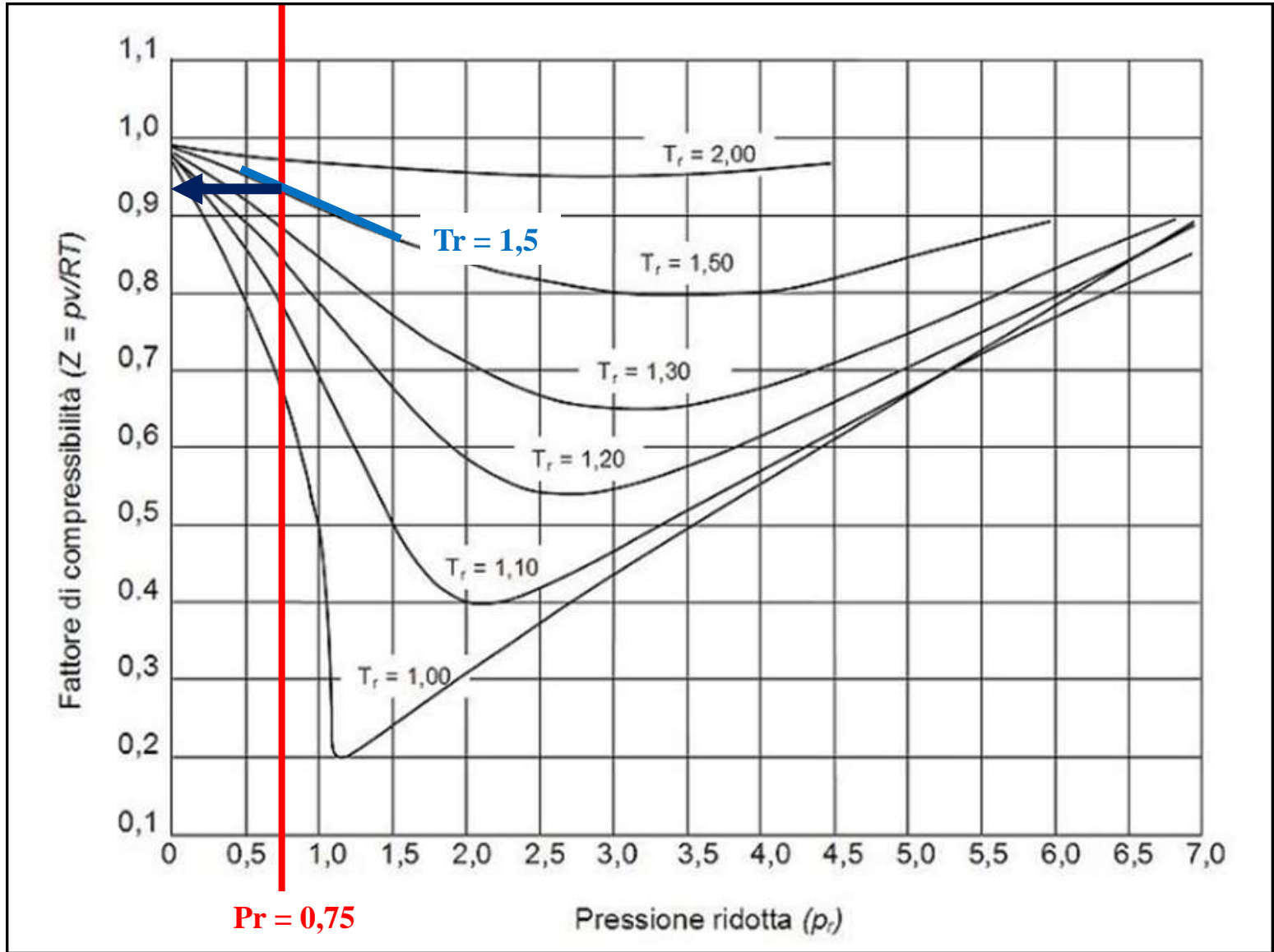
Iteramos: $T \rightarrow Tr \rightarrow Z \rightarrow T$... y esperemos que “converja”.

Valor inicial (“semilla”) =

En este caso, podría usar como valor “semilla” el valor que tendría si fuera comportamiento ideal ($Z = 1$)

$$T = 346 \text{ K} \rightarrow Tr = 346 / 304,25 \approx 1,1 \rightarrow Z \approx 0,78 \rightarrow T \approx 444 \text{ K}$$

$$T = 444 \text{ K} \rightarrow Tr = 444 / 304,25 \approx 1,5 \rightarrow Z$$



Iteramos: $T \rightarrow T_r \rightarrow Z \rightarrow T$

... y esperemos que “converja”.

Valor inicial (“semilla”) =

tomo el valor que tendría si fuera comportamiento ideal ($Z = 1$)

$T = 346 \text{ K} \rightarrow T_r = 346 / 304,25 \approx 1,1 \rightarrow Z \approx 0,78 \rightarrow T \approx 444 \text{ K}$

$T = 444 \text{ K} \rightarrow T_r = 444 / 304,25 \approx 1,5 \rightarrow Z \approx 0,93 \rightarrow T \approx 372 \text{ K}$

T (K)	T_r	Z	T (K)
346	1.1	0.78	445
444	1.5	0.93	372
372	1.2	0.85	407
407	1.3	0.87	398
398	1.3	0.87	398

CONVERGE

T = 398 K

NOTA 1

Si en vez de un gráfico par hallar Z tuviéramos una tabla...

Pr (presión reducida)	Z = factor de compresibilidad						
	Tr = 0,00	Tr = 1,00	Tr = 1,10	Tr = 1,20	Tr = 1,30	Tr = 1,50	Tr = 2,00
0,0							
0,5							
1,0							
1,5							
2,0							
2,5							
3,0							
3,5							
4,0							
4,5							
5,0							
5,5							
6,0							
6,5							
7,0							

NOTA 2

Si existiera un software (“calculadora”) que nos diera el valor de Z del CO_2 al ingresar los datos de T y P ...

En ese caso no es necesario recurrir a las tablas y gráficos (“arcaicos”)

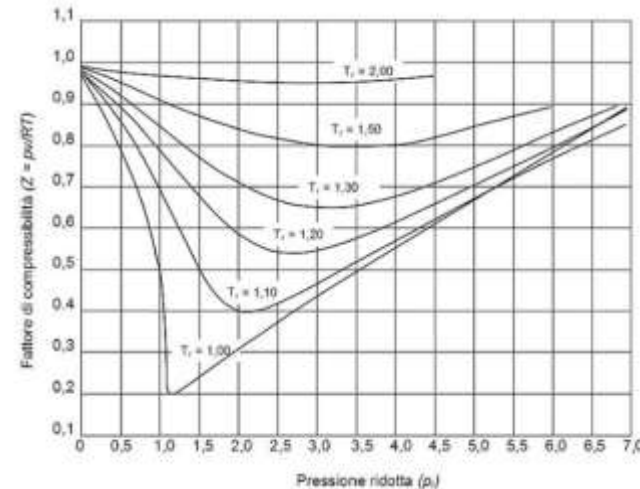
Aún así, sería cierto que:

$$P V = Z n R T$$
$$\text{y } Z = f(P, T)$$

de donde $T = P V / [n R f(T, P)]$

Pero salvo que f tenga una expresión analítica conocida y sencilla, será imposible despejar T de la igualdad anterior, por lo que la iteración sería el algoritmo más adecuado para resolver el problema.

La única diferencia estaría en que cada vez que necesitáramos Z , en vez de irlo a buscar a un gráfico (o tabla) lo encontraríamos rápidamente con el valor de T y P , y tal vez hasta podríamos “programar” la iteración.

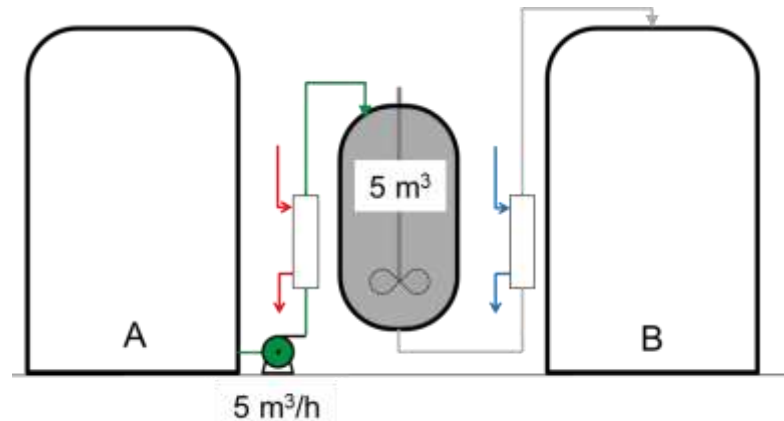


Ejercicio

Determinación de condiciones de operación

En un planta industrial se produce el producto de interés a través de un proceso en el que los reactivos reaccionan de manera irreversible en su pasaje de forma continua por un reactor de 5 m^3 .

Hasta ahora se necesitaba un tiempo de reacción de 1 hora para que la reacción se completara dejando un producto puro (sin reactivos sin reaccionar) y con una excelente calidad. Para permitir ese tiempo de reacción, el caudal de producción se ajustaba a $5 \text{ m}^3/\text{h}$.



Ejercicio

Determinación de condiciones de operación

En un planta industrial se produce el producto de interés a través de un proceso en el que los reactivos reaccionan de manera irreversible en su pasaje de forma continua por un reactor de 5 m^3 .

Hasta ahora se necesitaba un tiempo de reacción de 1 hora para que la reacción se completara dejando un producto puro (sin reactivos sin reaccionar) y con una excelente calidad. Para permitir ese tiempo de reacción, el caudal de producción se ajustaba a $5 \text{ m}^3/\text{h}$.

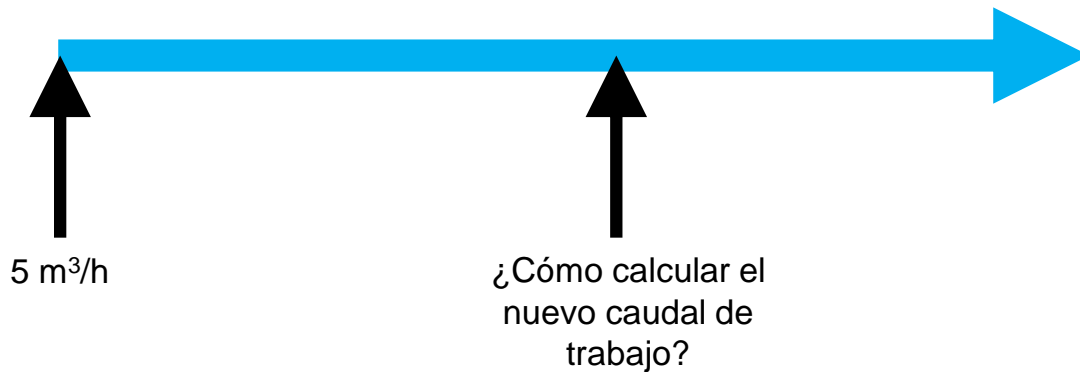
Se modificaron condiciones (cambio de catalizador, ajuste de temperatura, diseño de mezclador) para aumentar la velocidad de reacción y de esta manera poder producir más rápido.

NOTA: La idea es producir más rápido para reducir los costos por unidad. Pero si el tiempo de estadía en el reactor no alcanzara para que se complete la reacción, el producto saldría de mala calidad e invendible.

¿Cómo determinaría la nueva tasa de flujo?

Si el caudal fuera muy bajo, el reactor se sobraría, pero no lo aprovecharemos para bajar los costos

Si el caudal fuera muy alto, el tiempo de estadía será insuficiente y obtendremos un producto invendible

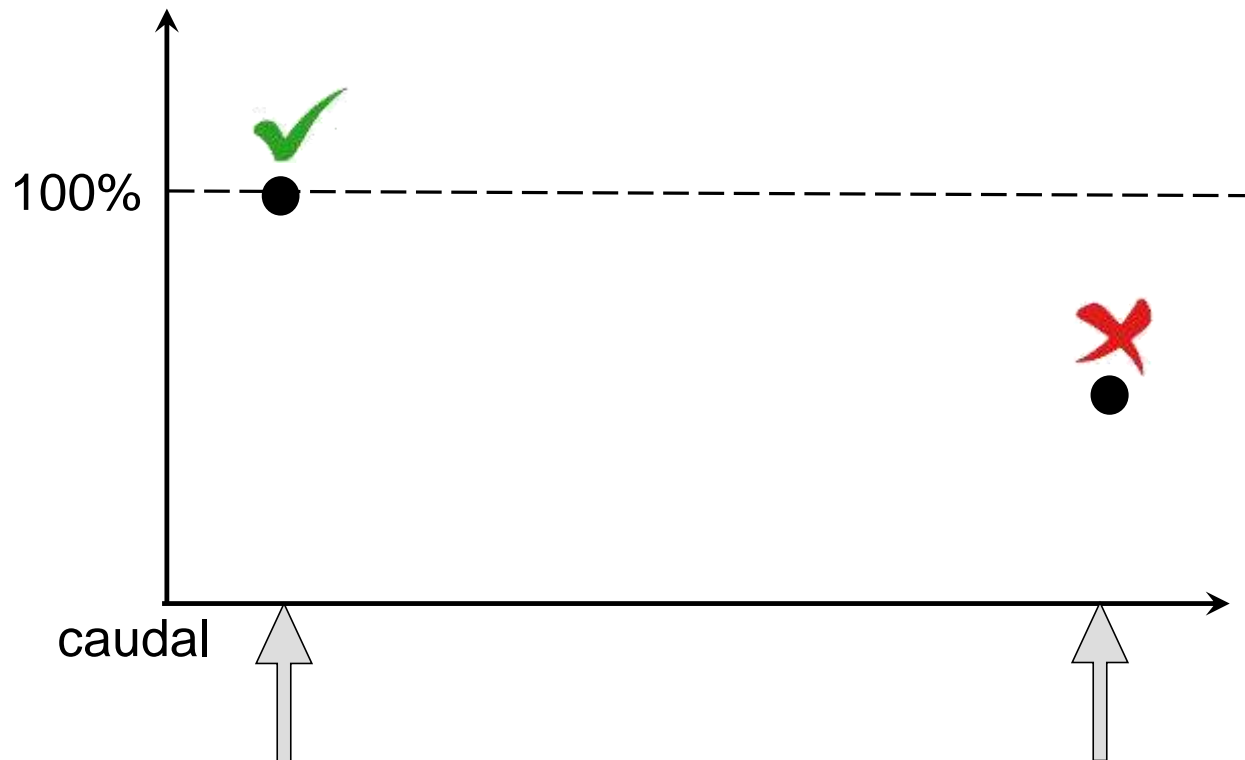


Aunque exista una relación entre el tiempo de estadía requerido, caudal máximo, temperatura de reacción, tipo de catalizador, geometría del agitador, velocidad de agitación, etc... no existe una función matemática que podamos usar para “hacer las cuentas”

$$Q_{\text{máximo}} = f(\text{temperatura, catalizador, geometría agitador, ...})$$

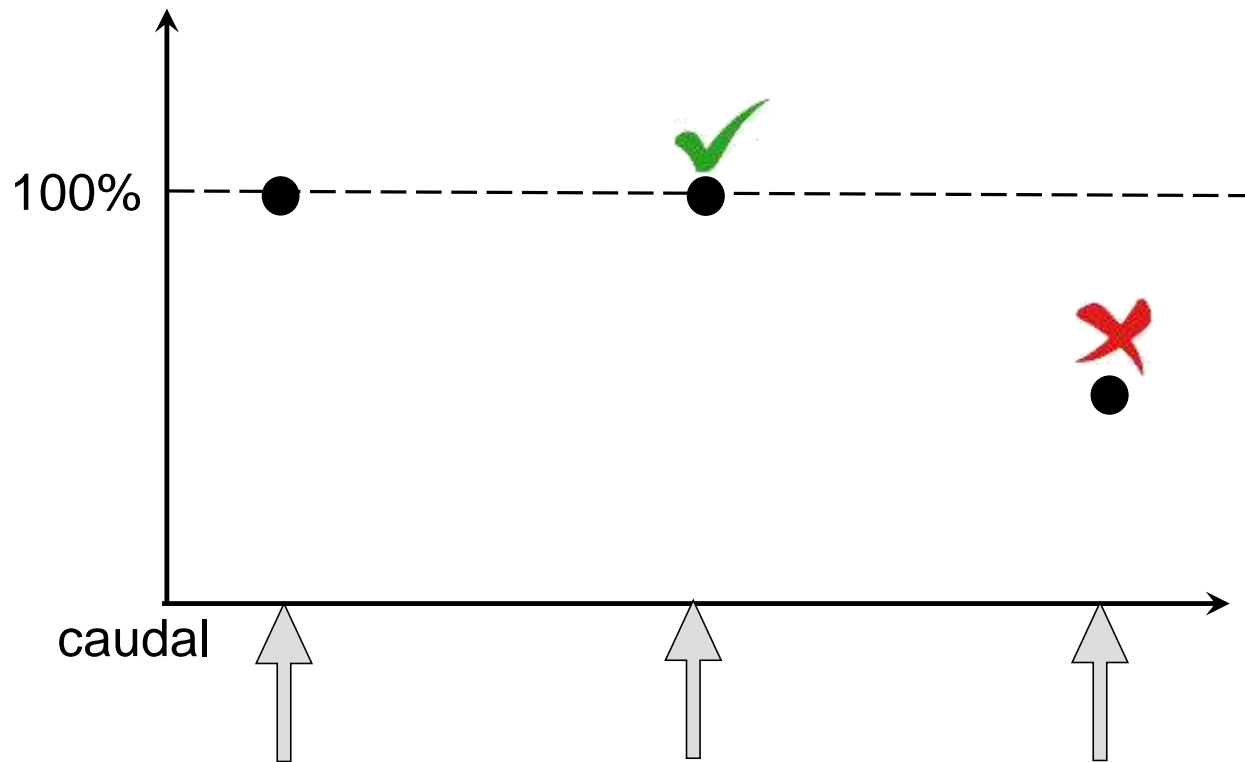
Para hallar el caudal podemos ir probando con una sucesión de valores de caudal usando el criterio del valor del medio

conversión



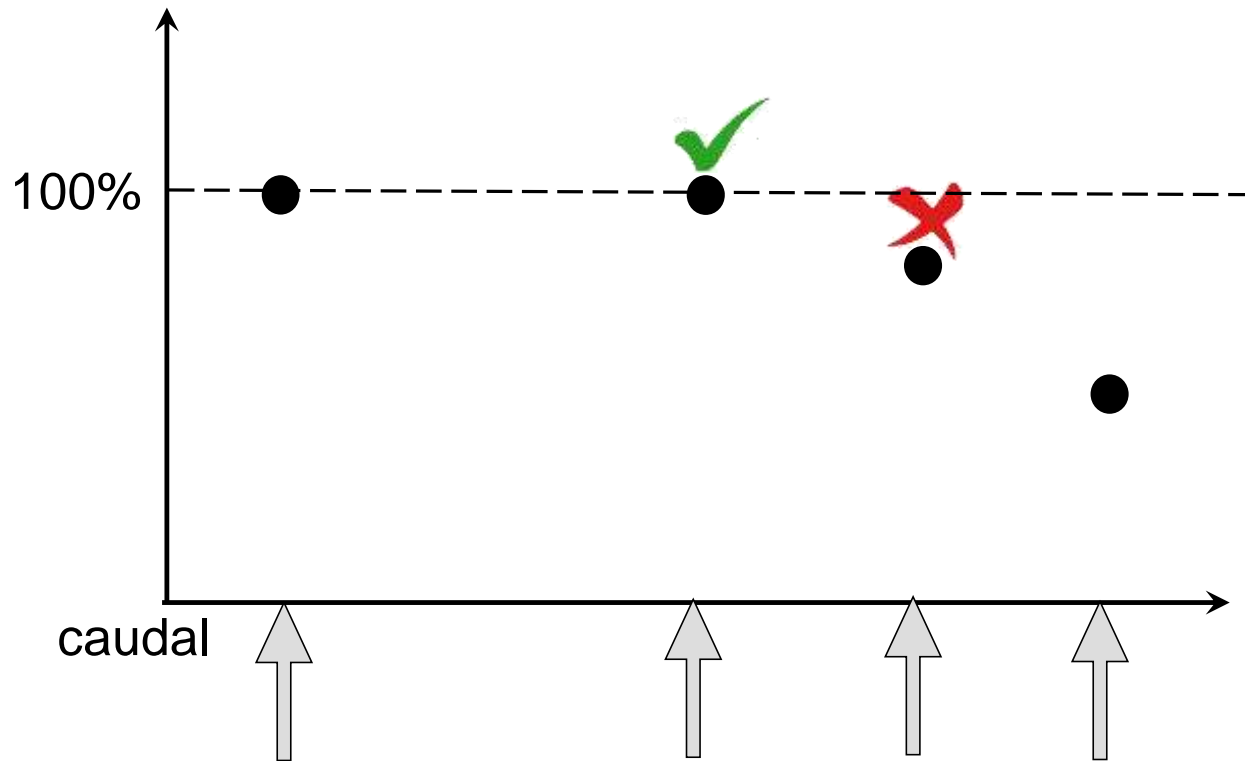
Para hallar el caudal podemos ir probando con una sucesión de valores de caudal usando el criterio del valor del medio

conversión



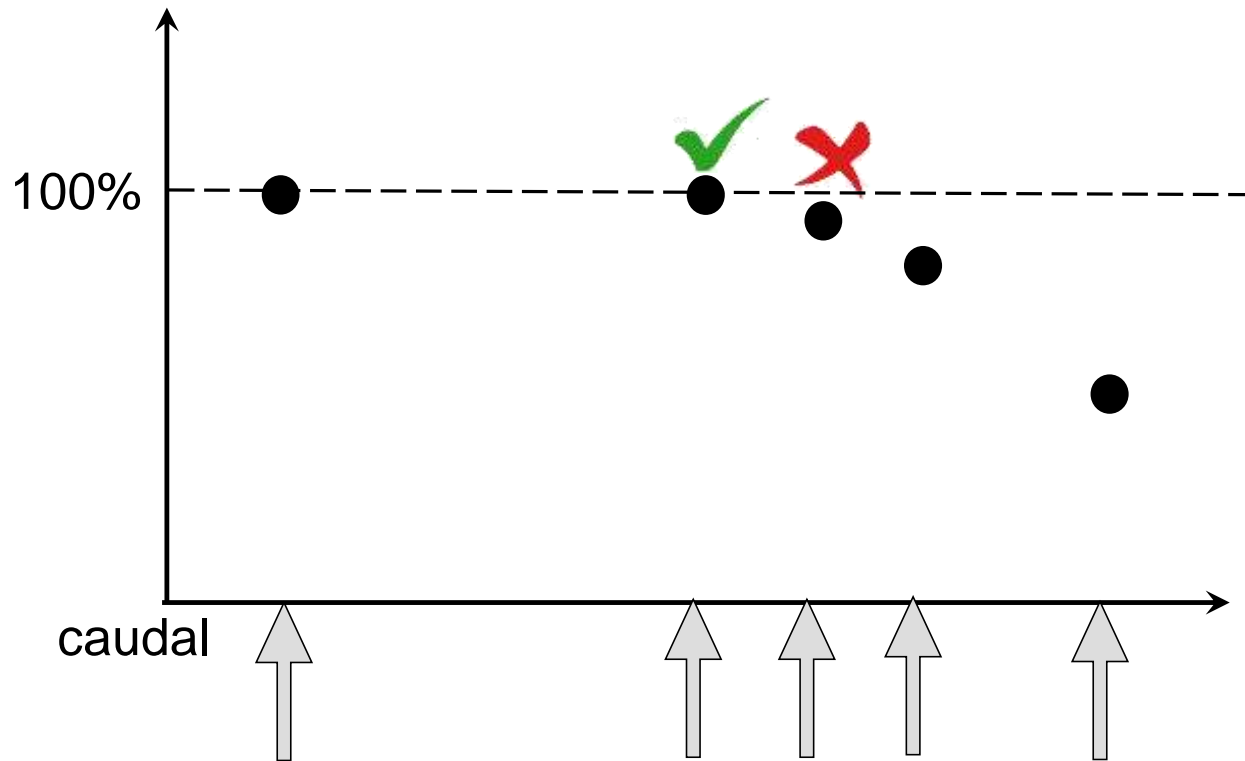
Para hallar el caudal podemos ir probando con una sucesión de valores de caudal usando el criterio del valor del medio

conversión



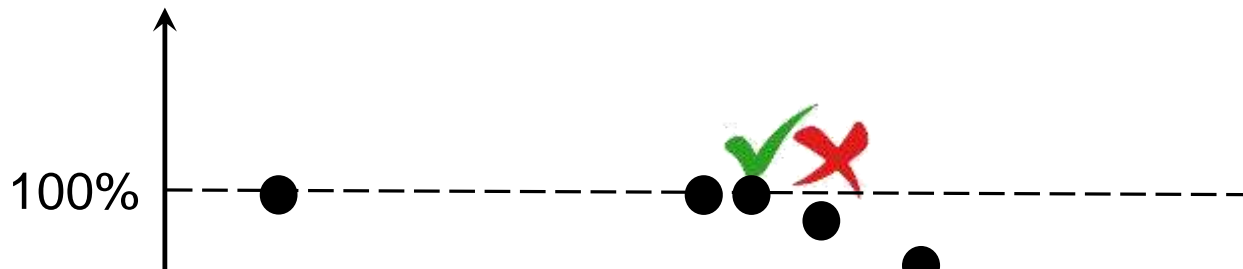
Para hallar el caudal podemos ir probando con una sucesión de valores de caudal usando el criterio del valor del medio

conversión

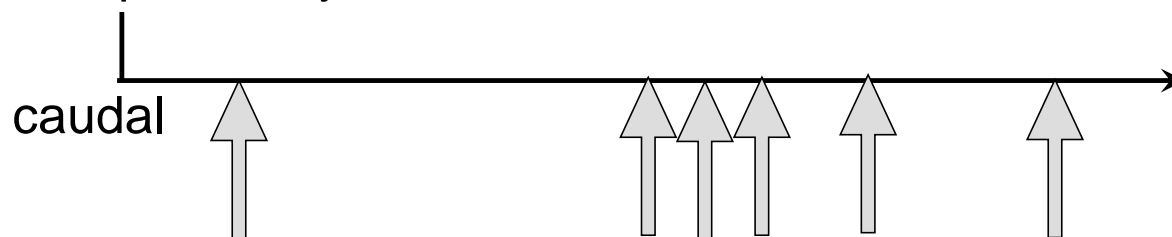


Para hallar el caudal podemos ir probando con una sucesión de valores de caudal usando el criterio del valor del medio conversión

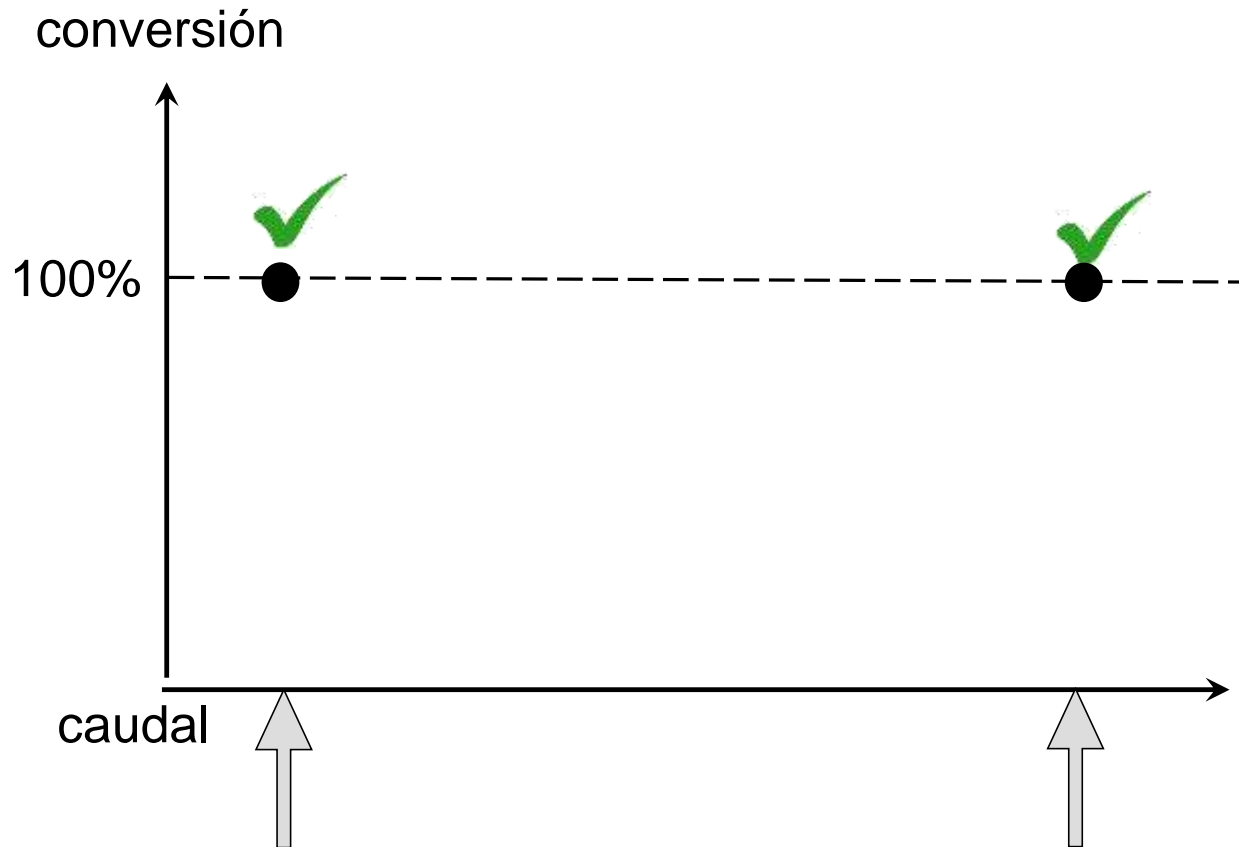
conversión



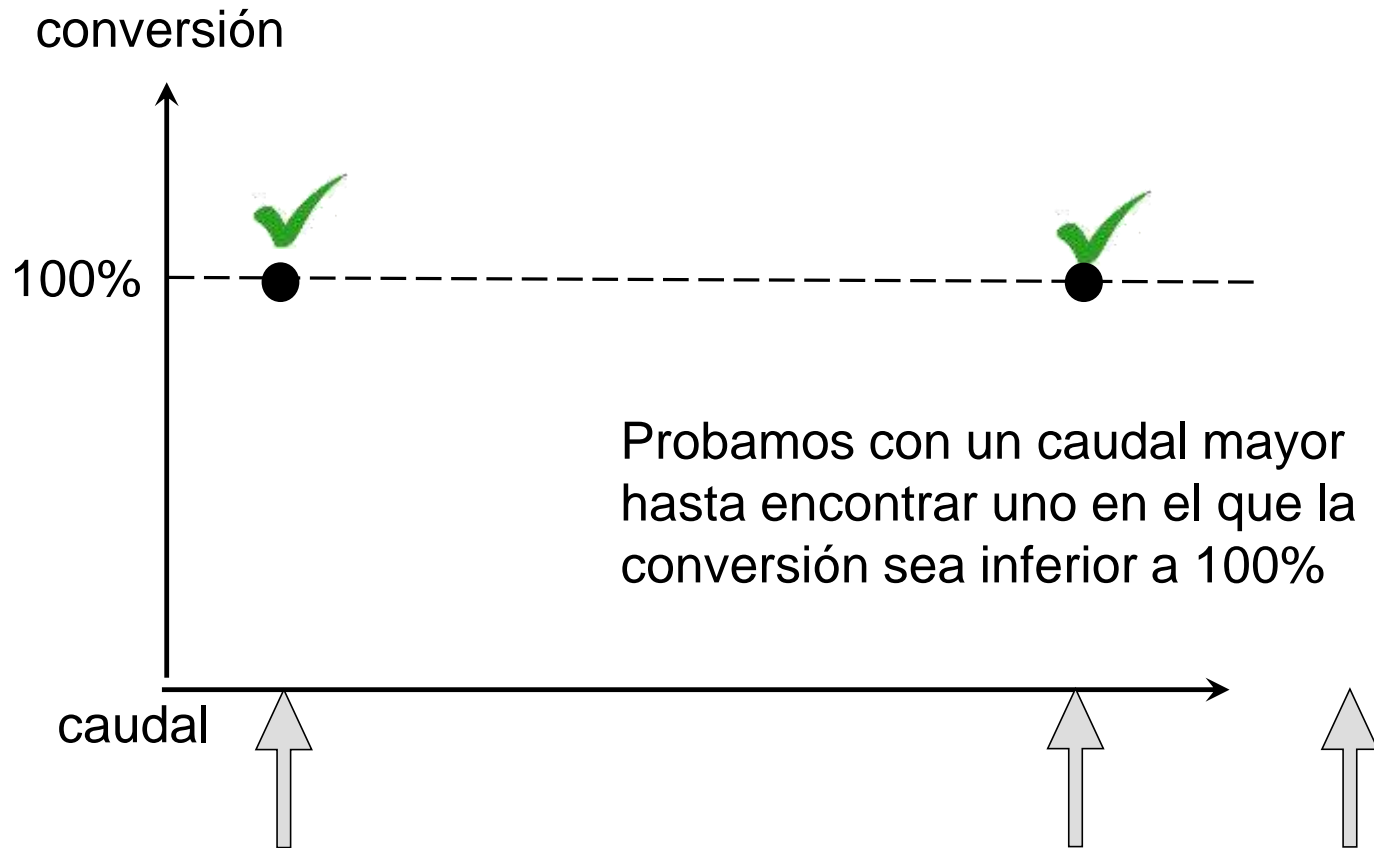
Terminamos eligiendo el caudal mayor posible pero tal que nos resulte un límite seguro a no caer por debajo del 100%



¿Y si al probar con los primeros dos caudales nos da conversión 100%?

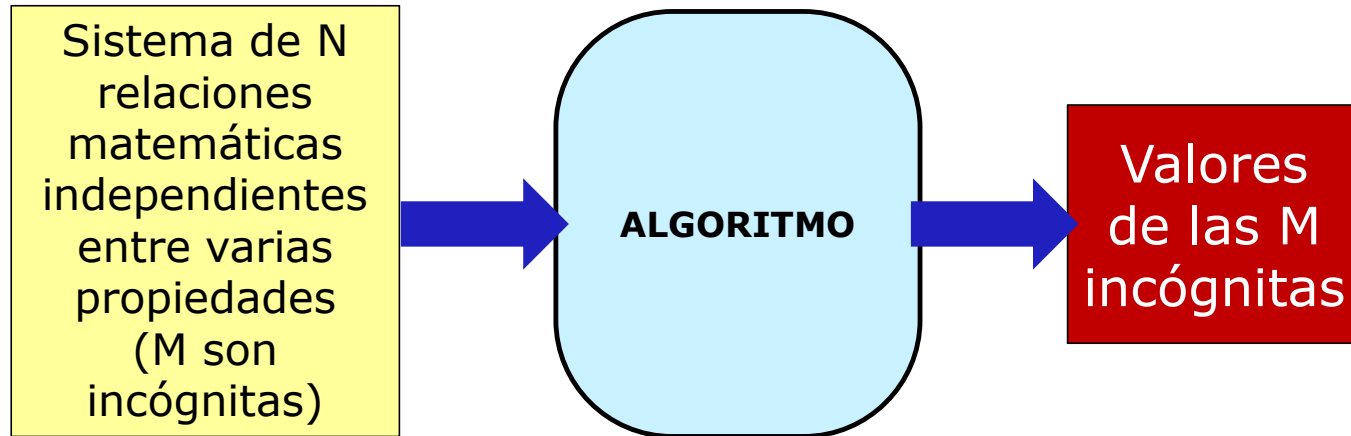


¿Y si al probar con los primeros dos caudales nos da conversión 100%?



Epílogo

Para resolver un problema usando un modelo matemático....



No es objetivo del curso ver los algoritmos disponibles para efectuar los cálculos... eso es materia de otros cursos y de vuestra propia “investigación” (seguramente hasta que se reciban – y sin dudas, después de recibidos- seguirán apareciendo nuevas herramientas para calcular problemas cada vez más difíciles y cada vez más rápido).

Sí es objetivo del curso, que tengan presente...

- que
 - una cosa es el problema de ingeniería (vida real),
 - otra, el problema de cálculo que derivamos del anterior, y
 - otra, el o los caminos posibles para encontrar soluciones.
- que cuando en ingeniería (o alguna otra disciplina) usamos fórmulas y hacemos cuentas... estamos usando un modelo (modelo matemático) para abordar un problema de esa otra disciplina
- que los “métodos computacionales de cálculo”... en general se basan en métodos numéricos utilizando herramientas “sofisticadas”