Aplicaciones del Álgebra Lineal
2^{DO} semestre - 2023

Práctico 4: Sucesiones de Matrices.

Ref. ALA, JAP, Capítulo I, Sección 4

Ejercicio 1 Dada una sucesión de matrices $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}_{n\times m}(k)$, probar que, si $\lim\limits_{s\to+\infty} A_s = A$ entonces:

a. $\lim\limits_{s\to+\infty} \lambda.A_s = \lambda.A$, para todo $\lambda \in k$.

b. $\lim\limits_{s\to+\infty} P.A_s.Q = P.A.Q$, para todo $P \in \mathcal{M}_{t\times n}(k)$, para todo $Q \in \mathcal{M}_{m\times \ell}(k)$.

Ejercicio 2 Se dice que una matriz $A \in \mathcal{M}_n(k)$ tiene *potencias acotadas* si existe una constante c tal que $||A^s|| \leq c$, para todo $s \in \mathbb{N}$. Caracterizar las matrices que tienen potencias acotadas.

- *Caracterizar* significa encontrar condiciones equivalentes al concepto nuevo, en este caso, *potencias acotadas*.
- Sugerencia: buscar condiciones equivalentes similares a las dadas en la parte b) del Teorema de la Sección 4.3.

Ejercicio 3 Dada una sucesión de matrices $(A^s)_{s\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}_n(k)$ tal que $L = \lim\limits_{s\to+\infty} A^s$. Sea r el rango de la matriz $A - I_n$. Probar que L es semejante a la matriz $I_{n-r} \oplus 0_r$, donde 0_r es la matriz nula de $\mathcal{M}_r(k)$.

Ejercicio 4 Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ encuentre condiciones necesarias y sufcientes con los coeficientes $a,\ b,\ c,\ d$ para que $\lim\limits_{s\to+\infty} A^s$ exista.

Ejercicio 5 Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a. Sea λ valor propio de A asociado al vector propio $v \in \mathbb{C}^n$: $A.v = \lambda.v$ y sea $1 \leq i_0 \leq n$ tal que $|v_{i_0}| \geq |v_i|$, para todo $1 \leq i \leq n$. Probar $|\lambda|.|v_{i_0}| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{j=n} |a_{i_0 j}|.|v_{i_0}|$.

b. Demuestre que $\rho(A) \leq \text{máx}\{\displaystyle\sum_{j=1}^{j=n} |a_{ij}| \ : \ i = 1, ..., n\}$.

c. Demuestre que también vale que $\rho(A) \leq \text{máx}\{\displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} |a_{ij}| \ : \ j = 1, ..., n\}$.

Ejercicio 6 Asuma que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ es diagonalizable, y que es único el valor propio λ tal que $|\lambda| = \rho(A)$. ¿Cómo se puede usar la sucesión de matrices $(A^s)_{s\in\mathbb{N}}$ para calcular (aproximar) el valor del radio espectral de A?

Marcelo Lanzilotta