Aplicaciones del Álgebra Lineal
2^{DO} semestre - 2024

Práctico 3: Forma Canónica de Jordan II.

Ref. ALA, JAP, Capítulo I, Sección I.2

Ejercicio 1 Se considera $\phi : V \to V$ una transformación lineal, sobre un k-espacio vectorial V, de dimensión finita. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. La transformación lineal ϕ es nilpotente.

b. La inclusión $\phi^{i+1}(V) \subsetneq \phi^i(V)$ es estricta, para todo i tal que $\phi^i(V) \neq \{\vec{o}\}$.

c. La inclusión $\ker(\phi^i) \subsetneq \ker(\phi^{i+1})$ es estricta, para todo i tal que ϕ^i no es nula.

Ejercicio 2 Se considera $T : V \to V$ una transformación lineal, sobre un k-espacio vectorial V, de dimensión finita $\dim_k(V) = n$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

a. El polinomio minimal $m_T(t)$ se descompone en $k[t]$ como producto de monomios $(t-a_1) \cdots (t-a_s)$, con $a_i \neq a_j$, si $i \neq j$.

b. Hay una base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de V tal que $T(v_j) = a_j.v_j$, con $j = 1, 2, ..., n$, con $a_j \in k$.

Ejercicio 3 Calcule la forma de Jordan sobre $\mathbb{R}$ de la matriz: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 Calcule la forma de Jordan sobre $\mathbb{R}$ de la matriz: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5

a. Sean a y b números reales con $a \neq 0$ y se considera la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hallar la forma de Jordan de P y una base de Jordan correspondiente.

b. Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Probar que A y B son semejantes y hallar explícitamente una matriz invertible M tal que $A = MBM^{-1}$.

Marcelo Lanzilotta