

Práctico 3: Forma Canónica de Jordan II.

Ref. ALA, JAP, Capítulo I, Sección I.2

Ejercicio 1 Se considera $\phi : V \rightarrow V$ una transformación lineal, sobre un k -espacio vectorial V , de dimensión finita. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- La transformación lineal ϕ es nilpotente.
- La inclusión $\phi^{i+1}(V) \subsetneq \phi^i(V)$ es estricta, para todo i tal que $\phi^i(V) \neq \{\vec{0}\}$.
- La inclusión $\ker(\phi^i) \subsetneq \ker(\phi^{i+1})$ es estricta, para todo i tal que ϕ^i no es nula.

Ejercicio 2 Se considera $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal, sobre un k -espacio vectorial V , de dimensión finita. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- El polinomio minimal $m_T(t)$ se descompone en $k[t]$ como producto de monomios $(t-a_1)\dots(t-a_s)$, con $a_i \neq a_j$, si $i \neq j$.
- Hay una base $\{v_1, \dots, v_s\}$ de V tal que $T(v_j) = a_j \cdot v_j$, con $j = 1, 2, \dots, s$, con $a_j \in k$.

Ejercicio 3 Calcule la forma de Jordan sobre \mathbb{R} de la matriz:
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 Calcule la forma de Jordan sobre \mathbb{R} de la matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5

- Sean a y b números reales con $a \neq 0$ y se considera la matriz $P = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Hallar la forma de Jordan de P y una base de Jordan correspondiente.

- Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Probar que A y B son semejantes y hallar explícitamente una matriz invertible M tal que $A = MBM^{-1}$.

Marcelo Lanzilotta