

APLICACIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL  
2<sup>DO</sup> SEMESTRE - 2023

**Práctico 2: Forma Canónica de Jordan.**

Ref. ALA, JAP, Capítulo I, Sección I.2

**Ejercicio 1** Calcule una forma de Jordan para las matrices:  $A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  y  $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 2** Demuestre que si los bloques de Jordan  $J_n(\lambda)$  y  $J_n(\mu)$  son semejantes, entonces  $\lambda = \mu$ .

**Ejercicio 3** Demuestre que  $J_4(\lambda)$  no es semejante a  $J_2(\lambda) \oplus J_2(\lambda)$ .

**Ejercicio 4** Para cada una de las matrices del primer ejercicio,  $A_i$ ,  $i = 1, 2$ , demuestre que  $\chi_{A_i}(A_i) = 0$ .

**Ejercicio 5** Utilice el método hecho en clase para construir una base de Jordan para las matrices:

a.  $A \in \mathcal{M}_3(k)$ , con:  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

b.  $B \in \mathcal{M}_n(k)$ , con:  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & & \vdots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & & & \ddots & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 6** Sea  $J_s(0)$  un bloque de Jordan con valor propio 0. Calcule las potencias  $J_s(0)^m$ , las imágenes de  $J_s(0)^m$ , y el núcleo de  $J_s(0)$ .

**Ejercicio 7** Demuestre que  $\dim(\ker J_s(0) \cap \text{Im} J_s(0)^m) = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq s-1 \\ 0 & \text{si } s \leq m \end{cases}$ .

**Ejercicio 8** Sea  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

a. Calcule el polinomio característico  $\chi_A(t)$  y verifique que  $\chi_A(A) = 0$ . Calcule también el polinomio minimal de  $A$ .

b. Sea  $p(t) = t^6 + t^3 - 2$ ; demuestre que existe  $r(t) \in k[t]$ , de grado 2, tal que  $p(A) = r(A)$ , y calcule el valor de  $p(A)$ . Calcule  $A^{30}$ .

**Ejercicio 9** Sea  $A$  una matriz cuya forma de Jordan es  $J_{n_1}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus J_{n_s}(\lambda_s)$ , con  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , si  $i \neq j$ . ¿En este caso cuál es el polinomio minimal de  $A$ ?

**Ejercicio 10** Pruebe que una matriz  $A$  y su transpuesta  $A^T$ , son semejantes.

**Ejercicio 11** Sea  $A \in \mathcal{M}_n(k)$  y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  los valores propios de  $A$ . Demuestre que  $\det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ ,

y que  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

**Ejercicio 12** Calcule la descomposición espectral de  $k^3$  para la matriz  $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ .

**Ejercicio 13** Calcule la forma de Jordan de la matriz:  $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 5 & -4 \\ -1 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$

*Marcelo Lanzilotta*