Aplicaciones del Álgebra Lineal
2^{DO} semestre - 2023

Práctico 1: Repaso. Primeras cuentas.

Ref. ALA, JAP, Capítulo I, Sección I.1

Ejercicio 1 Se considera la relación de semejanza definida en $\mathcal{M}_n(k)$ (notación $\sim$).

a. Probar que es una relación de equivalencia.

b. Mostrar que si A, B son matrices semejantes, entonces:

- **i**) $\det(A) = \det(B)$;
- **ii**) $\text{traza}(A) = \text{traza}(B)$;
- **iii**) el conjuntos de valores propios de ambas matrices coincide (incluyendo multiplicidad);
- **iv**) $\text{rango}(A) = \text{rango}(B)$.

c. Sean $X, Y \in \mathcal{M}_n(k)$, dos matrices tales que:

- $\det(X) = \det(Y)$;
- $\text{traza}(X) = \text{traza}(Y)$;
- el conjuntos de valores propios de ambas matrices coincide (incluyendo multiplicidad);
- $\text{rango}(X) = \text{rango}(Y)$.

Entonces $X \sim Y$. Demuestre la afirmación o dé cun contraejemplo.

Ejercicio 2

a. Sea $I_n \in \mathcal{M}_n(k)$, la matriz identidad. Probar que $[\lambda.I_n] = \{\lambda.I_n\}$, con $\lambda \in k$ (o sea que su clase de equivalencia de la relación de semejanza tiene solo un elemento).

b. Probar el recíproco del ítem anterior: Si $[A] = \{A\}$, entonces existe $\lambda \in k$ tal que $A = \lambda.I_n$.

Ejercicio 3 Sea $g \in k[x]$, polinomio con coeficientes en el cuerpo k. Probar que $A \sim B$ implica que $g(A) \sim g(B)$.

Ejercicio 4 Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(k)$ se dice que es nilpotente si existe $s \in \mathbb{N}^*$ tal que $A^s = 0$. Probar que si A es nilpotente y $B \sim A$ entonces B es nilpotente con el mismo nivel de nilpotencia.

Ejercicio 5 Probar que $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ no es diagonalizable.

Ejercicio 6 Demuestre que si $A \in \mathcal{M}_n(k)$ es diagonalizable, y $\chi_A(\lambda)$ es el polinomio característico de A, entonces $\chi_A(A) = 0$ (caso particular del teorema de Cayley - Hamilton).

Ejercicio 7 Sea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tal que $A \sim \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, con $|\lambda| < 1$ y $|\mu| < 1$.
¿Existe $\lim\limits_{n \to +\infty} A^n$? Si existe, calcularlo.

Marcelo Lanzilotta