Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables

Segundo semestre de 2023

Primer parcial

27 de setiembre de 2023

Nº Lista	Apellido, Nombre	Cédula	Firma

IMPORTANTE

- La duración del parcial es de tres horas y media.
- No se permite usar ni calculadora ni material de consulta.
- El parcial tiene 6 ejercicios de múltiple opción y un ejercicio de desarrollo con 2 partes.
- En cada ejercicio de múltiple opción solo hay una opción correcta.
- La comprensión de la letra de los ejercicios es parte de la prueba.
- **Tenga cuidado al pasar las respuestas. Para los ejercicios de múltiple opción lo completado en el cuadro de abajo será lo único tenido en cuenta a la hora de corregir.**
- **Notación**: Dado un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$, denotamos con ∂A a la frontera de A, con $int(A)$ al conjunto de puntos interiores de A, y con A' al conjunto de puntos de acumulación de A.

MÚLTIPLE OPCIÓN (Total: 30 puntos)

Llenar cada casilla con las respuestas **A**, **B**, **C**, **D** o **E**, según corresponda.

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Correctas: 5 puntos. Incorrectas: -1 puntos. Sin responder: 0 puntos.

DESARROLLO (Total: 10 puntos)

Un ejercicio de desarrollo se encuentra en la página 3.

SOLO PARA USO DOCENTE

MO	D.1.a)	D.1.b)	D.2	Total

MÚLTIPLE OPCIÓN

1. Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial $y''(x) - y'(x) - 2y(x) = -2x^2 + 3$ que cumple $y(0) = 0, y'(0) = 2$. Entonces:

(A) $y(1) = e^2 - e^{-1}$
(B) $y(1) = \frac{e^2+e^{-1}}{2}$
(C) $y(1) = e^{-1} - e^2 + 1$
(D) $y(1) = \frac{e^2-e^{-1}}{e^2+e^{-1}}$
(E) $y(1) = e^2 - 1$

---

2. Considere las soluciones de la siguiente ecuación en los números complejos:

$$z^3 = 4\bar{z}$$

Entonces:

(A) La ecuación tiene 5 soluciones, una sola de ellas con parte imaginaria nula.
(B) La ecuación tiene 4 soluciones, y el producto de ellas es i.
(C) La ecuación tiene 5 soluciones, tres de ellas con parte imaginaria nula.
(D) La ecuación tiene 3 soluciones, una real pura y dos complejas conjugadas.
(E) La ecuación tiene 3 soluciones, la suma de ellas da cero.

---

3. Considere la siguiente afirmación:

(1) Sea $a_n \geq 0$. Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(a_n)$ es convergente.

Y la siguiente serie:

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

Entonces:

(A) La afirmación (1) es falsa, y la serie (2) no converge.
(B) La afirmación (1) es falsa, y la serie (2) converge condicionalmente.
(C) La afirmación (1) es verdadera, y la serie (2) converge condicionalmente.
(D) La afirmación (1) es verdadera, y la serie (2) no converge.
(E) La afirmación (1) es verdadera, y la serie (2) converge absolutamente.

---

4. Recordamos que α es un punto de aglomeración de la sucesión a_n si existe una subsucesión a_{n_k} que converge a α.

Consideremos a_n una sucesion que cumple que las subsucesiones a_{4n}, a_{4n+1}, a_{4n+2}, a_{4n+3}, y a_{2n} convergen. Entonces:

(A) a_n converge
(B) a_n tiene a lo sumo dos puntos de aglomeración
(C) a_n tiene a lo sumo tres puntos de aglomeración
(D) a_n tiene a lo sumo cuatro puntos de aglomeración
(E) Ninguna de las anteriores es correcta

---

5. Considere las siguientes integrales:

$$(I)\ \int_0^1 log(x)dx \qquad\qquad (II)\ \int_0^2 \frac{x-1}{x(x-2)}dx$$

Entonces:

(A) La integral (I) no converge, la integral (II) es convergente.
(B) La integral (I) es convergente, la integral (II) no converge.
(C) Ambas integrales son convergentes.
(D) Ambas integrales son no convergentes.
(E) La integral (I) no es impropia, la segunda integral no converge.

---

6. Consideremos los conjuntos

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0\} \quad \text{y} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 0\}$$

y las siguientes afirmaciones:

(I) $\partial(A \cup B) = \partial A \cup \partial B$

(II) $int(A \cup B) = int(A) \cup int(B)$.

(III) $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Entonces:

(A) Todas las afirmaciones son verdaderas.
(B) Solo la afirmación (I) es verdadera.
(C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son verdaderas.
(D) Solo la afirmación (III) es verdadera.
(E) Ninguna de las tres afirmaciones es verdadera.

DESARROLLO

---

1. a) Definir límite finito de una sucesión $\left(\lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \text{ sii } \ldots\right)$
   b) Definir sucesión acotada y sucesión monótona creciente.
2. Demostrar que si a_n es monótona creciente y acotada, entonces tiene límite finito.