Capítulo 6

Derivación

(**3 semanas**)
Los ejercicios indicados con **(*)** son los sugeridos para trabajar en esta semana. Los demás ejercicios son complementarios (se puede elegir algún ejercicio para hacer de manera opcional).

6.1. Cálculos elementales

1. **(*)** Calcular, a partir de la definición, las derivadas de las siguientes funciones

   a) $f(x) = x^2$ *b*) $f(x) = x^3$ *c*) $f(x) = \sqrt{x}$ *d*) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2. **(*)**

   a) Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \text{signo}(x)$. En caso de existencia, calcular $f'(a)$.

   b) Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$. En caso de existencia, calcular $f'(a)$.

   c) Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \lfloor x \rfloor$. En caso de existencia, calcular $f'(a)$.

   d) Determinar en qué puntos es derivable la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]$. En caso de existencia, calcular $f'(a)$.

3. Determinar en qué puntos es derivable la función $f \circ g$ y, en los puntos donde sea derivable, calcular su derivada

   a) **(*)** $f(x) = |x|$, $g(x) = x^3$ *b*) $f(x) = \lfloor x \rfloor$, $g(x) = \sin(x)$ *c*) $f(x) = x^2$, $g(x) = \left[\dfrac{x}{2}\right]$

4. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $L = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + 2h) - f(x_0)}{h}$.

1) Probar o refutar, a partir de la definición, que f es derivable en x_0.
2) Suponiendo que f es derivable en x_0, ¿Qué relación hay entre L y $f'(x_0)$?

b) Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que existe $K = \lim_{h \to 0} \dfrac{g(x_0 + h) - g(x_0 - h)}{h}$.

1) Probar o refutar, a partir de la definición, que g es derivable en x_0.
2) Suponiendo que g es derivable en x_0, ¿Hay alguna relación entre K y $g'(x_0)$?

5. *a*) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función impar, tal que $f'(4) = 5$. Probar que f debe ser derivable en -4 y calcular $f'(-4)$.

Dé un ejemplo de una función f impar tal que $f'(0) = 1$. Dé un ejemplo de una función f impar tal que $f'(0) = 3$.

b) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función par, tal que $f'(2) = 7$. Probar que f debe ser derivable en -2 y calcular $f'(-2)$.

En caso de ser derivable en 0, ¿puede afirmar algo de $f'(0)$?.

c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable.

1) Probar que si f es par entonces f' es impar.
2) Probar que si f es impar entonces f' es par.

6. Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ dos funciones donde I es un intervalo abierto tal que f y g son derivables en I

a) Probar que la función f es continua.

b) Probar que la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x) + g(x)$ es derivable y $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.

c) Probar que la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable y $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

d) Probar que si $f(x) \neq 0$ $\forall x \in I$ entonces la función $h : I \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{f(x)}$ es derivable y $h'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}$.

e) Suponga que $f(I) \subset I$. Probar que la función $h(x) = g \circ f(x)$ es derivable y que $h'(x) = g'(f(x))f'(x)$.

f) Probar que si f es invertible, $f(p) = q$ y $f'(p) \neq 0$, entonces la función $h = f^{-1}$ es derivable en q y además $h'(q) = \frac{1}{f'(p)}$. De un ejemplo de una función f invertible y derivable pero que su inversa no sea derivable.

7. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función

a) Probar que si f es tal que $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces es derivable en 0.

b) Probar que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\in\mathbb{Q}\\ x^2 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

es derivable solo en 0.

c) ¿Vale lo mismo si $-x\le f(x)\le x$ para todo $x\in\mathbb{R}$?

d) Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(a)=g'(a)=0$. Probar que si $|f(x)|\le|g(x)|$ para todo $x\in\mathbb{R}$, entonces f es derivable en a.

8. Sea $h:I\to\mathbb{R}$ función. Probar que si en a existen las derivadas laterales, esto es,

$$\lim_{x\to a^-}\frac{h(x)-h(a)}{x-a},\qquad \lim_{x\to a^+}\frac{h(x)-h(a)}{x-a}$$

entonces h es continua en a.

Mostrar que si las derivadas laterales son iguales entonces h es derivable en a.

9. (*)

a) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} ax+b & \text{si } x\le 1\\ \frac{1}{x} & \text{si } x>1\end{cases}$$

Determinar a y b para que f sea derivable.

b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x+2 & \text{si } x\le a\\ 2x^2 & \text{si } x>a\end{cases}$$

Determinar el o los valores de a para que f sea continua. Para dichos valores determinar si f es derivable.

10. Sean $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $g(x)\le h(x)$ para todo x y $g(1)=h(1)$.

a) Probar que $g'(1)=h'(1)$.

b) Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $g(x)\le f(x)\le h(x)$. Probar que f es derivable en 1 y $f'(1)=g'(1)$.

11. **Teorema fundamental del cálculo versión 0.1**

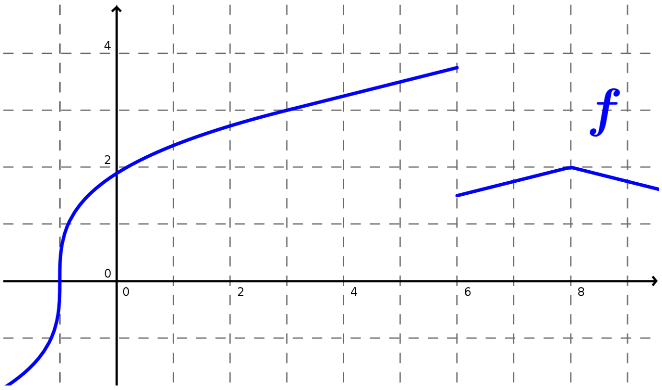
Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua y monótona. Definimos $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como $F(x)=\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

Probar que F es derivable y que $F'(x)=f(x)$.

Deducir la derivada de $\log(x)$.

6.2. Recta tangente

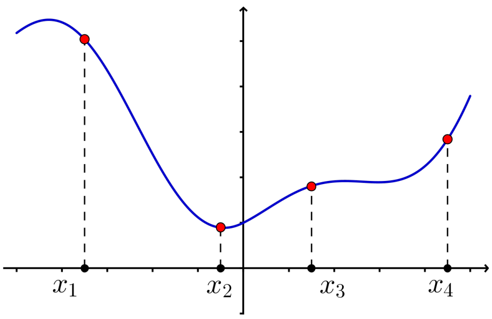
1. (*) A partir del gráfico determinar en qué puntos no es derivable la funcion f



2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \frac{x^2}{2}$ y $g(x) = \cos(ax) + b$. Definimos $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $h(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}$

   Ir a la pagina de EVA: Tema 4: Derivabilidad - Práctico y materiales asociados y utilizar la visualización del gráfico para determinar valores aproximados de $a \in [\frac{1}{10}, 5]$ y $b \in [0, 7]$ para que la función h sea derivable.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable cuya gráfica es la siguiente.



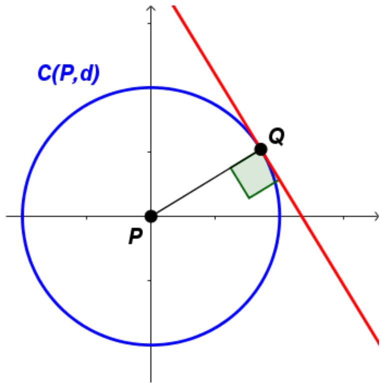
   Indicar para cuál i_0 se tiene que $f'(x_{i_0}) \leq f'(x_i)$ para todo i.

4. (*) En cada uno de los siguientes casos, calcular y graficar la recta tangente de la función f en el punto p

   a) x^2, $p = (3, 9)$ *b*) $\cos(x)$, $p = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ *c*) $\frac{x}{x^2+1}$, $p = (0, 0)$ *d*) $\sqrt{x}$, $p = (4, 2)$

5. (*) Determinar los valores de $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los cuales las funciones $f(x) = x^2 + ax + b$ y $g(x) = cx - x^2$ tienen la misma recta tangente en el punto $(3, 3)$.

6. Sea $\mathcal{C}(p,r)$ la circunferencia de centro p y radio r. Probar que para todo $q \in \mathcal{C}(p,r)$ se tiene que la recta tangente a $\mathcal{C}(p,r)$ por q es perpendicular a la recta por p y q. Sugerencia: estudiarlo primero para el caso de $\mathcal{C}(0,1)$.



7. Sea $\mathcal{C}$ la circunferencia de radio 1. Dado $a \in (0,1)$ denotamos r_a a la recta tangente a $\mathcal{C}$ por el punto (a,b) con $b > 0$.

   Sean $f,g : (0,1) \to \mathbb{R}$ las funciones definidas como, $f(x)$ es el punto de corte de r_a con el eje x. y $g(a)$ el punto de corte de r_a con el eje y.

   Calcular explicitamente las funciones f y g.

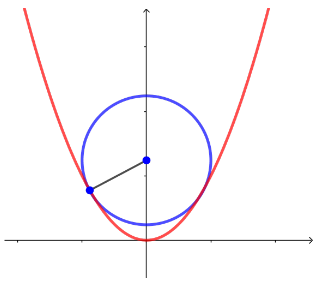
8. (*) Calcular la recta tangente de las elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en un punto (u,v).

9. Sea r la recta tangente a la hipérbola $xy = c$ por el punto P.

   a) Demuestre que el punto medio del segmento de recta de r con extremos en los ejes coordenados es P.

   b) Demuestre que el triángulo formado por la recta tangente y los ejes tiene siempre la misma área, sin importar donde se ubique P en la hipérbola.

10. En la figura se muestra un círculo de radio 1 inscrito en la parábola $y = x^2$. Encuentre el centro del círculo.



11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable en 0, y $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la ecuación de la recta tangente por 0. Probar que r es la mejor aproximación lineal a f en 0, eso es, dada otra ecuación lineal $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existe un entorno de 0, el cual notamos I_0, donde para todo $x \in I_0$ se tiene que $|f(x) - r(x)| \leq |f(x) - q(x)|$. Probar que además la igualdad se da solo en 0.

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y $r(x) = ax + b$ su recta tangente por 0. Probar que para todo par $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda_1 < a < \lambda_2$ existe $\delta > 0$ para el cual se verifican las inecuaciones

$$\lambda_1 x + b \leq f(x) \leq \lambda_2 x + b, \quad \forall x \in (0, \delta) \qquad \text{y} \qquad \lambda_2 x + b \leq f(x) \leq \lambda_1 x + b, \quad \forall x \in (-\delta, 0)$$

13. Sean $f, r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $r(x) = ax + b$, f es continua, $f(x) \geq r(x)$ y $f(1) = r(1)$.

    a) Probar que si f es derivable entonces $f'(1) = a$.

    b) Probar que si existe $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ otra recta $s(x) = \hat{a}x + \hat{b}$ con $r \neq s$ tal que $f(x) \geq s(x)$ y $f(1) = s(1)$, entonces f no es derivable en 1.

6.3. Cálculo de derivadas

A partir de esta sección, a menos que se diga de forma explicita, se pueden usar las siguientes derivadas

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}, \quad (\sin(x))' = \cos(x), \quad (\cos(x))' = -\sin(x)$$
$$(\log(x))' = \frac{1}{x} \text{ para todo } x > 0, \quad (e^x)' = e^x$$

De estas, solo las derivadas trigonométricas, no estan planteadas como ejercicios a resolver.

1. **(*)** Calcular la derivada de las siguientes funciones

$$a)\ \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3} \qquad b)\ \frac{ax + b}{cx + d} \qquad c)\ \frac{x^2 + 3x + 2}{x^4 + x^2 + 1}$$
$$d)\ x\sqrt{1 + x^2} \qquad e)\ \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad f)\ \left(\sqrt[5]{x + 1}\right)^2$$
$$g)\ \sin^3(x) \qquad h)\ x^3 \sin(x) \qquad i)\ \sin(x)\cos(x)$$
$$j)\ \sin\left(\frac{1}{x} + x^2\right) \qquad k)\ \sin\left(e^{\frac{x+1}{x-2}}\right) \qquad l)\ \sin\left(\frac{\cos(x)}{x}\right)$$
$$m)\ (\cos(x) - 1)^{100} \qquad n)\ (e^x + 2)^{100}$$

2. Sean $h(x) = f(g(x))$ y $H(x) = g(f(x))$. Calcular $h'(1)$, $H'(1)$ a partir de los datos de la siguiente tabla:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$
1	3	2	4	6
2	1	8	5	7
3	7	2	7	9

3. **(*) Funciones hiperbólicas**

   Se definien las funciones $\sinh, \cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

   $$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ seno hiperbólico,} \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \text{ coseno hiperbólico}$$

   Probar que $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$

   Probar que $\sinh'(x) = \cosh(x)$ y $\cosh'(x) = \sinh(x)$

4. Sea P un polinomio. Probar que α es raíz múltiple de P si solo si α es raíz de P y P'

5. Sean $f, P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde P es un polinomio y f está definida por

   $$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -1 \\ P(x) & \text{si } -1 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

   a) Encontrar un polinomio P de grado 3 tal que f sea derivable.

   b) Probar que no hay un polinomio de grado 2 tal que f sea derivable.

6. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

   $$a)\ \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad b)\ \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} \qquad c)\ \log(\log(\log(x)))$$

   $$d)\ \frac{1}{x - \frac{2}{x+\sin(x)}} \qquad e)\ \frac{\sin(x^2\sin^2(x))}{1+\sin(x)}$$

   $$f)\ e^{\frac{x+\sqrt{x}}{\sin(x+\cos(x))}} \qquad g)\ \sin\left(\frac{e^{\sqrt{x}+\sin(x)}}{\cos(x)}\right) \qquad h)\ \log\left(\sin\left(\frac{e^{\sqrt{x}}+x}{e^x-\sqrt{x}}\right)\right)$$

   $$i)\ \frac{\log\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)}{\sin\left(\log\left(\frac{x+2}{x^2-1}\right)\right)} \qquad j)\ \log\left(\sin\left(\frac{1+\cos(x)}{1+\sin(x)}\right)\right) \qquad k)\ \sin\left(\frac{x}{x-\log\left(\frac{x}{x-e^x}\right)}\right)$$

7. Calcular las derivadas de las siguientes funciones

$$a)\quad x - \sin(x)\cos(x) \qquad b)\quad x\log(x) - x \qquad c)\quad \tan(x)$$

8. **(*)** Probar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

es derivable.

¿La función f' es continua? ¿La función f es dos veces derivable?

9. Calcular la derivada de orden n de las siguientes funciones

$$a)\quad \sin(x) \qquad b)\quad \cos(x) \qquad c)\quad e^x \qquad d)\quad \log(x) \qquad e)\quad \frac{1}{1-x}$$

$$f)\quad \sin(2x) \qquad g)\quad \cos(3x) \qquad h)\quad e^{-2x}$$

10. Sean $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos polinomios distintos y $a \in \mathbb{R}$. Definimos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } x \leq a \\ Q(x) & \text{si } a < x \end{cases}$$

Probar que existe m tal que f no es derivable de orden m. ¿Hay alguna relación entre m y los grados de P y Q?

11. Halle f' en función de g y g' para los siguientes ejemplos:

$$a)\quad f(x) = g(x) + (x - a) \qquad b)\quad f(x) = g(x)(x - a) \qquad c)\quad f(x) = g(a)(x - a)$$

$$d)\quad f(x) = g(x + g(a)) \qquad e)\quad f(x) = g(xg(a)) \qquad f)\quad f(x) = g(x + g(x))$$

$$g)\quad f(x + 3) = g(x^3 + x) \qquad h)\quad f(x + 3) = g(x^3 - x)$$

12. **Derivaciones**

Dado $p \in \mathbb{R}$, sea $D_p : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$ una transformación lineal no nula tal que

$D_p(fg) = D_p(f)g(p) + f(p)D_p(g)$ (regla de Leibniz). $\mathbb{R}[x]$ denota el espacio de todos los polinomios reales: $\mathbb{R}[x] = \{P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que P es un polinomio$\}$.

a) Probar que $D_p(1) = 0$. Deducir que $D_p(\lambda) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

b) Probar que $D_p(x^2) = 2xD_p(x)$. Probar por inducción que $D_p(x^n) = nx^{n-1}D_p(x)$.

13. **Derivada de Schwarz**

Si f es tres veces derivable y $f' \neq 0$, la derivada de Schwarz de f en x se define mediante

$$\mathcal{D}f(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

   a) Demuestre que
   $$\mathcal{D}(f \circ g) = [\mathcal{D}(f) \circ g](g')^2 + \mathcal{D}g$$

   b) Demuestre que si $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ con $ad - bc \neq 0$, entonces $\mathcal{D}f = 0$. Deducir que $\mathcal{D}(f \circ g) = \mathcal{D}g$.

14. En cada parte, determinar los valores de los parámetros para los cuales la funcion f es derivable

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} \sin(\alpha x) & x < 0 \\ e^{\sin(x)} + \beta & x \geq 0 \end{cases} \qquad b) \quad f(x) = \begin{cases} e^{\alpha x} - 3 & x < 1 \\ \sin(\beta \log(x)) & x \geq 1 \end{cases}$$

6.4. Cálculo de límites (Regla de L'Hopital)

La idea de esta sección es calcular límties a partir de la regla de L'Hopital. Algunos de ellos ya se resolvieron en ejercicios anteriores pero aquí la idea es trabajar con esta herramienta nueva y entender su utilidad.

1. (*) Determinar existencia de los siguientes límites, y en caso de existencia, calcularlos.

$$a) \ (*) \lim_{x\to 0} \frac{1-e^{4x}}{\sin(x)} \qquad b) \ (*) \lim_{x\to 1} \frac{\log(x)}{\cos(\pi x)+1} \qquad c) \ (*) \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x)}{\sin(\pi x)}$$

$$d) \ \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^3+\sin(x)^3} \qquad e) \ \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x^2+\sin^2(x)} \qquad f) \ \lim_{x\to 0} \frac{x-\log(1+x)}{x^2+\cos(\pi x)-1}$$

$$g) \ \lim_{x\to 1} \frac{\log(x^{58})}{x^{85}-1} \qquad h) \ \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)^{51}-1}{x^2} \qquad i) \ \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^{71}\pi)}{x^2-1}$$

$$j) \ \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} \qquad k) \ \lim_{x\to 1} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\log(x)} \qquad l) \ \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$$

2. (*) Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a) \ (*) \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \frac{\log(\sin(x))}{\cos(x)} \qquad b) \ (*) \lim_{x\to 1} \frac{\sin(\log(x))}{\sin(\pi x)} \qquad c) \ (*) \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi e^x)}{e^{\sin(x)}-1}$$

$$d)\quad \lim_{x\to 1} \frac{\pi\log(x)+\sin(\pi x)}{x^3-x^2-x+1} \qquad e)\quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2-\sin(x^2)}{x^4}$$

$$f)\quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-e^{\sin(x)}}{x^2} \qquad g)\quad \lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(x^2))-\log^2(\cos(x))}{x^4}$$

3. Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} \qquad b)\quad \lim_{x\to-\infty} x^2e^x \qquad c)\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log(x))^2}{\sqrt{x}}$$

$$d)\quad \lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}} \qquad e)\quad \lim_{x\to+\infty} \log^3(x+10)-\log^3(x-10)$$

4. Determinar existencia de los siguientes límites y, en caso de existencia, calcularlos.

$$a)\quad \lim_{x\to 0^+} x^x \qquad b)\quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} \qquad c)\quad \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$$

$$d)\quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x \qquad e)\quad \lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} \qquad f)\quad \lim_{x\to+\infty} (e^x+x)^{\frac{1}{x}}$$

6.5. Valor medio

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable, cuyo gráfico se puede ver en la pagina de EVA : Tema 4: Derivabilidad - Práctico y materiales asociados

   Determinar algún valor aproximado de $c\in[0,6]$ de forma que $f'(c)=\frac{f(6)-f(0)}{6}$. ¿Es único dicho valor?

2. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable. Suponga que existe $a\in\mathbb{R}$ tal que la recta tangente a f por a corta al gráfico de f en al menos otro punto más, digamos b. Probar que existe $c\neq a$ tal que $f'(c)=f'(a)$.

3. **(*)** Verifique si las siguientes funciones satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange en los intervalos indicados. En caso afirmativo, hallar algún valor intermedio que verifique la conclusión del teorema.

$$a)\quad f(x)=x+\frac{1}{x} \text{ en } [1,3] \qquad b)\quad f(x)=x\log x \text{ en } [1,e]$$

$$c)\quad f(x)=\sqrt[3]{x} \text{ en } [-1,1] \qquad d)\quad f(x)=\sqrt{x-1} \text{ en } [1,3]$$

4. **(*)** Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$. Mostrar que $f(1)=f(-1)=0$ pero sin embargo f' no se anula en el intervalo $(-1,1)$. Explicar por que esto no contradice el teorema de Rolle.

5. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función continua tal que es derivable en $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Probar que si existe el límite $\lim_{x\to 0} f'(x)=L$, entonces f es derivable en $\mathbb{R}$ y $f'(0)=L$.

6.6. Monotonía, extremos y geometría

1. **(*)** Determinar los extremos relativos de las siguientes funciones

   a) $f(x) = |x|$ *b)* $f(x) = \sqrt{|x|}$ *c)* $f(x) = [x]$ *d)* $f(x) = \lfloor x \rfloor$

   e) $f(x) = \cos(x)$ *f)* $f(x) = x^3$ *g)* $f(x) = x^4 + 1$

2. Calcular la derivada de la función $f(x) = e^x$. Sugerencia: recordar que $(e^x)^{-1} = \log(x)$.

3. **(*)** Probar las siguientes igualdades de funciones trigonométricas

   a) $(\arctan(x))' = \dfrac{1}{1+x^2}$ *b)* $(\arcsin(x))' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *c)* $(\arccos(x))' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

   Calcular la derivada de las siguientes funciones

   d) $\cos(\arcsin(x))$ *e)* $\sin(\arccos(x))$ *f)* $\sin(\arctan(x))$ *g)* $\cos(\arctan(x))$

4. Demuestre que la ecuación cúbica $x^3 - 3x + b = 0$ no puede tener más de una raíz en el intervalo $[-1, 1]$, cualquiera sea el valor de b.

5. Demuestre que la ecuación $x^2 = x\mathrm{sen}(x) + \cos(x)$ tiene exactamente dos soluciones reales.

6. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 4$.

   a) Hallar el intervalo de longitud máxima, que contenga al 0 en el que se puede definir la inversa de f. Notemos g esta inversa de f en dicho intervalo.

   b) Graficar g y hallar $g'(4)$.

7. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^{17} + x^{13} + x^7 + x^3 + 5x - 5$. Investigar si f es invertible y en caso de que lo sea calcular $(f^{-1})'(4)$.

8. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que f tiene un único punto fijo (existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = c$).

9. Demostrar que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

   $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   tiene derivada positiva en $x = 0$, pero no es creciente en ningún intervalo que contenga a $x = 0$ (tiene intervalos tan cercanos a $x = 0$ como se quiera en que su derivada es negativa, y por lo tanto, en esos intervalos es decreciente).

10. Probar las siguientes desigualdades:

a) Para todo $x > 0$, $\frac{x}{x+1} < \log(x+1) < x$.

b) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|\sin(\alpha x) - \sin(\alpha y)| \leq |\alpha||x-y|$.

c) Para $0 < a < 1$, se verifica que $(1+x)^a \leq 1 + ax$, $\forall x > -1$.

11. Sea $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Demostrar que si $h'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces la función $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ es constante.

    Deducir que si h_1, h_2 son dos funciones continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b) tales que $h_1(a) = h_2(a)$ y $h_1'(x) = h_2'(x)$ para todo $x \in (a,b)$, entonces estas dos funciones son iguales: $h_1(x) = h_2(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

12. a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, tal que $f'(x) \geq 0$ para todo x.

        1) Probar que si f' tiene una única raíz entonces f es estrictamente monótona.
        2) Decimos que $c \in \mathbb{R}$ es una raíz aislada de f' si existe $\delta_c > 0$ tal que la única raíz de f' en el intervalo $(c - \delta_c, c + \delta_c)$ es c. Probar que si todas las raices de f' son aisladas entonces f es estrictamente monótona.

    b) Sea $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio. Probar que P es estrictamente monótono a trozos.

13. **Relación Lipschitz-Derivada**

    Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable.

    a) Demostrar que si $f'(x) \geq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(b) \geq f(a) + M(b-a)$, para cualquier par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$.

    b) Demostrar que si $f'(x) \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces $f(b) \leq f(a) + M(b-a)$, para cualquier par $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$.

    c) Demostrar que si f' esta acotada, entonces f es Lipschitz. Demostrar que si f' no está acotada entonces f no es Lipschitz.

    d) Dar un ejemplo de una función Lipschitz que no sea derivable.

14. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice α-Hölder si existe una constante $c \geq 0$ y $\alpha > 0$ tal que

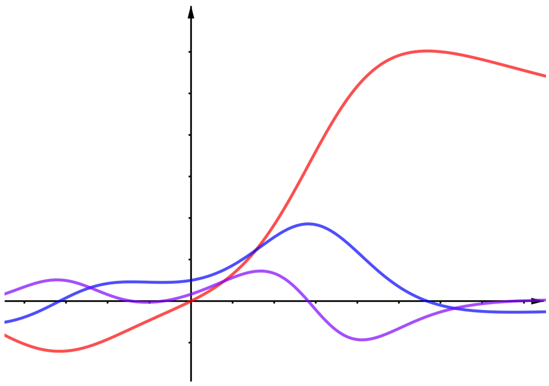
    $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|^\alpha$

    Observar que para $\alpha = 1$ se recupera la condición de Lipschitz.

    Probar que si f es α-Hölder para un valor $\alpha > 1$, entonces f es constante.

6.6.1. Derivada segunda

1. En la figura se muestran las gráficas de f, f', f''. Identifique que gráfica corresponde a cada una de las funciones.



2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivables, con derivada segunda continua tal que $f'(a) = 0$.

   a) Probar que si $f''(a) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en a.

   b) Probar que si $f''(a) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en a.

   c) Dé ejemplos de funciones f tales que $f''(a) = 0$ y tales que f presente un máximo relativo en a, un mínimo relativo en a ó sin extremos relativos en a.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con derivada segunda continua y tal que $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Probar que para todo $a \in \mathbb{R}$ la recta tangente a f por el punto $(a, f(a))$ interseca al gráfico de f solo en el punto $(a, f(a))$.

4. Bosquejar funciones f con derivada segunda tal que

   a) Los signos de f' y f'' sean positivo en todo $\mathbb{R}$

   b) El signo de f' sea positivo y el signo f'' sea negativo en todo $\mathbb{R}$

   c) El signo de f' sea negativo y el signo f'' sea positivo en todo $\mathbb{R}$

   d) Los signos de f' y f'' sean negativo en todo $\mathbb{R}$

5. **Funciones convexas I**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con derivada segunda continua. Probar que f es convexa si solo si $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. **Funciones convexas II**

   Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f''(x) > 0$.

   a) Probar que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ o $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   b) Si la función f tiene mínimo, entonces el mínimo se da en un único punto.
   Además $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

6.7. Cálculo de extremos

1. (*) Determinar si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tiene máximo y mínimo y, en caso de existencia, determinarlos.

   a) $f(x)=x^3+3x+1$ *b*) $f(x)=e^{-x^2}$ *c*) $f(x)=|\sin(|x|)|$

2. (*) Calcular los extremos de las siguientes funciones en los dominios indicados

   a) $f(x)=x^3-x^2-8x+1$ en $[-2,1]$ *b*) $f(x)=x^3-x^2-8x+1$ en $[-5,5]$

   c) $f(x)=x^{10}+20x+10$ en $[-2,2]$ *d*) $f(x)=x^{10}+x^9+10$ en $[-2,2]$

   e) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ en $\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ *f*) $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ en $[0,5]$

   g) $f(x)=48\cos^5(x)-80\cos^3(x)+45\cos(x)$, en $\mathbb{R}$

   h) $f(x)=\dfrac{1}{1+|x|}+\dfrac{1}{1+|x+a|}$, $a>0$, en $\mathbb{R}$

3. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua. Probar que

$$\#\{x\in\mathbb{R}: f(x)=0\}\leq\#\{x\in\mathbb{R}: f'(x)=0\}+1$$

4. **Estimaciones**

   Para calcular una medida física x se realizan varias mediciones obteniendo los resultados $x_1,\dots,x_n$. Estos valores se deben a pequeños errores experimentales, así como de medición.

   Para obtener un valor $\hat{x}$, que se aproxime a x se decide minimizar la siguiente función:

$$s(\hat{x})=(\hat{x}-x_1)^2+(\hat{x}-x_2)^2+\dots+(\hat{x}-x_n)^2$$

   Es decir, la suma de los cuadrados de la desviación de $\hat{x}$ a las mediciones.

   Probar que el mínimo de esta función se dá en el promedio, es decir, $\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$

5. **Mínimos cuadrados**

   Tenemos dos variables que dependen una de la otra $y=f(x)$, en una expresión funcional que desconocemos. Una manera de dar una aproximación es utilizar n datos experimentales (que arrastarán algún error debido por ser experimentales) y dar una expresión que se aproxime a esos valores.

   Por ejemplo, dados n datos $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$, una manera de encontrar una función lineal que se aproxime a esta información es $f(x)=ax+b$ donde los coeficientes a y b se eligen para minimizar la cantidad $\sum_i (f(x_i)-y_i)^2$.

   En este caso a la recta que minimiza ese error se le llama recta de mínimos cuadrados.

a) Asumiendo que el coeficiente b es cero calcular la recta de mínimos cuadrados para $(-1,1),(0,1),(1,-2)$.

b) Asumiendo que $\sum x_i = \sum y_i = 0$ y que $b = 0$ ¿Podés dar una fórmula para la recta de mínimos cuadrados?.

c) Mostrar que el caso general puede reducirse al caso anterior mediante transformaciones sencillas.

6.8. Optimización en problemas geométricos

1. (*)

   a) ¿Cuál es la mayor área posible de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 5 cm de largo?

   b) Hallar el rectángulo de menor perímetro cuya área es 4. Hallar el rectángulo de mayor área cuyo perímetro es 8.

   c) Hallar el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$.

   d) Sea ε la elipse de ecuación $4x^2 + y^2 = 16$. Se considera un rectángulo cuyos lados son paralelos a los ejes, y cuyos vértices pertenecen a ε. ¿Cuál es la mayor área que puede tener dicho rectángulo?

   a) 4 *b*) $4\sqrt{2}$ *c*) 0 *d*) $8\sqrt{2}$ *e*) 16

2. Un círculo de radio a se divide por una recta L a distancia b del centro. Determinar el rectangulo de mayor área inscripto en cada una de las regiones del círculo delimitadas por L.

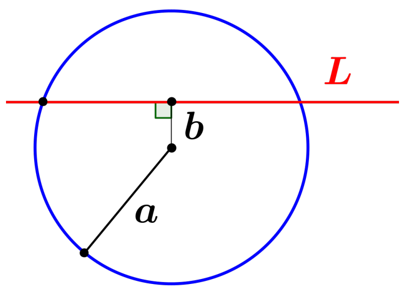
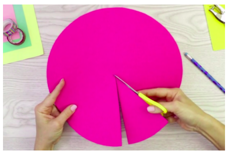
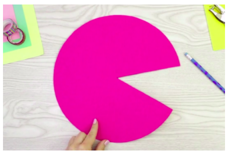


Figura 6.1: representación del ejercicio 2

3. Determinar el triángulo rectángulo de mayor área tal que la suma del largo de la hipotenusa y uno de los catetos es L.





4. **(*)** Calcular el cono de mayor volumen que se puede construir a partir de un círculo de radio r (Recordar que el volumen de un cono con altura h y base un círculo de radio s es $\pi s^2 h/3$).*Sugerencia: recordar cómo se hacen los gorros de cumpleaños:*

5. Determinar el cilindro con mayor área lateral que se puede inscribir en un círculo.

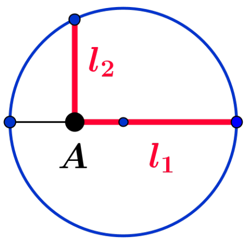
6. Determinar el cilindro de mayor volumen inscripto en un cono de radio r y áltura h (notar que la base del cilindro debe estar en la base del cono).

7. Calcular la pirámide regular de base rectangular de mayor volumen que se puede inscribir en una esfera.

8. Calcular el triángulo de mayor área incluido en el círculo de radio 1 tal que uno de sus vértices es el centro de dicho circulo (observar que los otros vértices deben estar en al cricunferencia).

9. En el círculo de radio 1, el punto A se desplaza por su diámetro, desde allí se forma un angulo recto, donde uno de sus lados es el diámetro en cuestion.

   Determinar el valor máximo y mínimo de la suma de los largos desde el punto A hasta el circulo ($l_1 + l_2$ en la imagen)



10. **Distancia a curvas**

    Recordemos que para dos subconjuntos $A, B \subset \mathbb{R}^2$ no vacios, se define la distancia entre A y B como $d(A,B) = \text{ínf}\{d(P,Q) : \text{ con } P \in A, Q \in B\}$.

    En particular, se puede definir la distancia entre un punto y una curva (gráfico de una función)

    Puede ser útil recordar que para minimizar la distancia se puede trabajar con la distancia al cuadrado.

a) Calcular la distancia entre el punto $P = (-5, -1)$ y la parabola $y = x^2$.

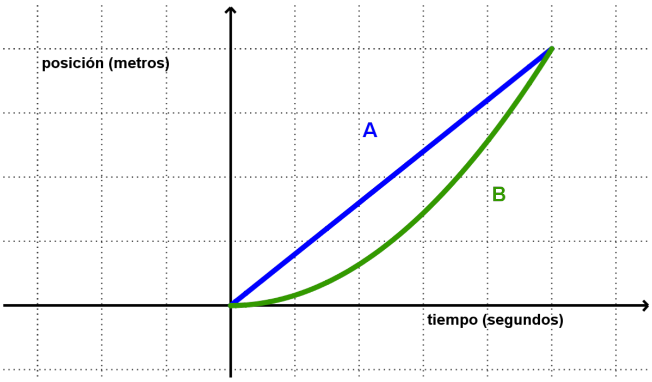
b) Calcular la distancia entre el punto $P = (0, 0)$ y la hipérbola $y = \frac{10}{x}$.

c) Calcular la distancia entre el punto $P = (0, 1)$ y la elipse $9x^2 + y^2 = 9$.

d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y $P = (x_0, y_0)$ tal que $f(x_0) \neq y_0$ (es decir P no pertence al gráfico de f).
Sea $Q = (x_1, y_1)$ en el gráfico de f tal que $d(P, Q) = d(P, f)$. Es decir, Q realiza la distancia entre P y f.
Probar que la recta tangente a f por Q es perpendicular a la recta por P y Q.

6.9. Aplicaciones

1. **(*)** El siguiente es el gráfico que muestra la posición en función del tiempo de dos corredores que finalizaron 400 metros en 50 segundos.



   a) ¿Fueron siempre a la misma velocidad? En caso de que no sea así ¿Cual tuvo mayor velocidad máxima?

   b) Determinar que corredor iba ganando en cada momento

   c) Si un tercer corredor tardo también 50 segundos. Pruebe que en algún momento fue a la misma velocidad que el corredor B

2. Discuta si la siguiente situación es posible, en caso de que lo sea dé un ejemplo, sino explique qué impide la situación. Se tiene un auto cuyo velocímetro marca siempre $10m/s$, además en el instante de salida $t = 0s$ se encuentra en la misma posición que en el instante $t = 60s$. ¿Se podría decir algo sobre la aceleración del vehículo?

3. Una pelota es arrojada desde un puente, que está sobre tierra firme. La altura h a la que se encuentra la pelota encima del piso t segundos despues de arrojada, está dada por

$$h(t) = -16t^2 + 50t + 36$$

a) ¿Cuál es la altura del puente?

b) ¿Para qué tiempos la expresión algebraica $h(t) = -16t^2 + 50t + 36$ responde a la posición real de la pelota? Es decir ¿Para qué tiempos es adecuado el modelo?

c) ¿Cuál es la velocidad promedio de la pelota en el primer segundo?

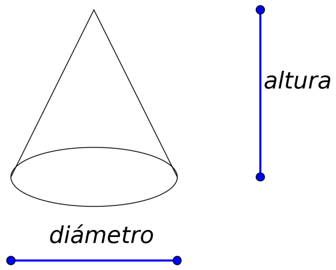
d) Obten la velocidad instantánea en $t = 1$.

e) ¿Cuál es la velocidad de la pelota cuando esta alcanza su máxima altura?

4. Un globo de aire caliente que asciende en línea recta es rastreado por un observador a 150 metros. En el momento en que el ángulo de observación del observador es $\frac{\pi}{4}$, el ángulo crece a razón de 0,14 rad/min ¿Qué tan rápido se está elevando el globo en ese momento?

5. Una transportadora deposita arena en una superficie a una velocidad de $1.7m^3$ por hora.

   La dinámica de la situación hace que la arena depositada toma la forma de un cono, que va creciendo tanto en altura como en el diámetro de la base. Se sabe que el diámetro y la altura son iguales.

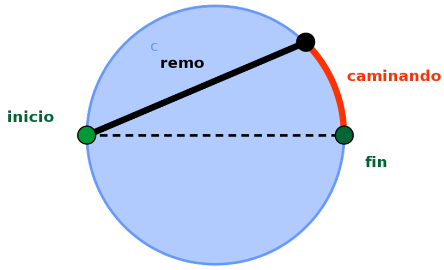


   Determinar la altura en función del tiempo. Determinar la velocidad con la que cambia la altura cuando esta es de 3 metros.

6. Un farol de una calle está ubicado en el extremo superior de un poste de 5 metros de alto. Un hombre cuya altura es de 1.8 metros se aleja del poste a una velocidad de 1 m/s a lo largo de una trayectoria recta. ¿Con qué velocidad se mueve la punta de la sombra cuando el hombre se encuentra a 12 metros del poste?

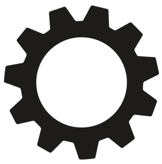
7. Se desea cruzar un lago circular de 1 km de radio. Para hacerlo se puede caminar, desplazandose a una velocidad de 6km/h, o usar un remo a una velocidad de 3km/h.

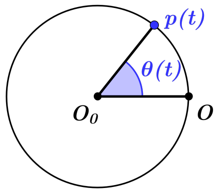
   ¿Cuál es la forma más rápida para cruzar? Sugerencia: Puede ser util recordar el perímetro del círculo.



8. En este ejercicio se intentará definir la velocidad de los engranajes. Para un engranaje lo importante es cuánto gira, y no la velocidad puntual en cada lugar del mismo.

   Suponga por ejemplo que para el engranaje de la figura (figura de la izquierda) se sabe que el gira a una velocidad constante y que el engrange tarda 12 segundos en dar una vuelta entera, ¿cuánto tarda un diente para avanzar al lugar que ocipaba el siguiente?





   Para definir la velocidad de un engranaje se marcan 2 puntos, O_0, el origen de la circunferencia, otro auxiliar O que servirá para medir los ángulos. Estos dos puntos están en el plano y se mantandrán siempre en el mismo lugar. Se pinta un punto p en el engranaje (la circunferencia), este si se moverá en función del tiempo, luego define una función $p(t)$. Por último, definimos la función θ donde $\theta(t)$ es el angulo que forman $O, O_0, p(t)$. Hay una pequeña ambiguedad en esta definición que pasaremos por alto.

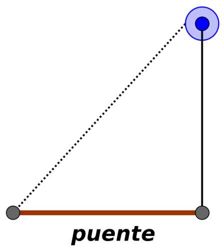
   Definimos así la velocidad del engranage como θ'.

   Para la siguiente figura numeramos los engranages de forma descendente y notemos θ_i a una función de angulo para el engranaje i. Suponga que movemos voluntariamente el engrange 1. Determinar las velocidades θ_i' en relación a θ_1'

Suponga ahora un engranaje mueve una cinta horizontal. Relacionar la velocidad del engranaje con la de la cinta, cuidado no solo depende de θ'.

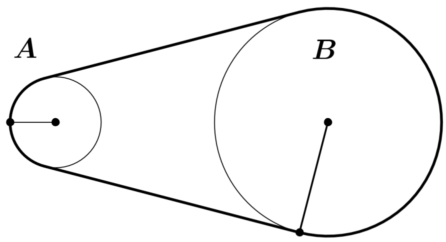
9. Un puente levadizo cuenta con un cable, un engranaje y un motor. Cuando el puente se quiere levantar, se prende el motor que hace girar el engranege a una velocidad constante y este enrolla el cable.

   El puente mide 10 metros de largo y el engranage tiene 20 cm de radio. Si se quiere que el puente se levante en 2 minutos, ¿cuál es la velocidad que debe tener el engranaje?



10. Física 1, práctico 9, ejercicio 4 (Adaptación)

    Una rueda A de radio $r_a = 10$ cm está acoplada por medio de una banda a otra rueda B de radio $r_b = 25$ cm: La rueda A aumenta su velocidad desde el reposo hasta que la rueda B alcanza una velocidad de rotación de 100 rev/s.



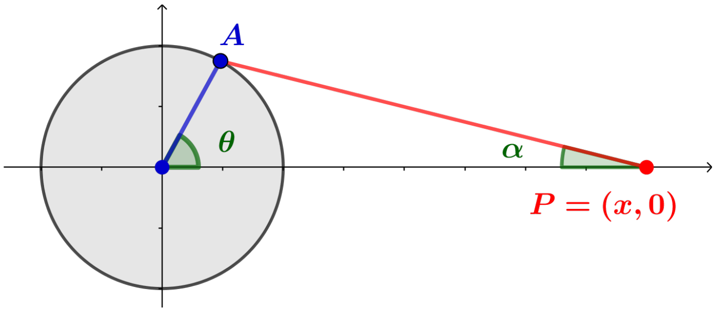
    ¿Cuál es la velocidad tangencial y de rotación de A en el momento en que B tiene esa velocidad?

11. En la figura se muestra una rueda giratoria, con radio 40 cm y leva AP de longitud $1{,}2m$. El pasador P se desliza hacia atrás y hacia adelante, a lo largo del eje x conforme la rueda gira en sentido contrario a las agujas del reloj con la rapidez de 360 revoluciones por minuto.

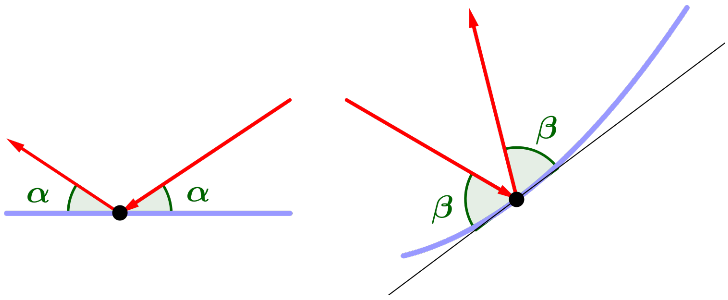
    a) Encuentre la velocidad angular de la leva, $d\alpha/dt$, radianes por segundo, cuando $\theta = \pi/3$.

    b) Exprese la distancia $x = |OP|$, en términos de θ.

    c) Halle una expresión para la velocidad del pasador P, en terminos de θ.



12. En un espejo plano, los rayos de luz se reflejan formando un ángulo simétrico al de incidencia. Cuando el espejo no es plano esta propiedad se aprecia en la recta tangente.



Probar que para una parábola $f(x) = ax^2$ el reflejo de todo rayo vertical pasa por el foco de la parabola.

13. Física 1, práctico 3, ejercicio 2.

El tren Grande Vitesse recorre la campiña francesa a 216 km/h. Debido al principio de inercia (que incomoda a los pasajeros) la acelaración horizontal del tren no puede ser mayor a 0,050 g. ¿Cuál es el radio mínimo permisible de una curva de la vía si el tren ha de tomarla a la velocidad antes mencionada?

14. **(*)** Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo, si el rectángulo tiene como lados a) 10 y 10 cm. b) 12 y 18 cm.

c) Dar un procedimiento similar para contruir una caja con tapa. Maximizar el volumen en caso de que el rectángulo mida 12 y 18 cm.

15. **(*)** Se decide hacer un cartel informativo. El tamaño que se necesita para la informacion es 600 cm^2. Sabiendo que se necesita dejar un espacio libre de $3cm$ arriba y abajo y de $2cm$ en los lados, determinar el área mínima que debe tener el cartel.

16. Cuando una flecha es disparada desde el origen con velocidad v_0 y angulo de inclinación inicial α (con respecto al eje horizontal que representa el suelo) su trayectoria es la curva

$$y = mx - \frac{16x^2}{v_0^2(1+m^2)}$$

donde $m = \tan(\alpha)$

Encuentre la altura máxima alcanzada por la flecha.

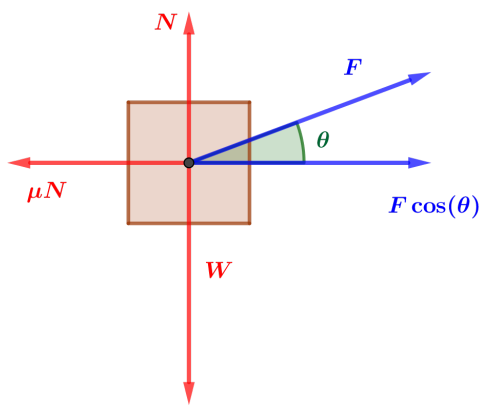
17. Las vigas tienen que soportar distintas fuerzas laterales y para eso se busca el diseño que mejor soporte esas fuerzas. La fuerza de una viga muestra la capacidad de soportar esas fuerzas laterales.

La fuerza de una viga de lado rectangular de lados a, b con $a \leq b$ es proporcional a ab^2.

a) De entre los rectángulos de área K, encontrar las dimensiones del rectángulo que maximizan la fuerza de la viga.

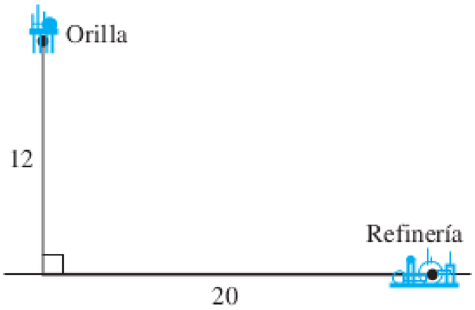
b) Se tiene un tronco (esquemáticamente un cilindro) de radio 20 cm. Encontrar el largo de los lados de la viga con mayor fuerza.

18. Un bloque de peso W es movido a lo largo de un plano por una fuerza que forma un ángulo θ con la recta de dirección del movimiento, siendo $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$, como se ve en la figura. Supongamos que la resistencia por fricción es proporcional a la fuerza normal con la que el bloque presiona perpendicularmente contra el plano. Hallar el ángulo θ para el que la fuerza de propulsión necesaria para vencer la fricción sea lo más pequeña posible.

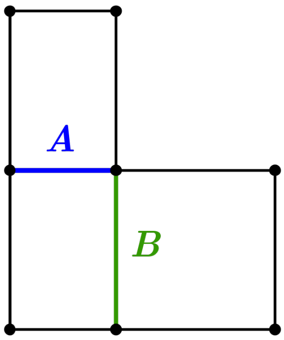


19. (*) Una plataforma de perforación a 12 millas de la costa debe ser conectada mediante un oleoducto a una refinería que está a 20 millas en línea recta desde el punto de la costa más cercano a la plataforma. Si instalar la tubería debajo del agua cuesta $500000 por

milla, y en tierra cuesta \$300000 por milla, ¿Qué combinación de instalación subacuática y terrestre dá la conexión más económica?



20. ¿Cuál es la longitud en metros aproximada de la escalera más larga que se puede transportar de forma horizontal alrededor de la esquina del corredor que se muestra en la figura con $A = 2m$, $B = 3m$?



¿Qué ocurriría si $A = B = 3m$?

21. En este ejercicio estudiaremos algunos envases cilíndricos.

   - Cerveza 473 cm^3. Dimensiones aproximadas 6.5cm de diámetro, 14.5 cm de altura.
   - Refresco 354 cm^3. Dimensiones aproximadas 6.5 cm de diámetro, 11 cm de altura.
   - Choclo. Dimensiones aproximadas 7.5 cm de diámetro, 8,5 cm de altura.

   a) Calcular la capacidad de la latas de choclos.

   b) Calcular las dimensiones óptimas, en cuanto a su superficie, de la lata de Cerveza. en diámetro y altura para que tenga la capacidad de 473 cm^3. Repetir lo mismo para la lata de Refresco y la de Choclo.

   c) ¿Cuál está, en proporción, más cerca de la óptima? Realice hipótesis sobre los motivos de estos resultados.

22. **(*)** En este ejercicio, se recuerda que el perímetro de un círculo de radio r es $2\pi r$, el área πr^2, y que el volumen de un cilindro es el producto del área de su base por su altura.

Se desea construir un envase cilíndrico (Fig. 1) a partir de una lámina rectangular (de lados L_1 y L_2) de hojalata, de forma que su capacidad sea la mayor posible dentro de ciertos parámetros. Para ello, se divide la lámina en dos partes:

- una banda vertical de ancho $2r$, en la cual se cortan las tapas inferior y superior del envase, en forma de dos discos de radio r;
- el resto de la lámina, en la cual se corta la cara lateral del envase, en forma de un subrectángulo del cual una de las dos dimensiones (horizontal o vertical) es igual a $2\pi r$ y la otra es máxima.

Así se obtienen dos patrones posibles, indicados en las Fig. 2 y 3:

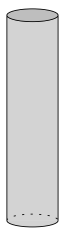


Fig. 1

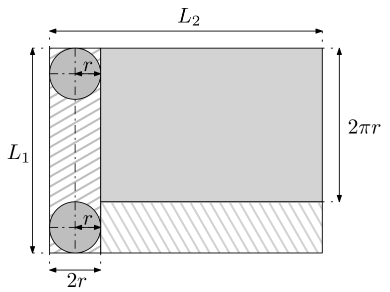


Fig. 2

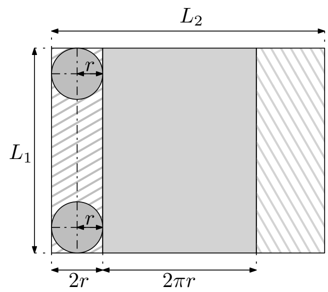
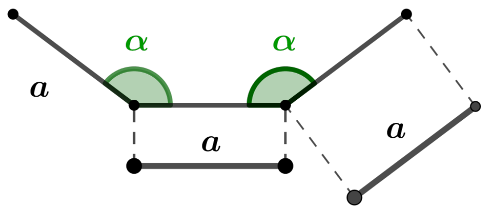


Fig. 3

En lo siguiente, se toman $L_1 = 20\pi$ $(\approx 62,83)$ y $L_2 = 80$.

1. (a) Determinar los valores de r para los cuales el procedimiento de construcción dado por el patrón de la Fig. 2 tiene sentido.
   (b) Determinar la función f que a cada valor de r asocia el volumen $f(r)$ del cilindro de radio r construido con el patrón de la Fig. 2.
   (c) Determinar el radio r que maximiza el volumen $f(r)$ del cilindro construido con el patrón de la Fig. 2., así como el volumen correspondiente.
2. Mismas preguntas (a), (b) y (c) para el patrón de la Fig. 3, escribiendo g la función de volumen correspondiente.
3. ¿Cuál de los dos procedimientos da el mayor volumen? Justificar la respuesta.
5. Elaborar otros procedimientos para la construccion del cilindro. Corroborar si son mejor o no que los anteriores.

23. Se forma un trapezoide pegando tres bandas de ancho a y largo l por el borde (como se muestra en la figura), que luego se cerrarán con 2 tapas laterales.



Se quiere además que sea regular, es decir que los ángulos foramdos sean iguales (como se muestra en la figura)

Determinar la capacidad máxima (volumen) que puedes obtener con una figura de esa forma.

24. Suponga que en una carretera el límite de velocidad se especifica en cada punto. En otras palabras, existe cierta función L tal que el límite de velocidad a x metros desde el inicio de la carretera es $L(x)$. Dos automóviles, A y B, se desplazan por dicha carretera; la posición del automóvil A en el tiempo t es $a(t)$, y la del automóvil B es $b(t)$.

    a) ¿Qué ecuación expresa el hecho de que el automóvil A siempre se desplaza a la velocidad límite? (La respuesta no es $a'(t) = L(t)$)

    b) Suponga que A siempre se deplaza a la velocidad límite, y que la posición de B en el tiempo t es la posición de A en el tiempo $t-1$. Demuestre que B también se desplaza en todo momento a la velocidad límite.

    c) Suponga, que por el contrario, que B siempre se mantiene a una distancia constante por detrás de A. ¿En qué condiciones B se desplazará todavía en todo momento a la velocidad límite?

25. **Refracción de la luz**

    Para este ejercicio, tendremos en cuenta tres cosas:

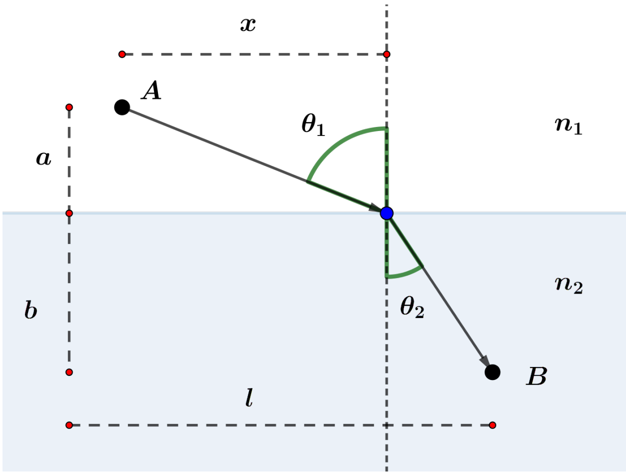
    - El trayecto seguido por la luz al propagarse de un punto a otro es tal que el tiempo empleado en recorrerlo es mínimo (esta asunción se conoce en óptica como *principio de Fermat*).
    - La velocidad con que viaja la luz depende del medio en el que se propague. A modo de ejemplo, en la siguiente tabla se muestra su velocidad de propagación para distintos medios:

Medio	*Vacío*	*Aire*	*Agua*	*Cuarzo*
Velocidad *(m/s)*	299.792.458	299.705.543	224.844.349	194.166.099

    Para cada medio, se define el índice de refracción n como el cociente entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en ese medio. Por ejemplo, para los elementos de la tabla anterior tenemos los siguientes índices de refracción:

Medio	*Vacío*	*Aire*	*Agua*	*Cuarzo*
n	1	1,0003	1,3333	1,544

Suponga que un rayo de luz viaja desde el punto **A** hasta el punto **B** a través de distintos medios. Sabemos que cuando la luz cambia de medio, se produce un quiebre en la dirección en la que se mueve, como muestra la figura. Este fenómeno se conoce como *refracción*.



Al ángulo θ_1 se lo llama *ángulo de incidencia*, mientras que al álguno θ_2 se lo llama *ángulo de refracción*.

Llamaremos n_1 y n_2 a los índices de refracción en los medios 1 y 2, respectivamente. Como en la figura, llamamos a a la distancia del punto **A** respecto de la superficie que separa ambos medios, y b a la del punto **B**. También como en la figura, llamamos l a la distancia horizontal entre los puntos. Es importante notar que estas cantidades están fijas.

Como en el dibujo, llamamos x a la distancia horizontal entre el punto A y el punto en el que el rayo de luz cruza la superficie. Dado que la luz en principio puede recorrer cualquier camino, esta distancia x es variable.

a) Hallar, en función de a y x, la distancia recorrida por la luz en el medio 1. Hallar, en función de b, l y x, la distancia recorrida por la luz en el medio 2.

b) A partir de las distancias halladas en la parte anterior, probar que el tiempo T que le lleva a la luz recorrer el trayecto de **A** a **B** está dado por la ecuación:

$$T(x) = n_1 \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{c} + n_2 \frac{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}{c}$$

c) El principio de Fermat asegura que la luz elegirá el trayecto que minimice el tiempo $T(x)$. Demostrar que la distancia x que minimiza ese tiempo verifica la ecuación:

$$n_1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = n_2 \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + b^2}}$$

d) Observando que $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \operatorname{sen}(\theta_1)$ y que $\dfrac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+b^2}} = \operatorname{sen}(\theta_2)$, concluir que los ángulos de incidencia y refracción verifican la siguiente igualdad (conocida como *Ley de Snell*):
$$n_1 \operatorname{sen}(\theta_1) = n_2 \operatorname{sen}(\theta_2)$$

6.10. Complementarios

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que existen y son finitos los limites $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$. Probar que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.

   Muestre con un ejemplo que la hipótesis de existencia del límite $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ es necesaria.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua. Probar que si f tiene dos mínimos locales entonces tiene un máximo local.

3. Sea f derivable tal que $f'(x) \geq M > 0$ para todo $x \in [0,1]$. Demostrar que existe un intervalo de longitud $\frac{1}{4}$ para el cual $|f| \geq \frac{M}{4}$.

4. Sea f una función dos veces derivable tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f'(0) = f'(1) = 0$. Probar que existe un $x \in (0,1)$ tal que $|f''(x)| > 4$

5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 3 veces derivable tal que: $f(-1) = 0, f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) - 0$

   Probar que existe $x \in (-1,1)$ tal que $f^{(3)}(x) \geq 3$.

6. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones derivables y sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \min\{f(x), g(x)\}$.

   Dé ejemplos de f, g tales que $h \neq f$, $h \neq g$ y h no derivable. Repetir para h derivable

   ¿Qué condiciones deberián cumplir f y g para que h sea derivable?

7. Sean $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones derivables, y sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $f_i(p) \neq 0$. Definimos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x)$.

   Probar que $\dfrac{g'(p)}{g(p)} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{f_i'(p)}{f_i(p)}$

8.
   a) Sea $y \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$ par no nulo. Probar que $(x+y)^n = x^n + y^n$ si solo si $x = 0$.

   b) Sea $y \neq 0$, y $n \in \mathbb{N}$ impar. Probar que $(x+y)^n = x^n + y^n$ si solo si $x = 0$ o $x = -y$.

9. Hallar el trapecio de mayor área que puede inscribirse en un semicírculo de forma que su base esté sobre el diámetro.

10. Calcular el área mínima posible para el triángulo en el primer cuadrante delimitado por los ejes y una recta tangente a la parábola $f(x) = 4 - x^2$.

11. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable tal que $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = 0$

    Definimos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $g(x) = f(x) - f(x-1)$. Probar que $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

12. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función monótona. Definimos $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$.

    Probar que F tiene derivadas laterales en todo punto.