PAQUETE DE ONDAS

1 - Construcción de un paquete

Podemos definir un paquete de ondas como una superposición de ondas armónicas que viajan en la misma dirección, con diferentes valores de k, ω, amplitud y fase.

La *n-ésima* onda armónica viajando en dirección x>0 se puede escribir como

$$f_n(x,t) = A_n \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_n) \,. \tag{1}$$

Un paquete construido por N ondas de la forma (1) se puede poner como

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos(k_n x - \omega_n t + \varepsilon_n) \,. \tag{2}$$

Podemos generalizar (2) para una cantidad infinita de ondas con una variación continua de valores de k en el intervalo $0 \le k < \infty$, cada una con un valor infinitesimal de amplitud $dA(k)$, un valor de frecuencia $\omega(k)$ y de fase $\varepsilon(k)$.

Identificamos cada onda con su valor de número de onda k, por lo cual su amplitud, frecuencia y fase dependerán de aquél.

Para una onda infinitesimal de este tipo tendremos

$$df_k(x,t) = dA(k)\cos\big(kx - \omega(k)t + \varepsilon(k)\big) \,. \tag{3}$$

Definimos una función $\alpha(k)$ para cada onda, de forma que su amplitud sea

$$dA(k) = \alpha(k)dk \,. \tag{4}$$

Como k varía desde 0 a ∞ será dk>0. Por otra parte, la amplitud es $dA(k) \ge 0$, por lo que la función definida en (4) será siempre $\alpha(k) \ge 0$.

Podemos escribir (3) como

$$df_k(x,t) = \alpha(k)dk\cos\big(kx - \omega(k)t + \varepsilon(k)\big) \,,$$

y la suma (2) para infinitas ondas de este tipo se convierte en una integral

$$f(x,t) = \int_0^{\infty} \alpha(k)\cos\big[kx - \omega(k)t + \varepsilon(k)\big]\, dk \,. \tag{5}$$

Eligiendo arbitrariamente la densidad de amplitud $\alpha(k)$ y la fase $\varepsilon(k)$ en (5), podemos construir un paquete de ondas de forma arbitraria, que viaje en dirección x>0.

La relación entre la frecuencia ω y el número de onda k no la podemos elegir arbitrariamente porque, dado k, ω depende de la velocidad $c(k)$ con que se propagan en el medio dado las ondas con esa particular longitud de onda, mediante la relación

$$\omega(k) = c(k)k \ . \tag{6}$$

Si la velocidad de propagación es la misma para todas las longitudes de onda, entonces $c(k) = c \quad \forall k$, entonces la relación (6) es lineal en k,

$$\omega(k) = ck \ . \tag{7}$$

Las ondas para las cuales se verifica (7) se llaman *no dispersivas* (ondas electromagnéticas en el vacío y ondas mecánicas de no muy alta frecuencia en medios materiales).

Las ondas electromagnéticas en la materia (como la luz en el vidrio) y las ondas mecánicas de alta frecuencia en sólidos, líquidos y gases, presentan una velocidad de propagación que depende de la longitud de onda. Entonces la relación (6) determina que la dependencia de la frecuencia con el número de onda k no sea lineal. Estas ondas se llaman *dispersivas*.

2 - Transformada de Fourier.

i) Revisión sobre la notación compleja.

Dado un número complejo $z = a + ib$, (a, b reales, $i = \sqrt{-1}$), tenemos que su parte real es $\Re(z) = a$ y su parte imaginaria es $\Im(z) = b$.

El conjugado del número complejo z escrito antes se define como $z^* = a - ib$, de donde obtenemos las relaciones

$$\Re(z) = \frac{z + z^*}{2}, \qquad \Im(z) = \frac{z - z^*}{2i} \ . \tag{8}$$

Un número complejo $z = a + ib$ es real si su parte imaginaria es nula ($b = 0$). Entonces

$$z \text{ es real} \Leftrightarrow z = z^* \ . \tag{9}$$

La siguiente fórmula de Euler es de gran utilidad para los estudios de fenómenos ondulatorios. Si θ es cualquier número real, tenemos que

$$e^{i\theta} = sen\theta + i\cos\theta \ . \tag{10}$$

La (10) permite escribir cualquier número complejo $z = a + ib$ en forma exponencial. Haciendo $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $tg\theta = b/a$ con $-\pi \le \theta < \pi$, podemos poner

$$z = a + ib = r\cos\theta + isen\theta = r(\cos\theta + isen\theta) = re^{i\theta} .$$

El número real θ se llama argumento del número complejo *z*. El número real positivo *r* se llama módulo del número complejo *z*, y se suele indicar como $|z| = r$.

Obsérvese que $|z|^2 = zz^*$.

ii) Representación compleja de una onda.

Una onda armónica progresiva

$$f(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \varepsilon), \tag{11}$$

se puede considerar como la parte real de una onda armónica compleja

$$f^C(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t+\varepsilon)} . \tag{12}$$

Esto es $f(x,t) = \Re\{f^C(x,t)\}$.

Podemos poner la (12) como

$$f^C(x,t) = Ae^{i\varepsilon}e^{i(kx-\omega t)} .$$

Definimos la amplitud compleja $A^C = Ae^{i\varepsilon}$ donde están contenidas la amplitud real *A* y su fase *ε*. Entonces la onda compleja resulta

$$f^C(x,t) = A^C e^{i(kx-\omega t)} .$$

Por analogía con (5), definimos un paquete de ondas complejas como

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(k)e^{i[kx-\omega(k)t]}dk , \tag{13}$$

donde $dA^C = \left(1/\sqrt{2\pi}\right)a(k)\, dk$ es la amplitud compleja infinitesimal de cada onda, como en (4)[1].

En general, *a*(*k*) será una función compleja, como también la onda resultante *f*(*x*,*t*) en (13).

---

[1] El factor $1/\sqrt{2\pi}$ es simplemente un factor de normalización para escribir de forma simétrica las transformadas de Fourier directa o inversa, como se verá luego.

Obsérvese en (13) que hemos definido el paquete complejo integrando en $-\infty < k < \infty$, en lugar de $0 \le k < \infty$ como en (5). Lo hemos hecho así porque entonces la (13) tendrá ciertas propiedades matemáticas de utilidad para su manejo. Probaremos a continuación que si nos interesa sólo la parte real del paquete definido en (13), podemos vincular las funciones $a(k)$ con $\alpha(k)$ de (5) para que ambas integrales den el mismo resultado.

Como el paquete de ondas se forma con ondas armónicas que viajan todas en un mismo sentido (por ej. el de las x crecientes), sólo tendrán sentido físico los valores de $k>0$). Por tanto, a las funciones $a(k)$ y $\omega(k)$ que aparecen en (13) podemos darles el valor que queramos para $k<0$. Las definimos así

$$a(-k) = a^*(k), \quad \omega(-k) = -\omega(k)\,, \tag{14}$$

y vinculamos $a(k)$ con $\alpha(k)$ para $k>0$ en la forma

$$\alpha(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left|a(k)\right|. \tag{15}$$

De acuerdo con la primera de (14) y la (15) tenemos que

$$a(k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\alpha(k)e^{i\varepsilon(k)}, \quad a(-k) = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\alpha(k)e^{-i\varepsilon(k)}. \tag{16}$$

Tomando parte real de (13) tenemos

$$\Re\{f(x,t)\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left|a(k)\right|\cos\bigl(kx-\omega(k)t+\varepsilon(k)\bigr)dk\,,$$

que se puede descomponer en los dos intervalos de integración

$$\begin{aligned}\Re\{f(x,t)\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\left|a(k)\right|\cos\bigl(kx-\omega(k)t+\varepsilon(k)\bigr)dk + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\left|a(k)\right|\cos\bigl(kx-\omega(k)t+\varepsilon(k)\bigr)dk\end{aligned} \tag{17}$$

Al sustituir (14) y (16) en (17), teniendo en cuenta que el coseno es una función par, encontramos

$$\Re\{f(x,t)\} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}\left|a(k)\right|\cos\bigl(kx-\omega(k)t+\varepsilon(k)\bigr)dk\,,$$

y al sustituir acá la (15), obtenemos la expresión (5) que buscábamos probar.

3 - δ de Dirac.

Es de utilidad en los cálculos de la física matemática una “función” inventada por P. M. Dirac, que se conoce como la δ *de Dirac*. Se define para todo *x* real de la siguiente forma:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(x)dx = 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \end{cases} \tag{18}$$

De esta definición se deduce que $\delta(0)$ no está definida. Formalmente, se puede definir la δ de Dirac como el límite de alguna función, por ejemplo la función rectángulo de área unidad, cuando la base tiende a longitud cero en torno al 0 del eje (y, por consiguiente, la altura tiende a infinito para conservar el área unidad).

La propiedad fundamental de la δ es que, dada cualquier función *f*(*x*) que exista en *x*=0 y en un entorno, tenemos que

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)\delta(x)dx = f(0)\,, \tag{19}$$

para cualquier ε positivo. En particular, resulta que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0)\,. \tag{20}$$

Esta expresión permite definir la δ de Dirac como una *funcional* que aplica la *función f*(*x*) del espacio de funciones integrables en el *número f*(0).

La prueba de (19) y (20) se obtiene fácilmente de la definición (18). Como la δ vale cero, salvo en *x*=0, las integrales de (19) y (20) se reducen a una integral en un intervalo infinitesimal entorno al origen. Con ello se puede sacar *f*(0) fuera de la integral e integrar la δ entre -ε y ε, lo cual da la unidad, según (18).

Con idéntico procedimiento se demuestra que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)dx = f(a)\,. \tag{21}$$

Daremos sin demostración una igualdad muy útil:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ikx}dx = 2\pi\delta(k)\,. \tag{22}$$

4 - Teorema de la energía.

Sabemos que la energía de una onda armónica es proporcional al cuadrado de la amplitud, por la que la energía de un paquete de ondas armónicas de la forma (13) será proporcional a la suma de los cuadrados de todas las amplitudes, esto es

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 \, dk \,. \tag{23}$$

El llamado “teorema de la energía” establece que

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 \, dk = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x,t)|^2 \, dx \,, \tag{24}$$

con lo que se establece que la integral del segundo miembro es independiente del tiempo.

Obsérvese que, según (24), la cantidad $|f(x,t)|^2$ representa la densidad de energía por unidad de longitud del paquete en el punto x y en el instante t.

Para probar (24), se multiplica (13) por su compleja conjugada,

$$|f(x,t)|^2 = \frac{1}{2\pi} \iint a(k) e^{i[kx-\omega(k)t]} a^*(k') e^{-i[k'x-\omega(k')t]} dk dk' \,. \tag{25}$$

Integrando luego en x tenemos

$$\int |f(x,t)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \iiint a(k) a^*(k') e^{i(k-k')x} e^{-i[\omega(k)-\omega(k')]t} dk dk' dx \,, \tag{26}$$

donde se puede hacer la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x} dx = 2\pi\delta(k-k') \tag{27}$$

según (22).

Sustituyendo (27) en (26) resulta

$$\int |f(x,t)|^2 dx = \iint a(k) a^*(k') \delta(k-k') dk dk' \,,$$

donde se puede integrar en k utilizando el resultado (21), obteniéndose el resultado (24) que se buscaba probar.

5 - Centro del paquete y velocidad de grupo.

El paquete de ondas definido en (13) tiene cierta extensión en el espacio (que luego se verá cómo definirla), y viaja en el tiempo en el sentido de las *x* positivas. Es útil por lo tanto definirle un "centro" a dicho paquete, que ubica al paquete y viaja con él a una cierta velocidad que caracteriza al paquete como un todo, llamada velocidad de grupo.

Este centro se define de manera análoga al centro de masa de una distribución continua de materia, esto es

$$x_C(t) = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} x\left|f(x,t)\right|^2 dx\,, \tag{28}$$

donde $\left|f(x,t)\right|^2 dx$ es la energía en intervalo dx del paquete, centrado en el punto x y en el instante t, siendo E la energía total del paquete según (24).

El centro del paquete ocupa la posición x_C y avanza con el tiempo acompañando el paquete. Independientemente de que el paquete se disperse, siempre tendrá un centro definido por (28).

Sustituyendo (25) en (28) obtenemos

$$x_C(t) = \frac{1}{2\pi E}\iiint x a(k)a^*(k')e^{i(k-k')x}e^{-i[\omega(k)-\omega(k')]t}dk dk' dx\,, \tag{29}$$

donde tenemos la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x e^{i(k-k')x}dx = \frac{1}{i}\frac{d}{dk}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(k-k')x}dx = \frac{2\pi}{i}\frac{d}{dk}\delta(k-k')\,, \tag{30}$$

según (22).

Utilizando (30) en (29) obtenemos

$$x_C(t) = \frac{1}{iE}\iint a(k)a^*(k')e^{-i[\omega(k)-\omega(k')]t}\frac{d}{dk}\delta(k-k')dk dk'\,. \tag{31}$$

La integral en k que aparece en (31) se puede efectuar por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(k)e^{-i\omega(k)t}\frac{d}{dk}\delta(k-k')dk = \left[\delta(k-k')a(k)e^{-i\omega(k)t}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dk}\left[a(k)e^{-i\omega(k)t}\right]\delta(k-k')dk\,,$$

donde el primer término del segundo miembro es nulo en los límites debido a la función δ.

Al sustituir este último resultado en (31) tenemos

$$x_C(t) = -\frac{1}{iE}\iint \frac{d}{dk}\left[a(k)e^{-i\omega(k)t}\right]a^*(k')e^{i\omega(k')t}\delta(k-k')dkdk' . \qquad (32)$$

La (32) se puede integrar en k utilizando la propiedad (21) de la función δ, obteniéndose

$$x_C(t) = -\frac{1}{iE}\int_{-\infty}^{\infty} a^*(k')e^{i\omega(k')t}\frac{d}{dk'}\left[a(k')e^{-i\omega(k')t}\right]dk' . \qquad (33)$$

En lo sucesivo, sustituiremos en (33) la variable de integración k' por k por comodidad de escritura.

Efectuando la derivada respecto de k del producto en (33), resulta

$$x_C(t) = -\frac{1}{iE}\int_{-\infty}^{\infty} a^*(k)\frac{da(k)}{dk}dk + \frac{t}{E}\int_{-\infty}^{\infty}|a(k)|^2\frac{d\omega(k)}{dk}dk . \qquad (34)$$

Obsérvese que para t=0, la primera integral del segundo miembro de (34) indica la posición inicial $x_C(0)$ del centro del paquete. De forma que

$$x_C(t) = x_C(0) + \frac{t}{E}\int_{-\infty}^{\infty}|a(k)|^2\frac{d\omega(k)}{dk}dk . \qquad (35)$$

La (35) ubica la posición del centro del paquete de ondas en función del tiempo. Véase que dicho centro avanza con velocidad constante, llamada *velocidad de grupo* del paquete de ondas:

$$v_G = \frac{dx_C}{dt} = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}|a(k)|^2\frac{d\omega(k)}{dk}dk . \qquad (36)$$

Al igual que en la expresión (28) que define el centro o punto medio del paquete de ondas, la (36) define también el valor central de la función $d\omega/dk$, promediada entre todos los valores de k presentes en el paquete, cada uno con su peso $|a(k)|^2$. Podemos expresar (36) como

$$v_G = \left\langle \frac{d\omega}{dk} \right\rangle , \qquad (37)$$

donde los *brackets* < > indican el promedio.

Usualmente la función $a(k)$ es simétrica entorno a cierto valor central de k, en cuyo caso el valor medio (37) resulta igual al valor de la función en dicho centro. Si llamamos k_C al valor central de los k del paquete, la velocidad de grupo del mismo se puede expresar entonces como

$$v_G = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_C} . \tag{38}$$

En el #1 se comentó sobre los medios dispersivos que verifican la relación (6), y los nos dispersivos que verifican (7), con la velocidad de fase c constante.

En este último caso, la derivada de ω respecto a k es constante, y la aplicación de (36) o (38) conducen inmediatamente a que $v_G = c$, de forma que el centro del paquete avanza con la misma velocidad que todas sus ondas armónicas componentes, y el paquete conserva su forma.

En caso contrario, el paquete se irá ensanchando con el tiempo (se dispersa) como se verá más adelante.

6 - Relación entre el ancho de banda y el ancho del paquete.

Probaremos que existe una proporcionalidad inversa entre la extensión espacial de un paquete de ondas (ancho del paquete) y el intervalo de valores de k de las ondas armónicas que lo componen (ancho de banda del paquete).

En rigor, tanto el ancho espacial del paquete como su ancho de banda pueden ser infinitos, con tal de que las funciones $f(x,t)$ y $a(k)$ tiendan a cero para $x \to \pm\infty,\ k \to \pm\infty$.

Sin embargo, es útil definir un ancho espacial efectivo para un paquete de ondas, como algún intervalo $\Delta x(t)$ en el cual la función de onda $f(x,t)$ tenga valores significativos en cada instante dado. Si el medio es no dispersivo, el ancho Δx de paquete será constante en el tiempo.

De igual forma, el paquete podrá contener valores de k entre $-\infty$ y $+\infty$, pero los valores de amplitud $a(k)$ correspondientes a valores absolutos muy grandes de k serán despreciablemente pequeños. Por ello es útil definir un ancho de banda efectivo Δk dentro del cual los valores de amplitud sean significativos.

Para formalizar estas precisamente estas ideas, se define el ancho espacial $\Delta x(t)$ de un paquete de ondas como

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} [x - x_C(t)]^2 |f(x,t)|^2 dx , \tag{39}$$

donde $x_C(t)$ es el centro del paquete definido en (28) y la constante E es, como siempre, la definida en (24). La (39) expresa, igual que en estadística, la dispersión cuadrática media del paquete de ondas.

De manera similar, su ancho de banda Δk se define como

$$\left[\Delta k\right]^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\left[k-k_C\right]^2\left|a(k)\right|^2 dk\ , \tag{40}$$

donde k_C es el valor central de los k que componen el paquete, definido (al igual que en (28)) como

$$k_C = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} k\left|a(k)\right|^2 dk\ . \tag{41}$$

Buscaremos una relación entre el ancho espacial del paquete definido en (39), con su ancho de banda definido en (40).

Trabajaremos en el instante inicial t=0 para simplificar los cálculos, y luego veremos la evolución en el tiempo de la relación obtenida, probando que el paquete se va ensanchando si el medio es dispersivo.

En el instante inicial pondremos $\Delta x = \Delta x(0)$, $x_C = x_C(0)$, $f(x) = f(x,0)$, con lo que (39) queda

$$\left[\Delta x\right]^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-x_C\right]^2\left|f(x)\right|^2 dx\ , \tag{42}$$

en t=0.

A su vez, en el instante inicial la transformada de Fourier (13) se expresa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(k)e^{ikx}dk\ . \tag{43}$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que en t=0 el paquete está centrado en el origen, por lo que x_C=0, y su componente central de k es k_C=0. Esto implica nada más que un corrimiento de las gráficas de $f(x)$ y $a(k)$ en sus respectivos ejes sin afectar los valores de las dispersiones Δx y Δk .

Entonces tenemos, en lugar de (42),

$$\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} x^2\left|f(x)\right|^2 dx\ . \tag{44}$$

Y en lugar de (40),

$$\left(\Delta k\right)^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} k^2\left|a(k)\right|^2 dk\ . \tag{45}$$

Sustituimos (43) en (44),

$$\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2\pi E}\iiint x^2 a(k)a^*(k')e^{ikx}e^{-ik'x}\,dk\,dk'dx\,, \tag{46}$$

que se puede poner como

$$\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2\pi E}\iiint a(k)a^*(k')\frac{d}{dk}e^{ikx}\frac{d}{dk'}e^{-ik'x}\,dk\,dk'dx\,. \tag{47}$$

Cada una de las integrales en *k* y en *k'* se pueden efectuar por separado y por partes en (47), obteniéndose

$$\int_{-\infty}^{\infty} a(k)\frac{d}{dk}e^{ikx}dk = \left[a(k)e^{ikx}\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{da(k)}{dk}e^{ikx}dk = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da(k)}{dk}e^{ikx}dk\,, \tag{48}$$

puesto que la función $a(k)$ debe anularse en los límites de integración.

Igualmente para la integración respecto a *k'* en (47):

$$\int_{-\infty}^{\infty} a^*(k')\frac{d}{dk'}e^{-ik'x}dk' = -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{da^*(k')}{dk'}e^{-ik'x}dk'\,. \tag{49}$$

Sustituyendo (48) y (49) en (47), tenemos

$$\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{2\pi E}\iiint \frac{da(k)}{dk}\frac{da^*(k')}{dk'}e^{i(k-k')x}\,dk\,dk'dx\,,$$

que es posible integrar en *x* utilizando el resultado (27):

$$\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{E}\iint \frac{da(k)}{dk}\frac{da^*(k')}{dk'}\delta(k-k')\,dk\,dk'\,.$$

Esta última se integra en *k* utilizando la propiedad (21) de la función δ, lo cual da

$$\left(\Delta x\right)^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{da(k)}{dk}\right|^2 dk\,. \tag{50}$$

Compararemos (50) con (45) para obtener la relación buscada entre Δx y Δk.

Definamos una función de *k* compleja $B(k)$ que depende de un número real arbitrario *b* en la forma

$$B(k) = bka(k) + \frac{da(k)}{dk}\,, \tag{51}$$

de donde:

$$\left|B(k)\right|^2 = b^2 k^2 \left|a(k)\right|^2 + \left|\frac{da(k)}{dk}\right|^2 + bk\frac{d}{dk}\left|a(k)\right|^2 . \tag{52}$$

Integrando (52) en k tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|B(k)\right|^2 dk = b^2\int_{-\infty}^{\infty} k^2\left|a(k)\right|^2 dk + \int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{da(k)}{dk}\right|^2 dk + b\int_{-\infty}^{\infty} k\frac{d}{dk}\left|a(k)\right|^2 dk \geq 0 , \tag{53}$$

porque $\left|B(k)\right|^2 \geq 0 \quad \forall k$.

Sustituyendo (45) y (50) en (53) tenemos

$$b^2 E(\Delta k)^2 + E(\Delta x)^2 + b\int_{-\infty}^{\infty} k\frac{d}{dk}\left|a(k)\right|^2 dk \geq 0 . \tag{54}$$

La integral de (54) se efectúa por partes, dando

$$\int_{-\infty}^{\infty} k\frac{d}{dk}\left|a(k)\right|^2 dk = \left[k\left|a(k)\right|^2\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\left|a(k)\right|^2 dk = -E ,$$

porque $\left|a(k)\right|^2$ tiende a cero en los límites (en un infinitésimo de orden mayor que $1/k$), y la otra integral da E según (24).

Sustituyendo este último resultado en (54) obtenemos

$$b^2(\Delta k)^2 + b + (\Delta x)^2 \geq 0 , \tag{55}$$

cualquiera sea el número real b aún no definido.

Entonces, la inecuación de segundo grado en b definida en (55) sólo puede tener una o ninguna raíz real. Esto es, su discriminante es negativo o nulo:

$$1 - 4(\Delta k)^2(\Delta x)^2 \leq 0 ,$$

lo cual implica que

$$\Delta k \Delta x \geq \frac{1}{2} . \tag{56}$$

La (56) expresa una proporcionalidad inversa entre el ancho espacial Δx del paquete de ondas, y su ancho de banda Δk . Cuanto más estrecho sea el paquete, mayor será el intervalo de longitudes de onda armónicas necesario para definirlo, y recíprocamente. Como caso límite, tenemos que una onda armónica pura tiene una extensión infinita en el espacio. Por tanto tiene un ancho de banda nulo (un único valor de k).

7 - Dispersión del paquete de ondas.

Probaremos que en ancho del paquete de ondas definido en (39) en función del tiempo, evoluciona de forma tal que aumenta con el tiempo. A menos que el medio sea no dispersivo, en cuyo caso se mantiene constante.

De acuerdo con (35) y (36), tenemos que

$$x_C(t) = x_C(0) + v_G t \,. \tag{57}$$

Tomando $x_C(0)=0$ y sustituyendo (57) en (39), resulta

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}(x - v_G t)^2 \left| f(x,t)\right|^2 dx \,,$$

que desarrollando el cuadrado del binomio en el integrando, obtenemos

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left| f(x,t)\right|^2 dx + \frac{1}{E} v_G{}^2 t^2 \int_{-\infty}^{\infty}\left| f(x,t)\right|^2 dx - \frac{2}{E} v_G t \int_{-\infty}^{\infty} x \left| f(x,t)\right|^2 dx \,. \tag{58}$$

La segunda integral de (58) es la constante E según (24), en tanto que la tercera es la ubicación del centro $x_C(t)$ según (28). Entonces

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left| f(x,t)\right|^2 dx + v_G{}^2 t^2 - 2 v_G t x_C(t) \,. \tag{59}$$

Sustituyendo en (59) el valor de $x_C(t)$ de (57), considerando que $x_C(0)=0$, obtenemos

$$[\Delta x(t)]^2 = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \left| f(x,t)\right|^2 dx - v_G{}^2 t^2 \,. \tag{60}$$

La integral de (60) depende del tiempo a través de $\left| f(x,t)\right|^2$, y hay que hacerla con algo de detalle.

Utilizando (25) tenemos que

$$\int x^2 \left| f(x,t)\right|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\iiint x^2 a(k) a^*(k') e^{i(k-k')x} e^{-i[\omega(k)-\omega(k')]t} dk\, dk'\, dx \,,$$

que se puede poner como

$$\int x^2 \left| f(x,t) \right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \iiint a(k) e^{-i\omega(k)t} a^*(k') e^{i\omega(k')t} \frac{d}{dk} e^{ikx} \frac{d}{dk'} e^{-ik'x} dk dk' dx \,. \qquad (61)$$

La (61) se puede integrar separadamente en *k* y *k’*. Integrando por partes:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} a(k) e^{-i\omega(k)t} \frac{d}{dk} e^{ikx} dk = \left[a(k) e^{-i\omega(k)t} e^{ikx} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dk} \left[a(k) e^{-i\omega(k)t} \right] e^{ikx} dk = \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dk} \left[a(k) e^{-i\omega(k)t} \right] e^{ikx} dk \end{aligned} \qquad (62)$$

por ser nula $a(k)$ en los límites de integración.

Igual resultado al (62) se obtiene al integrar en *k’* en (61). Por tanto la (61) resulta

$$\int x^2 \left| f(x,t) \right|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \iiint \frac{d}{dk} \left[a(k) e^{-i\omega(k)t} \right] \frac{d}{dk'} \left[a^*(k') e^{i\omega(k')t} \right] e^{i(k-k')x} dk dk' dx \,,$$

que puede ser integrada en *x* utilizando el resultado (27), por lo cual

$$\int x^2 \left| f(x,t) \right|^2 dx = \iint \frac{d}{dk} \left[a(k) e^{-i\omega(k)t} \right] \frac{d}{dk'} \left[a^*(k') e^{i\omega(k')t} \right] \delta(k-k') dk dk' \,. \qquad (63)$$

La (63) se puede integrar en *k* utilizando la propiedad (21) de la función δ, obteniéndose

$$\int x^2 \left| f(x,t) \right|^2 dx = \int \left| \frac{d}{dk} \left[a^*(k) e^{i\omega(k)t} \right] \right|^2 dk \,,$$

que al efectuar la derivada del producto en el integrando, resulta

$$\int x^2 \left| f(x,t) \right|^2 dx = \int \left| \frac{da^*(k)}{dk} + it \frac{d\omega(k)}{dk} a^*(k) \right|^2 dk \,. \qquad (64)$$

Desarrollando el cuadrado del módulo en (64), tenemos

$$\int x^2 \left| f(x,t) \right|^2 dx = \int \left| \frac{da}{dk} \right|^2 dk + it \int \frac{d\omega}{dk} \left(\frac{da}{dk} a^* - \frac{da^*}{dk} a \right) dk + t^2 \int \left(\frac{d\omega}{dk} \right)^2 \left| a \right|^2 dk \,,$$

o sea:

$$\int x^2 |f(x,t)|^2 dx = \int \left|\frac{da}{dk}\right|^2 dk - 2t \int \frac{d\omega}{dk} \Im\left\{\frac{da}{dk} a^*\right\} dk + t^2 \int \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2 |a|^2 dk\,, \qquad (65)$$

donde $\Im$ indica la parte imaginaria.

En forma general, la amplitud compleja $a(k)$ será de la forma

$$a(k) = |a(k)| e^{i\varepsilon(k)}\,,$$

por lo cual

$$\frac{da}{dk} a^* = \frac{d|a(k)|}{dk} |a(k)| + i |a(k)|^2 \frac{d\varepsilon}{dk}\,,$$

de donde

$$\Im\left\{\frac{da}{dk} a^*\right\} = |a(k)|^2 \frac{d\varepsilon}{dk}\,. \qquad (66)$$

Poniendo este resultado en (65) tenemos

$$\int x^2 |f(x,t)|^2 dx = \int \left|\frac{da}{dk}\right|^2 dk - 2t \int \frac{d\omega}{dk} \frac{d\varepsilon}{dk} |a|^2 dk + t^2 \int \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2 |a|^2 dk\,. \qquad (67)$$

La primera integral del segundo miembro de (67) la tenemos en (50), siendo el ancho inicial del paquete. Las segunda indica el valor medio sobre k del producto de las derivadas de la frecuencia y la fase respecto a k. Y la tercera es el valor medio del cuadrado de la derivada de la frecuencia respecto a k. Esto es

$$\int x^2 |f(x,t)|^2 dx = E[\Delta x(0)]^2 - 2tE\left\langle \frac{d\omega}{dk} \frac{d\varepsilon}{dk} \right\rangle + t^2 E \left\langle \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2 \right\rangle. \qquad (68)$$

Sustituyendo (68) en (60), tenemos

$$[\Delta x(t)]^2 = [\Delta x(0)]^2 - 2t\left\langle \frac{d\omega}{dk} \frac{d\varepsilon}{dk} \right\rangle + t^2 \left\langle \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2 \right\rangle - v_G{}^2 t^2\,. \qquad (69)$$

La velocidad de grupo v_G la sustituimos de (37) en (69), resultando

$$[\Delta x(t)]^2 = [\Delta x(0)]^2 - 2t\left\langle \frac{d\omega}{dk} \frac{d\varepsilon}{dk} \right\rangle + t^2 \left[\left\langle \left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{d\omega}{dk} \right\rangle^2 \right]. \qquad (70)$$

Por último, supongamos que todas las ondas que forman el paquete tienen inicialmente la misma fase ε (lo cual no es más que una elección adecuada del instante inicial). En este caso, ε será independiente de k y su derivada en (70) será nula, lo cual nos deja

$$[\Delta x(t)]^2 = [\Delta x(0)]^2 + t^2\left[\left\langle\left(\frac{d\omega}{dk}\right)^2\right\rangle - \left\langle\frac{d\omega}{dk}\right\rangle^2\right]. \qquad (71)$$

En (71) aparecen dos promedios de la función $d\omega/dk$, que generalmente no son iguales. Uno es el promedio del cuadrado de la función, el otro es el cuadrado del promedio. El primero es mayor que el segundo, y sólo son iguales cuando la función es constante. Esto es, cuando

$$\frac{d\omega}{dk} = c = cste.,$$

lo que significa que las ondas son no dispersivas. En este caso se anula el último término de (71) y el ancho del paquete permanece invariable con el tiempo.

En cualquier otro caso, la diferencia en el paréntesis recto de (71) es positiva, y el ancho del paquete siempre aumenta con el tiempo.

I.Núñez
Curso de Ondas.
I.F.F.C.