Matemática Inicial

Solución Primer Parcial, Setiembre de 2023.

No Lista	Apellido y Nombre	Cédula	Grupo (Mat-Noct)

Importante: en esta prueba evaluaremos fundamentalmente el desarrollo de las resoluciones más que los resultados. Por lo tanto, es importante que las respuestas estén debidamente justificadas y que lo que escriban sea legible y comprensible.

Ejercicio 1 (8 puntos)

1. *Hallar S conjunto solución de la inecuación* $\sqrt{81-3x} < 3$.
2. *Suponiendo que el conjunto universal* $U = [0,+\infty)$, *hallar* S^c *el complemento de* S.

Solución:

1. Primero que nada, observar que por el dominio de la raíz cuadrada, $81-3x$ debe ser mayor o igual a cero, es decir $x \le 27$. Elevando al cuadrado a ambos lados de la desigualdad obtenemos
$$81 - 3x < 9$$
de donde se deduce que $x > 24$. En concluisón,
$$S = (24, 27]$$
2. Si el conjunto universal es $[0,+\infty)$, es claro que
$$S^c = [0,24] \cup (27,+\infty).$$

Ejercicio 2 (12 puntos)

1. *Resolver la siguiente ecuación en* $\mathbb{R}$: $3|x-2| = |x+1|$
2. *Resolver la siguiente inecuación en* $\mathbb{R}$: $3|x-2| - |x+1| > 2$

Solución:

1. Recordar que $|a| = |b|$ si y solo sí $a = \pm b$.

   Por lo tanto, obtenemos que $3|x-2| = |x+1|$ si y solo si $3(x-2) = (x+1)$ ó $3(x-2) = -(x+1)$.

   Resolvamos primero el caso en que sea el signo positivo. De $3(x-2) = x+1$, obtenemos $2x = 7$, es decir $x = 7/2$.

   Resolvamos ahora el caso en que el signo es negativo. De $3(x-2) = -x-1$, obtenemos $4x = 5$, es decir $x = 5/4$.

   En concluisón, el conjunto solución es $\{5/4, 7/2\}$.
2. En primer lugar estudiemos los signos de $x-2$ y $x+1$. Observar que $x-2$ es no negativo si $x \ge 2$ y $x+1$ es no negativo si $x \ge -1$.

   Por lo tanto, tenemos tres zonas, $I = (-\infty,-1)$, $II = [-1,2)$ y $III = [2,\infty)$. En I, ambas expresiones son negativa. En II, $x-2$ es negativo y $x+1$ es no negativo. En III, ambas expresiones son no negativas.

En I, la inecuación resulta $3(-x+2)-(-x-1)>2$, de donde obtenemos $-2x>-5$ y dividiendo entre -2 obtenemos $x<5/2$. Como $-1\leq 5/2$, concluimos que la inecuación se cumple para todo $x\in I$.

En II, la inecuación resulta $3(-x+2)-x-1>2$, de donde obtenemos $-4x>-3$ y dividiendo entre -4 obtenemos $x<3/4$. Como $-1<3/4<2$, concluimos que la inecuación se cumple para todo $x\in[-1,3/4)$.

En III, la inecuación resulta $3(x-2)-x-1>2$, de donde obtenemos $2x>9$ y dividiendo entre 2 obtenemos $x>9/2$. Como $2\leq 9/2$, concluimos que la inecuación se cumple para todo $x\in(9/2,+\infty)$.

En conclusión, el conjunto solución de la inecuación es $(-\infty,3/4)\cup(9/2,+\infty)$.

Ejercicio 3 (10 puntos) 1. *Completar la palabra faltante. Si $P\Rightarrow Q$ entonces:*

- *P es condición **SUFICIENTE** para Q.*
- *Q es condición **NECESARIA** para P.*

2. *Se considera la afirmación Q:*

$$\log(x^2-3)\geq 0$$

a) *Indicar si las siguientes afirmaciones son condiciones suficientes para Q. Justifique su respuesta:*

- $x\in(0,+\infty)$
- $x>4$
- $x\leq -3$
- $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

b) *¿Alguna es condición necesaria para Q? Justifique su respuesta.*

c) *Hallar una condición necesaria y suficiente para Q.*

Solución:

a) Observar que por existencia del logaritmo, $x^2-3\geq 0$ y por lo tanto $x\in\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3},+\infty\right)$.

Las afirmación $x\in(0,+\infty)$ y $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ no son suficientes para para Q, ya que contienen valores de x que no estan comprendidos en la existencia del logaritmo, por ejemplo $x=1,1$.

Si $x>4$, entonces $x^2-3>4^2-3=13>1$ y por lo tanto $log(x^2-3)\geq 0$. Es decir, $x>4$ es un condición suficiente para Q.

Si $x\leq -3$, entonces $x^2-3>(-3)^2-3=6>1$ y por lo tanto $log(x^2-3)\geq 0$. Es decir, $x\leq -3$ es un condición suficiente para Q.

b) Como sabemos de la parte anterior que podemos tener solcuiones positvias y negativas, las primeras tres opciones no pueden ser condiciones necesarias para Q.

Recordar que el logaritmo es no negativo siempre y cuando el argumento sea mayor o igual a 1. Por lo tanto de Q deducimos que $x^2-3\geq 1$, es decir $x\leq -2$ o $x\geq 2$. Como $-2<-1$ y $2>1$, tenemos que $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ es una condición necesaria para Q.

c) Una condición necesaria y suficiente para Q es $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

Ejercicio 4 (10 puntos) *Se considera la siguiente afirmación:*

Matemática Inicial

Solución Primer Parcial, Setiembre de 2023.

Para todo número x par se cumple que $(x+1)^2$ es impar

1. *Determinar la negación de la afirmación.*
2. *Escribir el contrarrecíproco de la afirmación.*
3. *Indicar si la afirmación es verdadera o falsa. En caso de que sea verdadera probarla y en que sea falsa justificar por qué lo es.*

Solución:

1. Recordar que para que no se cumpla un para todo, basta con un ejemplo. Por lo tanto la negación de la afirmación es

   Existe un número x par que cumple que $(x+1)^2$ no es impar.

2. Observar que la afirmación es equivalente a decir que si x es par, entonces $(x+1)^2$ no es par.Por lo tanto el contrarrecíproco de la afirmación es

   Si $(x+1)^2$ no es impar, entonces x no es par,

   o también,

   Si $(x+1)^2$ es par, entonces x es impar.

3. La afirmación es verdadera. En efecto, si x es par, entonces $x = 2n$ para algun n natural. Desarrollando el cuadrado del binomio, se tiene

   $$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

   que claramente es impar.