Cierre de la clase 15/9/2023

Series de Potencias

ALA, JAP, Capítulo I, Sección 4.5.

En la clase de hoy demostramos parte central del siguiente Teorema. Demostramos la parte b) - observando que se desprende directamente de a)-, y demostramos en la parte a) que la sucesión de sumas parciales, $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$, converge (vía el concepto de sucesión de Cauchy).

Teorema: Sea $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) Si $\rho(A) < 1$, entonces $(In - A)$ es invertible y se tiene que $(In - A)^{-1} = \sum_{s=0}^{+\infty} A^s$.

b) Si $\rho(A) < 1$, y todos las entradas de A son no negativas, o sea $a_{ij} \geq 0$, para todo $1 \leq i, j \leq n$, entonces las entradas de $(I_n - A)^{-1}$ son también, no negativas.

demostración:

a) Demostramos en clase que la sucesión $S_m = \sum_{s=0}^{m} A^s$, es convergente, usando que $\mathbb{C}^{n^2}$ es completo (o sea toda sucesión de Cauchy es convergente). No dio el tiempo para probar que:

$$S_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} (I_n - A)^{-1}.$$

Lo hacemos aquí, en lo que sigue:

Sabemos que $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ es convergente. Asumamos que $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge a S o sea $S_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} S$. Calculamos:

$(I_n - A).S = (I_n - A).\lim\limits_{m\to+\infty} S_m = \lim\limits_{m\to+\infty}(I_n - A).S_m = \lim\limits_{m\to+\infty}(I_n - A).(A^0 + A^1 + A^2 + \cdots + A^m) = \lim\limits_{m\to+\infty} I_n - A^{m+1} = I_n - \lim\limits_{m\to+\infty} A^{m+1} = I_n$,

donde la segunda igualdad se basa en el punto (iii) del primer lema dado en la sección Sucesiones de Matrices (que quedó para demostrar como Ejercicio en el Práctico 4).

Entonces S es la inversa derecha de $(In - A)$, pero en dimensión finita, la inversa a derecha e izquierda de una matriz, si una existe, existe la otra y coinciden. Por ende S es la inversa (de ambos lados) de $(In - A)$.

Entonces terminamos la prueba de que:

$$S_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} S = (I_n - A)^{-1}.$$

Marcelo Lanzilotta